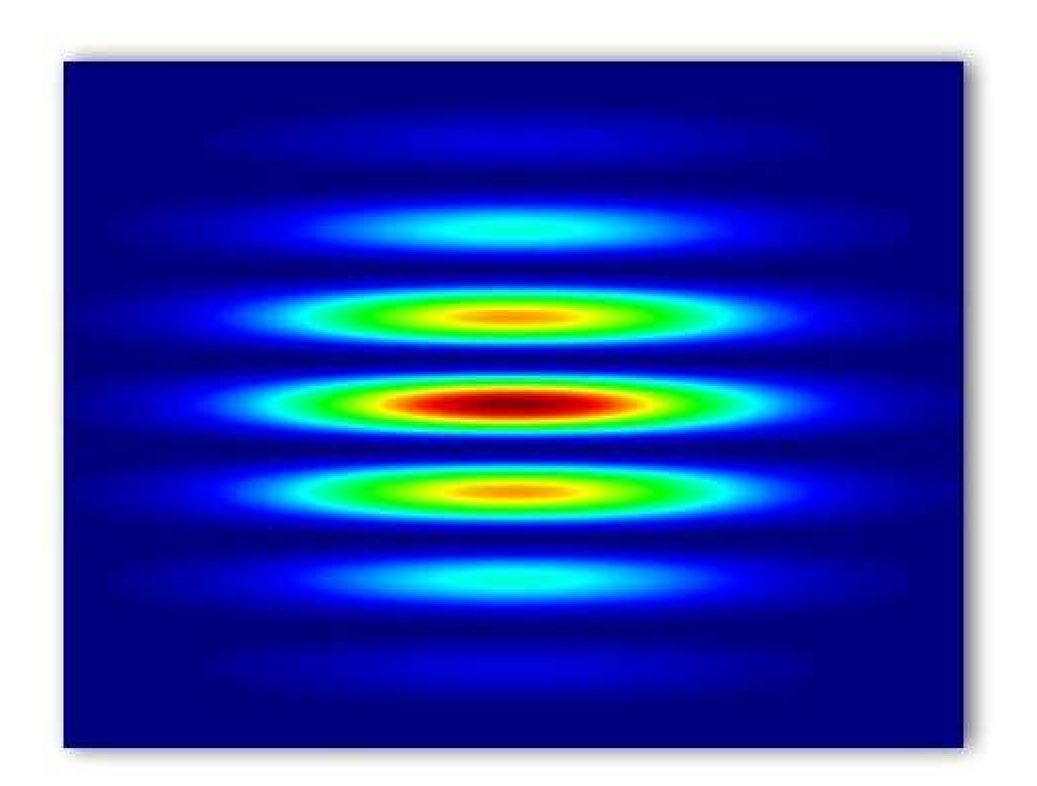
Thomas Delavande

Invariances et transformations

Essai sur la gravitation, l'électromagnétisme et les interactions nucléaires, de Kepler aux pentaquarks



Version décembre 2022

Point essentiel de l'essai : des équations sources champs pour la gravitation analogues à celles de l'électromagnétisme

(équations proposées dans le mémoire 3, chapitres III, IV et V)

Sur le modèle du couple champ magnétique $\vec{B}$ et champ électrique $\vec{El}$, on propose d'interpréter la pulsation Ω et le vecteur d'onde K comme un couple champ pulsation $\vec{\Omega}$ et champ vecteur d'onde $\vec{K}$, couple qui va intervenir dans les équations sources champs proposées pour la gravitation.

Préalablement, rappelons les équations bien connues sources champs de Maxwell en électromagnétisme et leur analogue en gravitation (avec $\overrightarrow{Es}$ champ électrostatique, $\overrightarrow{El}$ champ électrique et $\overrightarrow{Gr}$ champ gravitationnel). Observons qu'il n'existe pas a priori d'analogue connu à Maxwell Ampère pour la gravitation :

	Electromagnétisme	Gravitation
Gauss	$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\overrightarrow{Es}$ $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\overrightarrow{El}$	$-4\pi G\rho = div\overrightarrow{Gr}$
Ampère	$\mu_0\vec{J} = rot\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{El}}{\partial t}$	

Réécrivons ces équations en nous restreignant à 2 dimensions de l'Espace, cette simplification ayant pour objectif de mieux cerner par la suite les analogies :

	Electromagnétisme	Gravitation
Gauss	$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\partial Es_x}{\partial x} + \frac{\partial Es_y}{\partial y}$ $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\partial El_x}{\partial x} + \frac{\partial El_y}{\partial y}$	$-4\pi G\rho = \frac{\partial Gr_x}{\partial x} + \frac{\partial Gr_y}{\partial y}$
Ampère	$\mu_0 j_y = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial El_y}{\partial t}$	

En appliquant le théorème d'Ampère (c'est-à-dire suivant une analogie avec l'équation source champ de Maxwell Ampère) au champ pulsation $\vec{\Omega}$ et au champ vecteur d'onde $\vec{K}$, puis en substituant les sources densités de charge ρ et de courant j_y par des densités de masse ρ et d'impulsion $\dot{p}_y$, on obtiendra plusieurs équations sources champs s'appliquant à la gravitation. On donne dans le tableau ci-dessous les analogues qui seront proposés :

	Electromagnétisme	Gravitation
Gauss	$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\partial Es_x}{\partial x} + \frac{\partial Es_y}{\partial y}$ $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\partial El_x}{\partial x} + \frac{\partial El_y}{\partial y}$	$-4\pi G\rho = \frac{\partial Gr_x}{\partial x} + \frac{\partial Gr_y}{\partial y}$ $-4\pi G\rho = \frac{\partial 2c^2K_x}{\partial x} + \frac{\partial 2c^2K_y}{\partial y}$
Ampère	$\mu_0 j_y = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial El_y}{\partial t}$	$-\frac{1}{\hbar}\dot{p}_y = \frac{\partial\Omega_z}{\partial x} - \frac{\partial K_y}{\partial t}$

En divisant le 1er terme d'Ampère par le 1er terme de Gauss, on trouve une vitesse de groupe (ou similaire), aussi bien pour l'électromagnétisme que pour la gravitation, à la condition de vérifier une relation entre les constantes des équations sources champs concernées :

Vitesse de groupe	$v_g = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{j_y}{\rho} = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial El_x}$	$v_g = \frac{1}{4\pi G\hbar} \frac{\dot{p}_y}{\rho} = \frac{\partial \Omega_z}{\partial K_x}$
Condition sur les constantes	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$	$c = \sqrt{\frac{G\hbar}{c{l_p}^2}}$

Transcrivons ces équations avec les notations usuellement utilisées dans cet essai, notations qui ont pour objectif de souligner les analogies d'une part entre gravitation et électromagnétisme, d'autre part entre Espace et Temps :

	Electromagnétisme	**Gravitation**
Gauss	$\frac{\vec{\rho}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \overrightarrow{Es}_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{Es}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$ $\frac{\vec{\rho}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \overrightarrow{El}_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{El}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$	$-4\pi G \vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial \overrightarrow{Gr}_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{Gr}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$ $-4\pi G \vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial 2c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial 2c^2 \vec{K}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$
Ampère	$\mu_0 \vec{J}_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}l_{ty}^{1/x}}{\partial t}$	$-\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$
Vitesse de groupe	$v_g = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{j_{xt}^{y}}{\rho_{xy}^{t}} = c^2 \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$	$v_g = \frac{1}{4\pi G\hbar} \frac{\dot{p}_{xt}^{y}}{\rho_{xy}^{t}} = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$
Condition sur les constantes	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$	$c = \sqrt{\frac{G\hbar}{c{l_p}^2}}$

Observons que l'équation Ampère Gravitation correspond :

- sur le premier terme de droite au principe fondamental de la dynamique d'Isaac Newton :

$$(\frac{d\vec{p}}{dt})_{xt}^{y} = \frac{-\partial \hbar \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x} = \frac{-\partial Ep}{\partial x}$$

- sur le second terme de droite à la relation impulsion longueur d'onde (ou vecteur d'onde) $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar K$ d'Albert Einstein et de Louis de Broglie :

$$(\frac{d\vec{p}}{dt})_{xt}^{y} = \frac{\partial \hbar \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

Soulignons enfin que le quotient des 2 équations sources champs gravitation permet de retrouver une vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$, suivant une condition portant sur la longueur de Planck $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$. C'est on le verra par la suite, la « pierre d'achoppement » et l'argument fondamental en faveur des équations sources champs proposées ici pour la gravitation.

Introduction : pourquoi les lois de la gravitation et de l'électricité se ressemblent autant ?

Quiconque s'intéresse aux lois de la gravitation et de l'électricité, peut s'étonner de la ressemblance entre ces lois. Souvent, à une notion utilisée en gravitation (ou plus généralement en mécanique), correspond une notion semblable utilisée en électricité.

On peut citer pêlemêle :

- le potentiel gravitationnel newtonien et le potentiel électrique coulombien,
- l'énergie, la puissance en mécanique et l'énergie, la puissance en électricité,
- la masse et la charge électrique, avec toutefois une différence importante, puisqu'on observe deux natures de charge électrique et une seule nature de masse,
- les forces en mécanique (force gravitationnelle, force centrifuge, force de Coriolis) et les forces en électricité (force électrostatique, force magnétique de Lorentz, etc.). Il existe cependant une différence notable entre force électrique et force gravitationnelle : dans un champ électrique, l'accélération d'un corps dépend de sa charge électrique massique, alors que dans un champ gravitationnel, l'accélération d'un corps ne dépend pas de sa masse.

Ces ressemblances entre gravitation et électricité ont souvent été soulignées et exploitées par les physiciens. Des théories mécaniques ont influencé des théories électriques, qui à leur tour ont influencé des théories mécaniques.
Par exemple, au 17ème siècle Christiaan Huygens souligne la ressemblance entre les ondes mécaniques et la théorie optique pour développer une première théorie ondulatoire de la lumière. Au 19ème siècle, Michael Faraday s'appuie sur des considérations mécaniques pour développer les notions de champ magnétique et de champ électrique. Comme un retour des choses, ses idées inspirent la notion de champ gravitationnel, avec une action non plus à distance, mais qui se propage peu à peu dans l'Espace. Dans les années 1920, Louis de Broglie et Erwin Schrödinger exploitent l'analogie avec les ondes mécaniques stationnaires, pour formuler l'équation d'onde de l'électron.
Ces ressemblances entre mécanique et électricité serviront de fil rouge aux réflexions menées dans cet essai. Elles resteront ici néanmoins énigmatiques. En effet, il ne sera évoqué que quelques pistes aux raisons profondes à ces ressemblances.

Cet essai est composé de 6 mémoires. Dans le 1er mémoire, on s'intéressera aux changements de référentiels et aux forces d'inertie. Le point de départ sera l'interrogation suivante d'A. Einstein. Pourquoi en physique classique existe-t-il deux types de forces : des forces « normales » et des forces d'inertie (parfois appelées pseudo forces) qui interviennent dans les mêmes équations ? On tentera de répondre à cette interrogation en assimilant toute force à une force d'inertie.
L'étude des forces d'inertie sera l'occasion d'aborder le modèle de l'électron de Bohr. Modèle proposé en 1913 par Niels Bohr et qui fait intervenir la force d'inertie centrifuge et la force électrostatique. A travers les notions d'invariances et de transformations de Jauge introduites en 1918 par Hermann Weyl, invariances de Jauge que l'on peut rapprocher d'une conservation des Lois de la Nature, transformations de Jauge que l'on peut rapprocher des changements de référentiels, on étudiera les équations d'onde d'E. Schrödinger (1925), de Wolfgang Pauli (1927) et de Paul Dirac (1928). Ainsi seront abordées les principales fonctions d'onde de la physique quantique des années 1920.

Le 2ème mémoire proposera davantage de conjectures que le 1er. On reviendra sur les analogies entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme, analogies par exemple soulignées par Henri Poincaré en 1893. A partir de ces analogies, on proposera les notions de champ pulsation $\vec{\Omega}$ et de champ vecteur d'onde $\vec{K}$. Ces deux champs s'appliqueront respectivement dans un plan spatial et dans un plan spatiotemporel. Par la suite, on tentera de construire toutes les forces de la physique classique sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis, avec une quantité conservée lors du changement de référentiels et une quantité annulée qui s'apparente à vecteur rotation « généralisée » ou à un champ.

L'étude des champs et des forces sera l'occasion de revenir sur la physique du 19ème siècle, physique qui s'est particulièrement investie dans l'électricité et l'électromagnétisme. Entre autres seront évoqués la loi de Charles-Augustin Coulomb pour l'électrostatique (1785), l'équation de Siméon-Denis Poisson (1813) (dont A. Einstein s'est largement inspiré pour sa théorie de la Relativité Générale), les travaux de M. Faraday sur l'induction magnétique (à partir de 1821), la force magnétique de Pierre-Simon Laplace (à partir de 1820) précurseur macroscopique de la force magnétique de Hendrik Lorentz, ainsi que la force d'inertie de Gustave-Gaspard Coriolis (1835).

Dans le 3ème mémoire, on examinera les équations sources champs de James Clerk Maxwell, équations faisant intervenir la densité de charge et la densité de courant électrique, les champs magnétiques et électriques, et s'appliquant à l'électromagnétisme. Suivant une analogie électricité gravitation, on proposera des équations sources champs faisant intervenir la densité de masse et la densité d'impulsion, les champs pulsation et vecteur d'onde, et s'appliquant à la gravitation. On touchera du doigt à la gravité quantique, lorsque pour obtenir une vitesse de groupe d'une onde identique à la vitesse d'un corps massique, on obtiendra la condition sur une distance infinitésimale : $dx = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$, distance identique à la longueur de Planck. On suggérera également l'analogue de Maxwell-Faraday pour la gravitation.
Ce mémoire s'intéressera aux recherches d'André-Marie Ampère, en particulier l'observation qu'un aimant et une boucle de courant produisent des effets identiques : un champ magnétique (à partir de 1820), puis aux équations de Maxwell proposées par J. C. Maxwell en 1865 (et retranscrites à l'aide de dérivées partielles en 1884 par Oliver Heaviside et Willard Gibbs). On abordera l'idée de L. de Broglie (1924) d'un électron à la fois onde et particule. Au passage, on traitera d'un peu de mécanique newtonienne (*les Principia* d'I. Newton publié en 1687), d'un peu de mécanique hamiltonienne (proposée par William Rowan Hamilton en 1833), d'un peu de mécanique einsteinienne (avec $E = mc^2$ énoncé par A. Einstein en 1905 dans le cadre de la Relativité restreinte), et de la diffusion Compton (1922). On évoquera également les ondes gravitationnelles suggérées par A. Einstein en 1916 dans le cadre de la Relativité Générale et confirmées expérimentalement en 2015 par les chercheurs du LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

Le 4ème mémoire portera sur les ondes particules élémentaires et sur les interactions nucléaires faible et forte. Ce sera un cours synthétique sur les principales théories développées au 20ème siècle, qui décrivent ces interactions nucléaires. On évoquera les travaux de Werner Heisenberg sur l'isospin (1932), la théorie d'Enrico Fermi sur l'interaction faible (1933), le modèle de Hideki Yukawa pour les interactions nucléaires (1935). Le modèle de Yukawa fait intervenir une particule médiatrice de type photon, mais possédant une masse (la particule est baptisée mésotron par H. Yukawa).
Ensuite, on parlera des travaux de Murray Gell-Mann (années 1960) sur les quarks et l'interaction forte, puis du Modèle électrofaible de Sheldon Glashow-Steven Weinberg-Abdus Salam (années 1960). Le Modèle électrofaible réunit les interactions électromagnétique, faible et hyper. On évoquera succinctement le mécanisme de Higgs ou BEH (mécanisme postulé indépendamment en 1964 par Robert Brout et François Englert, et par Peter Higgs) afin d'attribuer une masse aux ondes particules. Ces travaux des années 1950-1970 sont regroupés dans ce qu'on appelle aujourd'hui le Modèle standard.

Le 5ème mémoire s'intéressera toujours aux ondes particules élémentaires et sera à nouveau spéculatif. On tentera de jeter un pont entre le Modèles standard et certaines équations sources champs de la gravitation proposées dans le 3ème mémoire. On associera ces équations sources champs à 4 nombres quantiques qualifiés de source champ (spin S, isospin I, étrangeté St et nombre baryonique Ba) et à 4 interactions électromagnétique, hyper, faible et forte, qui toutes apparaissent dans le Modèle standard. Vers la fin du mémoire, il sera exposé une piste expliquant les ressemblances entre l'électricité et la gravitation. Cette piste présentera l'interaction gravitationnelle comme formée de deux constituants : l'un l'interaction électromagnétique, l'autre l'interaction hyper.
Ce mémoire commencera par un parallèle entre la loi des aires de J. Kepler (1609), les notions de moment cinétique, puis de spin quantique proposé par Samuel Goudsmit et George Uhlenbeck (1925). On évoquera les propositions de nouveaux nombres quantiques que sont l'hypercharge Y ou

l'étrangeté St (Kazuhiko Nishijima et M. Gell-Mann dans les années 1950). On reviendra également sur le Modèle des quarks (M. Gell-Mann et George Zweig de 1961 à 1964). Par la suite, on abordera l'angle de Nicola Cabibbo (1963), angle permettant de décrire à partir des quarks up et down les courants faibles neutres. On traitera également du mécanisme de S. Glashow-Jean Illiopoulos-Luciano Maiani, mécanisme qui imagine l'existence d'un 4ème quark et qui fait intervenir les courants faibles neutres. A travers les travaux de Bruno Pontecorvo et Ziro Maki (à partir des années 1960), on s'intéressera également aux oscillations de neutrinos : hypothèse de plusieurs familles de neutrinos, existence d'un angle (appelé aujourd'hui angle de Pontecorvo semblable pour les leptons à celui de Cabibbo pour les quarks). Enfin, on évoquera les pentaquarks (1ère détection en 2003 et confirmation en 2015).

Le 6ème mémoire sera sans doute le plus spéculatif de tous –certains considéreront peut-être avec justesse qu'on sort ici de la Science–. On s'interrogera sur les différences entre le Temps ressenti (Temps orienté telle une flèche) et le Temps utilisé en physique (Temps souvent décrit mathématiquement comme une dimension spatiale).
Pour répondre à cette interrogation, on étudiera les concepts les plus variés. Idée de John Wheeler et de Richard Feynman d'un électron qui remonte le Temps (concept évoqué dans le discours de réception du prix Nobel de R. Feynman en 1965). Travaux de Rudolf Clausius sur l'entropie (1865), de Ludwig Boltzmann sur l'entropie statistique (vers 1870), de Claude Shannon sur l'entropie de l'information (années 1950). Expériences de Chien-Shiung Wu (1957) sur la violation de parité lors de la désintégration bêta du cobalt-60. Relativité générale (A. Einstein vers 1915). Premiers modèles de Big-bang qui en découlent, modèles proposés par Willem de Sitter, Alexandre Friedmann et Georges Lemaître dans les années 20. Deux découvertes expérimentales viennent confirmer ces modèles : celle en 1920 par Edwin Hubble d'un univers en expansion, puis celle en 1965 par Arno Penzias et Robert Wilson d'un rayonnement électromagnétique à basse température.
On élargira finalement nos réflexions à d'autres domaines que la physique comme l'approche phénoménologiste d'Edmund Husserl (début du 20ème siècle) ou l'hypothèse Gaïa de James Lovelock (1979).

Préface au lecteur, que peut lui apporter cet essai ?

Cet essai privilégie deux grandes approches : une approche historique et une approche spéculative. D'une part, il veut résumer les grandes idées de la physique depuis les pionniers du 17ème siècle jusqu'à aujourd'hui. Sans prétention d'exhaustivité, ces idées sont celles qui nous ont paru le plus remarquable ou celles qui nous ont le plus intéressé. D'autre part, il souhaite rapporter le fruit de nos réflexions physiques depuis un peu plus d'une quinzaine d'années.
En suivant ces deux approches, historique et spéculative, cet essai a un triple objectif : initier, débattre et inspirer le lecteur.

Initier
En écrivant cet essai, nous nous sommes fréquemment demandé quel profil de lecteur nous visions. Bien sûr, nous sommes ouverts à tous les lecteurs. Pourtant, nous nous sommes souvent imaginé un esprit jeune, curieux, intelligent, qui ne connaîtrait pas encore grand-chose à la physique, et qui grâce à cet essai pourrait ***s'initier*** rapidement à ses grands concepts.
Evidemment, c'est en lisant des ouvrages variés et souvent contradictoires que l'on progresse le plus. Cependant, à notre connaissance, il existe peu d'ouvrages incluant des équations mathématiques, et qui regroupent de manière condensée les principales questions de la physique des 17ème, 18ème, 19ème et 20ème siècle.
Nous avons essayé d'écrire un ouvrage que nous aurions rêvé de parcourir à 25 ans, lorsque nous nous sommes intéressés de manière approfondie à la physique théorique. Un ouvrage destiné à faire gagner un temps précieux à un jeune lecteur dans la compréhension des principales idées de la physique d'hier et d'aujourd'hui.

Débattre
Nous avons également voulu écrire un essai qui provoque chez le lecteur le désir de ***débattre***. Je souhaite sincèrement que cet essai soit « discutable », c'est-à-dire que certaines idées spéculatives proposées ici valent la peine d'être débattues, afin d'enrichir le débat scientifique actuel.
Cependant, nous comptons sur l'indulgence du lecteur et nous le prions préalablement de nous excuser, pour avoir parfois laissé dans les parties spéculatives, un certain nombre de calculs non aboutis, c'est-à-dire non démonstratifs. En effet, il nous a semblé intéressant d'indiquer les chemins ou pistes suivis, même si ceux-ci ne menaient pas toujours à la destination souhaitée.

Inspirer
Enfin, notre principal objectif est d'***inspirer*** le lecteur, de générer chez lui de nouvelles idées en accord ou même en contradiction avec les idées et les pistes proposées ici. Notre modèle, c'est la thèse de L. de Broglie qui inspira E. Schrödinger, permit à ce dernier de développer l'équation portant son nom, et rapprocha (voire unifia) la physique et la chimie.
Notre rêve le plus fou, c'est que cet essai inspire quelques Schrödinger qui parviendront à unifier les différentes interactions de la physique, puis à expliquer qualitativement et quantitativement les énigmatiques propriétés des ondes particules (comme leurs nombres quantiques, leurs charges ou leurs masses, etc.).
Nous espérons également que cet essai inspire quelques Carlo Rubbia ou Simon van der Meer, les découvreurs en 1983 des bosons $W^{\pm}$ et Z^0, prédits par le Modèle électrofaible des années 1960. Dans les mémoires 4 et 5 de cet essai, il est évoqué un autre boson prédit par le Modèle électrofaible, le boson B non encore découvert jusqu'aujourd'hui. Comme caractéristiques supplémentaires, on proposera que le boson B soit sans masse comme le photon, et qu'il porte un isospin entier. Reste donc le plus important, le déceler et confirmer ces hypothèses.

Pour terminer cette préface, nous remercions d'avance tous les lecteurs qui voudront bien nous faire part de leurs critiques, de leurs commentaires, ainsi que des erreurs ou des ambiguïtés qui se sont glissées dans le texte. Ils peuvent être envoyés à l'adresse thomas.delavande@orange.fr.

Il s'agit là d'un ouvrage de synthèse traitant de domaines très variés de la physique. Comme tout ouvrage de synthèse, il a ses défauts, et dans certains domaines, des fautes et des erreurs graves ont pu s'y glisser. Merci donc à tous les experts, qui dans leur domaine respectif, prendront la peine de parcourir cet ouvrage et de nous en rapporter les erreurs. Ces remarques et corrections permettront, nous l'espérons, d'améliorer le présent texte pour une prochaine édition.

Expliquer à ma dernière fille Mycènes (14 ans) l'essai Invariances et Transformations

Ma dernière fille Mycènes, 14 ans (presque 15 ans), a déjà quelques bonnes notions de physique. Elle a par exemple appris les notions délicates d'énergie, d'énergie mécanique, d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Elle a compris que l'énergie mesure la capacité d'un système à pouvoir modifier un mouvement (ou dans un sens plus large, à modifier un état).
Récemment, dans le cadre d'un exposé, elle s'est intéressée aux phénomènes d'induction électromagnétique, c'est-à-dire à ces phénomènes surprenants et « magiques », où par exemple lorsqu'on bouge un aimant près d'un circuit électrique, il y apparait un courant électrique.
J'ai essayé d'expliquer à ma fille les phénomènes d'induction électromagnétique et par là-même, l'esprit de l'essai Invariances et Transformations qui permet, selon moi, de comprendre plus intuitivement ces phénomènes « magiques ». Avec ma fille, je n'utilise pas le titre d'Invariances et Transformations, mais celui de Théorie Temps Lumière, titre que je trouve plus jolie, plus poétique, même si le lien entre Temps et Lumière y reste confus.

Je me souviens avoir lu dans l'œuvre d'A. Einstein (malheureusement, je ne sais plus où, ni quoi exactement, donc sans doute que je transforme un peu) que même un enfant de 5 ans devrait pouvoir comprendre les équations physiques. 5 ans, cela me semble un peu jeune, mais je rejoins A. Einstein dans le sens que les « bonnes » théories physiques sont sans doute également les plus simples. Invariances et Transformations n'est pas un essai simple. La principale raison en est, je crois, qu'il ne résout pas sa première interrogation : celle de la ressemblance entre gravitation et électromagnétisme. Il n'en suggère que des pistes. Toutefois, j'ai essayé d'expliquer dans les quelques lignes qui suivent, les grands principes de ce long essai, de la façon la plus intuitive et la plus simple possible.

Comme des forces
Mycènes, fais avec moi les différentes expériences de pensée suivantes.

D'abord, imagine-toi dans une voiture qui avance en ligne droite sur l'autoroute. Soudain, cette voiture accélère. Tu te sens alors projetée vers l'arrière, plaquée sur ton fauteuil, comme soumise à une force qui t'emmène vers l'arrière.

Imagine-toi toujours dans une voiture qui avance en ligne droite sur l'autoroute. Soudain, cette voiture décélère. Tu te sens projetée vers l'avant, comme soumise à une force qui t'emmène vers l'avant.

Imagine-toi maintenant sur un manège en rotation. Tu te sens projetée vers l'extérieur du manège, comme soumise à une force qui te ferait « fuir » du manège. En Physique, on parle d'ailleurs de force d'inertie d'entrainement centrifuge. Je te donne son équation : $m(\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) \wedge \vec{\Omega}$, avec $\vec{\Omega}$ la vitesse de rotation du manège.

Imagine-toi toujours sur un manège en rotation, et que la rotation du manège s'accélère. Un peu comme dans la voiture en accélération sur l'autoroute, tu te sens plaquer vers l'arrière. Tu as le sentiment d'une force dont le sens est vers l'arrière et dont la direction est perpendiculaire au rayon du manège. En Physique, on parle d'ailleurs de force d'inertie d'entrainement, due à la variation de vitesse de rotation du manège. Je te donne son équation : $m\vec{O}M \wedge \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$.

Imagine-toi toujours sur un manège en rotation, et que la rotation du manège décélère. Un peu comme dans une voiture sur l'autoroute, tu te sens projetée vers l'avant, tu as le sentiment d'une force dont le sens est vers l'avant et dont la direction est perpendiculaire au rayon du manège. En Physique, on parle toujours de force d'inertie d'entrainement due à la variation de vitesse de rotation du manège.

Imagine-toi encore sur un manège en rotation (à vitesse constante), et que tu te meuves vers le centre du manège (note qu'ainsi ta vitesse diminue). Tu te sens emportée vers le sens de rotation du manège

(l'avant des précédentes expériences), tu as le sentiment d'une force dont le sens est celui de la rotation du manège et dont la direction est perpendiculaire à ta vitesse relative sur le manège. En Physique, on parle de force d'inertie de Coriolis. Je te donne son équation : $m\vec{v}_r \wedge 2\vec{\Omega}$.

Imagine-toi encore sur un manège en rotation (à vitesse constante), et que tu te meuves vers l'extérieur du manège (note qu'ainsi ta vitesse augmente). Tu te sens emportée vers le sens opposé à la rotation du manège (l'arrière des précédentes expériences), tu as le sentiment d'une force dont le sens est opposé à la rotation du manège et dont la direction est perpendiculaire à ta vitesse relative sur le manège. En Physique, on parle toujours de force d'inertie de Coriolis.

Pour toutes ces expériences de pensée, les physiciens « puristes » ne parlent pas vraiment de forces, mais de forces d'inertie ou de pseudo-forces, que l'on ajoute dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, lorsqu'on passe d'un référentiel dit galiléen (on utilise souvent aussi le terme de référentiel inertiel) à un référentiel non galiléen. La notion de référentiel galiléen n'est pas facile à appréhender. Tu peux la voir comme un référentiel où il n'y a pas de forces d'inertie à ajouter dans le principe fondamental de la dynamique de Newton. Mais il faut bien le reconnaître, par cette définition, le poisson se mord un peu la queue.

L'idée fondamentale de l'essai Invariance et Transformation, c'est de ramener toute force (gravitationnelle, électrique, magnétique) à une force d'inertie ajoutée lors d'un changement de référentiels.

Comprendre intuitivement les phénomènes d'induction électromagnétique, analogies entre mécanique et magnétisme

Reviens aux phénomènes d'inductions électromagnétiques et tente de les comprendre intuitivement en te servant des expériences de pensée précédentes sur le manège.

Tu peux voir l'aimant et le champ magnétique qu'il génère, comme un manège pour les charges électriques. Lorsqu'une charge électrique ou un circuit électrique, sont dans un champ magnétique, c'est comme s'ils étaient sur un manège. Bien sûr, tu ne vois pas ce manège, et important : ce manège ne s'applique pas aux masses comme celui des expériences de pensée précédentes, mais aux charges électriques. Pour le reste, tu vas voir, ils sont très semblables.

Lorsque tu fais bouger un aimant au cours du temps, tu fais varier le champ magnétique créé par cet aimant. C'est comme si tu faisais varier la vitesse du manège, c'est comme si les charges électriques (ou le circuit électrique) étaient sur un manège dont la vitesse de rotation varie, c'est comme si elles étaient soumises à une force d'entrainement due à la variation de vitesse de rotation du manège.
Cela induit, ce qu'on appelle en Physique, un champ électromoteur, qui intégré le long du circuit électrique, donne une force électromotrice et donc l'apparition d'un courant électrique dans ce circuit. En Physique, on appelle cela le cas de Neumann de l'induction électromagnétique. Je te donne son équation : $q\vec{O}M \wedge \frac{d\vec{B}}{2dt}$. Tu vois que cette équation ressemble à $m\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O}M$.

Lorsque tu fais bouger un circuit électrique dans un champ magnétique (constant), c'est comme si les charges électriques bougeaient sur un manège, c'est comme si elles étaient soumises à une force de Coriolis. Cela induit un champ électromoteur, qui intégré le long du circuit électrique, donne une force électromotrice et donc l'apparition d'un courant électrique dans ce circuit. En Physique, on appelle cela le cas de Lorentz de l'induction électromagnétique. Je te donne son équation : $q\vec{v}_r \wedge \vec{B}$. Tu vois que cette équation ressemble à $m\vec{v}_r \wedge 2\vec{\Omega}$.

Ce que tu dois bien comprendre, c'est que l'analogue de ce qui génère le courant électrique dans un circuit, ce n'est pas la vitesse de rotation du manège, mais dans le cas de Neumann : les variations dans le Temps de la vitesse de rotation du manège, et dans le cas de Lorentz : l'existence d'une vitesse relative (du circuit électrique) sur le manège en rotation.

Comprendre intuitivement la force gravitationnelle et la force électrique, analogie entre Espace et Temps

L'avancée fondamentale de la Physique du 20ème siècle, c'est sans doute d'avoir compris que le Temps (en fait, un Temps sous sa forme complexe *it*) est une dimension identique aux 3 dimensions de l'Espace *x, y* et *z*. La physique du 20ème siècle a pu ainsi introduire les notions d'Espace-Temps à 4 dimensions, de quadrivecteurs, etc.
Pourquoi le Temps en Physique est-il ainsi ? Cela reste un grand mystère. Quoiqu'il en soit, cela permet de définir mathématiquement une rotation dans un plan spatiotemporel *x, it*, en analogie totale avec une rotation dans un plan spatial *x, y*.

Cela permet de proposer dans cet essai que champ gravitationnel (ou plutôt ce qu'on appelle champ vecteur d'onde) et champ électrique sont des rotations « généralisées » dans des plans spatiotemporels.
Cela permet de proposer que force gravitationnelle et force électrique sont comme des analogues *dans le Temps* de la force de Coriolis (qui elle, s'appuie sur une rotation *dans l'Espace)*, c'est-à-dire des forces d'inertie à ajouter lorsqu'on se place dans le référentiel où on annule la vitesse de rotation « généralisée » du manège « spatiotemporel » et où on se « déplace temporellement » sur ce manège spatiotemporel.
Ce « déplacement temporel » sur le manège spatiotemporel te semblera sans doute étonnant, puisqu'il ne s'agit pas d'une vitesse (ou d'un écoulement du Temps), mais d'une masse dans le cas de la force gravitationnelle et d'une charge électrique dans le cas de la force électrique. Je te donne leurs équations proposées dans cet essai : $\vec{m}^t \wedge \overrightarrow{Gr}$ et $\vec{q}^t \wedge \overrightarrow{El}$. Tu vois que ces équations ressemblent aussi à $\vec{v}_r \wedge 2\vec{\Omega}$.

Confidences bibliographiques, hommage à A. Einstein et L. de Broglie

« To study any question, it is always better to read the original Memoirs, because one is better able to assimilate a nascent science »
« Pour étudier n'importe quelle question, il est toujours préférable de lire les Mémoires originaux, car on est mieux à même d'assimiler une science naissante »
James Clerk Maxwell dans *A treatise on electricity and magnetism*

Mon questionnement initial sur la gravitation et le l'électricité vient de mes années lycée. Comment expliquer les fortes ressemblances mathématiques entre les lois de l'électricité et celles de la gravitation ? A l'inverse, comment expliquer que gravitation et électricité, malgré leurs similitudes, se distinguent finalement autant l'une de l'autre ?
Durant mes années d'études supérieures, j'ai acquis les bases de la physique classique : la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme du 19ème siècle. J'ai toutefois assez peu étudié la physique du 20ème siècle, effleuré la Relativité restreinte et l'équation de Schrödinger. Je ne connaissais alors rien ou très peu des grandes problématiques et controverses historiques de la physique.

Quelques années après la fin de mes études d'ingénieur en électricité, je me suis particulièrement intéressé à la physique théorique. Cela se fit via un cours de ma femme (qui est professeur de physique) portant sur les expériences d'Albert Abraham Michelson. Ces expériences concluaient que la vitesse de la lumière était toujours mesurée égale à c, quelle que soit la vitesse de l'expérimentateur, contraire donc au principe de relativité galiléenne.
Pour tout dire, je me rappelais vaguement qu'A. Einstein avait proposé une solution à ce paradoxe, mais je ne me rappelais plus laquelle dans le détail. J'avais autrefois parcouru quelques livres universitaires reproduisant les théories d'A. Einstein, sans que cela ait éveillé en moi une grande curiosité. J'ai alors souhaité lire les œuvres originelles d'A. Einstein. Comme beaucoup, j'ai été émerveillé par ses idées si élégantes, par son style comparable à un auteur de romans policiers, par les questions si originales qu'il posait et par les réponses si élégantes qu'il proposait.
Dans ses écrits scientifiques, A. Einstein part fréquemment de grands principes qu'il pose comme objectifs. Il les conjugue avec les découvertes expérimentales de son époque et en déduit des conséquences souvent très audacieuses. Par exemple, dans son article de 1905 sur la Relativité restreinte, il s'interroge sur la mesure de la simultanéité de deux phénomènes, remet ensuite en question la notion même de Temps, et parvient à concilier principe de relativité et vitesse constante de la lumière dans les expériences de Michelson.

Sur les pas d'A. Einstein, je me suis mis à rêver d'une vaste théorie physique qui unifierait toutes les forces. L'univers est un, les lois de la gravitation et de l'électricité se ressemblent. Après tout, il semble logique de vouloir les unifier dans une vaste théorie.
Les théories des champs d'A. Einstein qui visaient à unifier la force gravitationnelle aux forces électromagnétique s'intéressaient aux changements de référentiels et aux forces d'inertie. En particulier, A. Einstein ne se satisfaisait pas de l'existence dans la théorie newtonienne de deux types de forces : des forces réelles et des pseudo-forces dites d'inertie que l'on ajoute lorsqu'on passe à un référentiel non galiléen. Pour lever cette contradiction, il a imaginé de rapprocher toute force d'une force d'inertie.
Les idées d'A. Einstein n'ont pas abouti concrètement sur une théorie des champs alliant gravitation et électricité. De plus, elles n'ont pas inclus les interactions nucléaires découvertes au cours du 20ème siècle. Cependant, elles ont eu une vaste descendance. Elles ont inspiré des générations de physiciens, induit les théories de Jauge, le Modèle standard des années 1950-1970, le Big-bang et les trous noirs.

Après avoir lu les principaux ouvrages de vulgarisation d'A. Einstein et certains de ses plus célèbres articles, je me suis penché sur la physique quantique que je connaissais encore assez mal. J'ai parcouru quelques ouvrages universitaires particulièrement pointus, souvent très mathématisés. J'avoue ne pas avoir compris de quoi il en retournait.

Je me suis aussi penché sur les origines de la théorie. C'est souvent plus facile à comprendre, car il n'y a pas encore ces scories qui précisent le modèle, mais qui viennent obscurcir les idées originales des pionniers. A l'aide d'ouvrages de premier cycle, j'ai peu à peu compris le modèle de l'électron de N. Bohr, me demandant tout de même pourquoi ces deux forces, électrostatique et centrifuge, intervenaient.

C'est surtout grâce aux ouvrages de L. de Broglie que j'ai commencé à entrevoir ce qu'était la physique quantique, ou plutôt la mécanique ondulatoire. En effet, L. de Broglie insistait dans ses ouvrages davantage sur l'aspect onde que quanta.
L'une des premières idées de L. de Broglie a été de dire : puisque la lumière représentée comme une onde, peut aussi être représentée comme une particule le photon, il peut en être de même pour des particules de matière comme l'électron, à représenter alors comme une onde de matière. La seconde idée a été d'expliquer la quantification de l'énergie par des ondes stationnaires circulaires. Ces idées de L. de Broglie ont été pour moi un véritable déclic dans la compréhension de la physique quantique.

Résumé des idées et conjectures développées dans cet essai

On rappelle ici brièvement les idées développées dans cet essai, classées dans l'ordre où elles interviennent dans les différents mémoires. Elles sont regroupées en 11 grandes idées dont les deux premières sont directement inspirées de celles d'A. Einstein. Les 3 dernières ne sont pas à proprement parlé des hypothèses scientifiques au sens de Karl Popper (c'est-à-dire possiblement falsifiable).
Les 11 idées énoncées ici pourront parfois paraître obscures au lecteur. Pour plus de clarté, il pourra se reporter aux mémoires où elles sont développées (les mémoires sont indiqués entre parenthèses).

Idée 1, reprendre l'idée d'un continuum Espace-Temps et traiter le Temps dans les équations physiques exactement de la même manière que les trois dimensions de l'Espace (mémoire 1)

Nota : pourquoi le Temps est-il complexe ?
Plus précisément, c'est le Temps complexe *it* qui est exactement de même nature qu'une dimension de l'Espace x. En effet, pour calculer la norme d'un quadrivecteur instant position, on a :

$$4X^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$$

Certains physiciens ont cherché à éliminer ce Temps complexe et à réintroduire dans les équations de Physique un Temps réel, postulant que ce n'était qu'une affaire de convention. Cela n'a guère abouti.

Idée 2, faire correspondre toute force à une force d'inertie, c'est-à-dire à une force que l'on ajoute lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen (mémoire 1)

Idée 3, construire toute force sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{cor} = m\vec{v}_r \wedge 2\vec{\Omega}$ (mémoire 2)
Lors d'un changement de référentiels (par exemple passage d'un référentiel galiléen au référentiel d'un manège en rotation $\vec{\Omega}$), on annule d'une part une quantité physique (de type vecteur rotation $\vec{\Omega}$), on conserve d'autre part une quantité physique (de type vitesse relative $\vec{v}_r$, impulsion $m\vec{v}_r$, voire courant ou autre). La force ou l'accélération d'inertie que l'on ajoute lors du changement de référentiels, est perpendiculaire (via un produit vectoriel) à la fois à la quantité conservée et à la quantité annulée. C'est ce qu'on appelle ici le modèle de la force d'inertie de Coriolis.
L'objectif, c'est de construire toute force comme la force électrostatique, la force magnétique de Lorentz, la force gravitationnelle sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis.

Nota
Pour pouvoir appliquer le produit vectoriel, on en restera le plus souvent au cas simple d'un espace à trois dimensions. Celui-ci contiendra soit 3 dimensions de l'Espace, soit 2 dimensions de l'Espace et 1 dimension du Temps avec une dimension temporelle traitée identiquement à celles de l'Espace.

Idée 4, rapprocher la notion de champ et la notion de vecteur rotation « généralisée » annulé lors d'un changement de référentiels (mémoire 2)
On rapproche la notion de champ en physique de la notion de vecteur rotation « généralisée » que l'on annule lors d'un changement de référentiels. La notion de vecteur rotation est prise dans un sens large, puisque le plan de rotation peut être spatial ou spatiotemporel.
Les champs pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ seront qualifiés de type rotation « généralisée » dans un plan *spatial*. Les champs électriques $\vec{El}_{xt}^{1/y}$ et vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$ seront qualifiés de type rotation « généralisée » dans un plan *spatiotemporel*.

Nota 1
$\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ indique que le plan de rotation est x, y et que le vecteur rotation est orienté suivant t. On a l'indice $1/t$ car l'unité de $\vec{\Omega}$ est le rad/s.

Nota 2
On a le champ électrique $El_{tx}^{1/y}$ défini à partir du quadrivecteur potentiel électromagnétique A^{μ} ($\mu = t, x, y, z$), et réorienté pour le construire tel un vecteur rotation :

$$El_{tx}^{1/y} = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

Le champ électrostatique $Es_{tx}^{1/y}$ apparait comme un cas particulier du champ électrique lorsque $\frac{\partial A^x}{\partial t} = 0$:

$$Es_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial A^t}{\partial x}$$

De même, on a le champ vecteur d'onde $K_{tx}^{1/y}$ défini à partir du potentiel vitesse V^x et du potentiel newtonien V^t :

$$2c^2 K_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}$$

Le champ gravitationnel newtonien $Gr_{tx}^{1/y}$ apparait comme un cas particulier du champ vecteur d'onde lorsque $\frac{\partial V^x}{\partial t} = 0$:

$$Gr_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial V^t}{\partial x}$$

Même si le vecteur rotation (au sens large) et le champ sont des notions associées, on distinguera l'un et l'autre en présentant :
- le vecteur rotation comme le mouvement existant avant le changement de référentiels,
- le champ comme la quantité annulée après le changement de référentiels.

Le champ sera donc le vecteur rotation annulé après le changement de référentiels.

Idée 5, qu'est-ce qui distingue une accélération d'inertie d'une force d'inertie ? (mémoire 2)
Une accélération d'inertie (de type centrifuge ou de Coriolis) se distingue d'une force d'inertie par le fait que :
- lorsqu'une accélération d'inertie doit être ajoutée lors d'un changement de référentiels, ce qui est annulé, c'est un vecteur rotation « généralisée » dans un *plan spatial* (vecteur rotation associé à un champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$),
- lorsqu'une force d'inertie doit être ajoutée lors d'un changement de référentiels, ce qui est annulé, c'est un vecteur rotation « généralisée » dans un *plan spatiotemporel* (vecteur rotation associé à un champ électrique $\vec{El}_{xt}^{1/y}$ou à un champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$).

Idée 6, à partir des équations sources champs de Maxwell, retrouver une vitesse semblable à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$, et faisant intervenir les champs $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ et $\vec{El}_{xt}^{1/y}$ (mémoire 3)
Dans sa thèse de 1924, L. de Broglie représente la particule électron comme un paquet d'ondes avec une vitesse de phase $v_{\phi} = \frac{\Omega}{K}$ et une vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$. Il assimile la vitesse v de la particule électron (intervenant classiquement dans la mécanique newtonienne) à la vitesse de groupe v_g du paquet d'ondes électron.

Dans cet essai, on propose de rapprocher les champs $\vec{\Omega}$ de $\vec{B}$ (tous deux vecteurs rotations « généralisée » dans un plan spatial), ainsi que les champs $\vec{K}$ de $\vec{El}$ (tous deux vecteurs rotations « généralisée » dans un plan spatiotemporel). S'inspirant des idées de L. de Broglie, on cherche à

définir une vitesse de groupe d'une charge électrique en mouvement (analogue à la vitesse de groupe d'une masse en mouvement de la mécanique newtonienne), et faisant intervenir les champs $\vec{B}$ et $\vec{El}$.

On constate qu'on trouve une équation de ce type en utilisant les équations de Maxwell Ampère et de Maxwell Gauss.

On réécrit Maxwell Ampère (sans courant de déplacement, et sans champ électrique) sous la forme :

$$\mu_0 \vec{j}_{xt}^{y} = \mu_0 q^t \ \vec{v}_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

On réécrit Maxwell Gauss (avec un seul champ électrique) sous la forme :

$$\frac{\vec{q}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{El}_{xt}^{1/y}}{\partial x}$$

En divisant Maxwell Ampère par Maxwell Gauss, on retrouve une formule entre une vitesse (ici celle des charges électriques), le champ $B_{xy}^{1/t}$ et le champ $El_{xt}^{1/y}$, semblable à une vitesse de groupe :

$$\mu_0 \varepsilon_0 v_{xt}^{y} = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

On a :

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

On obtient :

$$v_{xt}^{y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

une équation très semblable à la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes.

Idée 7, des équations sources champs pour la gravitation, analogues à celles de l'électromagnétisme, faisant intervenir les champs $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et $\vec{K}_{xt}^{1/y}$ (mémoire 3)

On note qu'à partir des équations sources champs de Maxwell faisant intervenir les champs $\vec{El}_{yt}^{1/x}$ et $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, il est possible de retrouver une équation semblable à la vitesse de groupe. On note également que $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et $\vec{K}_{xt}^{1/y}$ interviennent eux-mêmes dans l'expression de la vitesse de groupe. Dans ce cas, on se demande s'il n'existe pas des équation sources champs pour $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et $\vec{K}_{xt}^{1/y}$, semblables aux équations sources champs de Maxwell ?

Suite à la réorientation du champ électrique $\vec{El}_{yt}^{1/x}$, on ne peut plus utiliser telle quelle l'équation de Maxwell Gauss. Puisqu'on a cherché à construire une force électrique sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis ou de la force magnétique de Lorentz, on constate que pour les deux équations sources champs de Maxwell (Gauss et Ampère), il faut utiliser le théorème d'Ampère.
De même, les équations sources champs faisant intervenir $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et $\vec{K}_{xt}^{1/y}$, doivent utiliser le théorème d'Ampère.

Suivant une analogie entre électromagnétisme et gravitation, entre Temps et Espace, on substitue la densité de charge électrique par la densité de masse, la densité de courant par la densité d'impulsion.

Idée 8, rapprocher certaines équations sources champs d'un nombre quantique qualifié de source champ, d'une particule médiatrice porteuse du nombre quantique source champ, du déplacement d'un fermion chargé et d'une interaction (mémoire 5)

On note que l'équation source champ de Broglie $\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \frac{\partial \vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}\ \vec{p}^x = \hbar \vec{K}^{1/x}_{ty}$ est associée à la quantification du moment cinétique orbital σ et du moment cinétique de spin S.

On a par exemple la quantification suivante postulée par N. Bohr dans son modèle d'électron :

$$\sigma = n\hbar = \frac{np}{k}$$

On propose alors d'associer à l'équation source champ de Broglie :

- un moment cinétique orbital et de spin, que l'on résumera abusivement par le spin,
- un photon γ porteur de spin entier,
- un fermion chargé électriquement, porteur d'un spin demi-entier qui interagit avec le photon,
- des réactions entre particules : la transition hyperfine ou la transition énergétique, c'est-à-dire un échange de spin entre le photon et le fermion, une disparition (ou apparition) du photon, un déplacement du fermion chargé électriquement et un courant électrique,
- l'interaction électromagnétique.

L'objectif recherché tout au long du mémoire 5, c'est d'associer à trois autres équations sources champs, un nombre quantique source champ, une particule médiatrice, un déplacement de charge et une interaction.

Idée 9, distinguer le Temps de la physique (à 2 sens et semblable à une dimension spatiale) du Temps ressenti, par le fait que le second est une caractéristique de la Vie (mémoire 6)

On propose de caractériser Vie, par le fait qu'elle avancerait continument dans l'une des 4 dimensions de l'Espace-Temps, créant ainsi une distinction entre le Temps (là où la Vie avance continument) et les 3 dimensions de l'Espace. Le Temps orienté, qualifié de biologique, contiendrait le précieux principe de causalité et permettrait la constitution d'une Histoire.

Idée 10, tout phénomène à priori physique à Temps orienté (Temps biologique) serait en fait un phénomène biologique (mémoire 6)

Le Big-bang, dont la théorie possède un Temps orienté, serait en fait un phénomène biologique. Il correspondrait au début de la Vie, c'est-à-dire à l'instant où la Vie a eu le désir d'avancer continument dans un seul sens.

Idée 11, la vitesse de la lumière toujours mesurée constante quel que soit le mouvement de l'observateur, serait en fait une caractéristique de l'avancée identique dans le Temps des êtres humains vivant ensemble (mémoire 6)

Synthèse sur les 6 mémoires

L'essai a été découpé en 6 mémoires, au départ pour des raisons pratiques, car l'éditeur d'équations que j'utilisais buggait à partir d'une quantité trop importante d'équations. J'ai donc dû segmenter l'essai en mémoires, chaque mémoire évoluant peu à peu et pouvant être rattaché finalement à une question fondamentale.

Le **1er mémoire** s'intéresse à l'un des objectifs principaux de l'œuvre d'A. Einstein, celui d'une **invariance** des Lois de la Nature quelle que soit la **transformation**, quitte à ajouter de nouveaux termes dans l'écriture de la Loi (par exemple l'ajout de forces d'inertie dans le principe fondamental de la dynamique de Newton lors d'une transformation de type changement de référentiels). Au cours du mémoire, on rappelle que l'objectif original d'A. Einstein d'une invariance des Lois de la Nature, qui s'appliquait au départ aux changements de référentiels, a pu être étendu, dans la Physique quantique, aux transformations dites de Jauge.

Le **2ème mémoire** part d'un paradoxe de la mécanique newtonienne souligné notamment par A. Einstein, l'existence à priori dérangeante et sans explications de 2 types de forces : des forces « normales » et des forces d'inertie souvent qualifiées de pseudo forces.
Soulignant les ressemblances entre gravitation et électromagnétisme, entre force de Coriolis et force magnétique de Lorentz, on cherche dans ce mémoire à résoudre le paradoxe en proposant que toute force « normale » puisse se ramener à une force d'inertie. Cette force d'inertie serait à ajouter dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, lors d'une transformation de type changement de référentiels « généralisé », c'est-à-dire lors de l'annulation d'une « rotation généralisée », concept visant à étendre la notion de rotation d'un plan spatial à un « plan spatiotemporel ».

Dans le **3ème mémoire**, on s'intéresse aux équations sources champs de Maxwell : Maxwell Ampère et Maxwell Gauss, en particulier au pourquoi d'une relation entre quelque chose de ponctuel : la source et quelque chose d'étendu : le champ. Constatant que le rapport entre Maxwell Ampère et Maxwell Gauss donne une sorte de vitesse de groupe $v_g = \frac{d\Omega}{dK}$, on cherche l'analogue pour la gravitation des équations de Maxwell sources champs, en remplaçant le champ magnétique par un « champ pulsation » Ω et le champ électrique par un « champ vecteur d'onde » K. Les hypothèses initiales de l'édifice sont vérifiées, avec une clé de voûte qui s'ajuste parfaitement, lorsque le rapport entre Ampère gravitation (en fait le principe fondamental de la dynamique de Newton) et Gauss gravitation permet de retrouver $v_g = \frac{d\Omega}{dK}$ à la condition connue sur la longueur de Planck.

Le **4ème mémoire** se veut un exposé chronologique de la physique du 20ème siècle, axé surtout sur la physique des particules, les interactions électromagnétiques, faibles et fortes (les interactions fortes et les quarks étant également traités en complément au début du 5ème mémoire). Dans ce mémoire, on montre que dans la seconde moitié du 20ème siècle, les théories sur les interactions fortes et faibles se sont mutuellement et bénéfiquement influencées, un peu comme l'avaient fait les théories sur la gravitation, l'électrostatique et le magnétisme dans la première moitié du 19ème siècle. Plusieurs focus sont également effectués sur le concept d'isospin, qui de manière surprenante, joue 3 rôles différents : celui de charge nucléaire forte, celui de charge nucléaire faible et celui d'un analogue (mathématique) du spin.

Le **5ème mémoire** est à nouveau spéculatif et est peut-être le plus fragile dans ses hypothèses et propositions. Il commence par un exposé des théories sur l'interaction forte énoncées dans les années 1950 et 1960, il peut être alors vu comme une suite du 4ème mémoire qui finissait par un exposé du Modèle électrofaible.
Par la suite, le 5ème mémoire tente surtout d'esquisser une synthèse des différentes interactions. Pour cela, il suggère un pont entre les équations sources champs proposées dans le 3ème mémoire et certaines interactions. La recherche d'une synthèse des interactions passe par la recherche d'analogies entre les interactions, d'abord des analogies entre interactions nucléaires forte et faible à courte portée,

entre interactions gravitationnelle et électromagnétique à portée infinie, ensuite des analogies entre toutes les interactions.

Dans les 2ème et 3ème mémoires, on s'intéresse aux analogies entre gravitation et électromagnétisme. On souligne que si les pionniers se sont surtout inspirés des analogies entre gravitation et électromagnétique (ou plutôt électrostatique), par la suite, lorsque des théories plus raffinées sont apparues, les « continuateurs » ont plutôt insisté sur les différences entre gravitation et électromagnétisme. Cela a d'ailleurs amené certains physiciens, comme A. Einstein, à souligner que certaines ressemblances ne le sont que superficiellement, que lorsqu'on creuse davantage, des différences notables et irréductibles, entre gravitation et électromagnétique, apparaissent. Dans les 2ème et 3ème mémoires, on cherche en revanche à revenir à « l'esprit » des pionniers, à montrer que si on pousse davantage les analogies, ces différences se réduisent.
Pour les interactions forte et faible, l'histoire est comparable : les pionniers n'ont même pas vu au départ l'existence de 2 types d'interactions nucléaires, puis les théories sur les interactions forte et faible se sont souvent inspirées l'une et l'autre, enfin les « continuateurs » ont surtout insisté sur leurs différences. Pour unifier interactions faible et forte, on revient dans le 5ème mémoire aux propositions des pionniers et on s'appuie, comme ils l'avaient fait, sur leurs ressemblances.

Le **6ème mémoire** s'intéresse au paradoxe d'un « Temps physique » t, qui lors du passage à sa forme complexe it, est traité dans les équations de la Physique, de la même façon que les 3 dimensions de l'Espace, et d'un Temps ressenti (ou Temps psychologique), qui lui nous apparait lui fort différent de l'Espace. Ce dernier mémoire est à nouveau très spéculatif, les propositions et arguments avancés ne se prétendent pas proprement scientifiques au sens de K. Popper, c'est-à-dire falsifiables. Par exemple, il est proposé que les concepts de Big-bang, de trou noir et d'entropie seraient plus à rattacher à la Biologie qu'à la Physique…

Table des matières

Mémoire 1 Changements de référentiels et transformations de Jauge locale

Résumé du mémoire
Dans ce 1er mémoire, on s'intéressera aux changements de référentiels et aux forces d'inertie, ainsi qu'aux transformations de Jauge locale et aux énergies impulsions d'interaction.
Le point de départ sera l'interrogation suivante d'A. Einstein. Pourquoi en physique classique existe-t-il deux types de forces : des forces « normales » et des forces d'inertie (parfois appelées pseudo forces) ? On tentera de répondre à cette interrogation en assimilant toute force à une force d'inertie.

L'étude des forces d'inertie sera aussi l'occasion d'étudier le modèle de l'électron de Bohr. Modèle proposé en 1913 par Niels Bohr et qui fait intervenir la force d'inertie centrifuge et la force électrostatique.
A travers les notions d'invariances et de transformations de Jauge introduites en 1918 par Henry Weyl, invariances de Jauge que l'on peut rapprocher d'une conservation des Lois de la Nature, transformations de Jauge que l'on peut rapprocher des changements de référentiels, on étudiera les équations d'onde d'E. Schrödinger (1925), de Wolfgang Pauli (1927) et de Paul Dirac (1928). Ainsi seront abordées les principales fonctions d'onde de la Physique quantique des années 1920.

Chapitre I Pourquoi faire correspondre toute force « normale » à une force d'inertie ?

Objet du chapitre
En mécanique newtonienne, les lois de la Nature sont fonctions du choix d'un premier référentiel considéré comme galiléen. Pourtant, ce choix apparait comme à priori puisqu'un référentiel galiléen est défini comme un référentiel dans lequel la 1ère loi de Newton est vérifiée. C'est-à-dire dans lequel le principe d'inertie est vérifié : tendance d'un corps à conserver sa vitesse en l'absence d'influence extérieure. Il y a donc une certaine circularité dans le choix d'un référentiel galiléen.

C'est ce paradoxe que souligne A. Einstein dans son ouvrage *La relativité* (1ère édition en 1916) vis-à-vis de la mécanique newtonienne. Il indique que suivant le choix du premier référentiel galiléen, les lois de la Nature sont très différentes. En effet, dans le principe fondamental de la dynamique de Newton (2ème loi de Newton) $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$, il faut ajouter (ou pas) des forces d'inertie suivant le référentiel où l'on se positionne.
Pour échapper à cette contradiction, A. Einstein propose l'étonnant objectif de faire correspondre toute force « normale » à une force d'inertie. On revient ici sur les principales étapes de sa réflexion.

I.1 Rappel historique sur la marche des idées, A. Einstein, H. Weyl, Chen Ning Yang et Robert Mill, transformation, invariance et ajout de « quantités d'inertie »

I.1.1 A. Einstein, le grand rêve d'une théorie unifiée des champs et la gravitation

Dans les années 1910-1920, le grand rêve d'A. Einstein est d'unifier les forces électrique et magnétique avec la force gravitationnelle dans une vaste théorie des champs. Dans ses recherches d'unification, A. Einstein avance quelques grandes idées, se fixant des principes majeurs.

L'un des grandes idées d'A. Einstein est de rapprocher la notion de déformations de l'Espace-Temps de celle de potentiel gravitationnel newtonien V^t. Dans la théorie de la Relativité Générale, A. Einstein décrit les déformations de l'Espace-Temps à l'aide d'un tenseur (sorte de matrice à 4×4 dimensions) correspondant aux dérivées secondes du potentiel gravitationnel V^t. Il s'inspire ensuite de l'équation source potentiel de Poisson (appliquée à la gravitation avec ρ la densité de masse) : $\nabla^2 V^t = 4\pi G\rho$ pour relier tenseur des déformations de l'Espace-Temps et quadrivecteur énergie impulsion. Il propose ainsi une équation appliquée au champ gravitationnel.
On reviendra ultérieurement sur cette équation, lorsqu'on se penchera sur la théorie du Big-bang dans le 6ème mémoire.

L'un des principes majeurs fixés par A. Einstein est certainement le principe de relativité : les lois de la Nature doivent être respectées (c'est-à-dire elles doivent être invariantes) quel que soit le choix du référentiel. Pour obtenir ce principe, A. Einstein cherche à rapprocher toute force « normale » d'une force d'inertie.
Par exemple, il postule le champ gravitationnel comme localement équivalent à une accélération. Ainsi, il peut interpréter le champ gravitationnel comme une « quantité d'inertie » que l'on ajoute lorsqu'on passe d'un référentiel immobile à un référentiel en accélération par rapport au premier. Nous y reviendrons dans un prochain paragraphe.
Suivant le principe de Relativité, A. Einstein parvient dans la théorie de la Relativité générale à décrire la gravitation. Néanmoins, il ne prend en compte ni l'électromagnétisme, ni les interactions nucléaires, dont les premiers modèles se développent dans les années 1930.

I.1.2 H. Weyl, transformation de Jauge locale et électromagnétisme

Dans les années 1920, le mathématicien H. Weyl reprend l'idée d'A. Einstein de rapprocher toute force « normale » d'une force d'inertie pour rendre invariantes les grandes lois de la Nature. Il s'intéresse à l'électromagnétisme, à l'invariance des équations de Maxwell, et imagine la notion de transformation de Jauge qui laisse invariante les équations de Maxwell.

Suivant les idées de H. Weyl, une transformation de Jauge locale est une transformation locale des propriétés géométrique de l'Espace-Temps. On peut aussi l'interpréter au sens large, comme un changement de référentiels avec annulation (ou ajout) de mouvements.

On a la dérivée partielle :

$$f(x + dx) - f(x) = \partial^\mu f(x) dx_\mu$$

Si l'unité de mesure (la Jauge) varie d'un point à l'autre, la dérivée partielle est corrigée par un facteur S^μ. On a alors pour la dérivée partielle après une transformation de Jauge :

$$f(x + dx) - f(x) = (\partial^\mu + S^\mu) f(x) dx_\mu + \theta(dx^2)$$

H. Weyl tente de faire correspondre S^μ avec le quadrivecteur potentiel électromagnétique A^μ ($\mu = t, x, y, z$). En 1929, il trouve une solution satisfaisante à ce problème, en observant l'équivalence entre l'écriture classique $p^\mu - eA^\mu$ et son écriture quantique $i(\partial^\mu + ieA^\mu)$.

$$p^\mu - eA^\mu \Leftrightarrow i(\partial^\mu + ieA^\mu)$$

Il rapproche alors le facteur S^μ du quadrivecteur énergie impulsion potentielle ieA^μ.

Ce quadrivecteur énergie impulsion potentielle ieA^μ peut s'interpréter comme une « quantité d'inertie » que l'on ajoute lors d'une transformation de Jauge locale, afin de rendre invariantes les grandes lois de la Nature.

Nota, rappels sur l'énergie potentielle généralisée électromagnétique
En électromagnétisme, on définit une énergie potentielle généralisée électromagnétique, qu'on appelle aussi énergie d'interaction électromagnétique :

$$Ep = q(A^t - (\vec{v}^a \cdot \vec{A}^a)$$
$$(a = x, y, z)$$

A partir de cette énergie potentielle généralisée électromagnétique, en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange, il est possible de retrouver la force électromagnétique. On détaillera cela dans le mémoire 2.

En Electrodynamique quantique relativiste, l'ajout du quadrivecteur énergie impulsion potentielle ieA^μ lors d'une transformation de Jauge locale, permet d'obtenir un Lagrangien incluant l'énergie potentielle généralisée électromagnétique.

Ainsi, en quelque sorte, on peut interpréter la force électromagnétique dérivant d'une « quantité d'inertie » ieA^μ que l'on ajoute lors d'une transformation de Jauge locale, afin de laisser invariante les grandes lois de la Nature. On reviendra sur cela dans ce mémoire et les suivants.

I.1.3 Les théories de Jauge locale de C. N. Yang et R. Mill sur les interactions nucléaires

Les idées de H. Weyl sont reprises et adaptées en 1954 par C. N. Yang et R. Mill dans une théorie de Jauge locale qui décrit l'interaction nucléaire forte entre protons et neutrons.
C. N. Yang et R. Mill utilisent des transformations de Jauge locale qui appartiennent aux groupes de rotations $SU(n)$. Dans leur modèle, suite à une transformation de Jauge locale de $SU(2)$, il apparait dans le Lagrangien des énergies d'interaction, qui permettent de retrouver l'interaction nucléaire forte. On y reviendra dans le 4ème mémoire.

Dans les années 1960, les idées de C. N. Yang et R. Mill sont incorporées dans le Modèle standard pour décrire les interactions nucléaires forte et faible. En quelque sorte, une nouvelle fois, on apparente des forces ou des interactions (en l'occurrence nucléaires) à des « quantités d'inertie » que l'on ajoute lors de transformations de Jauge locale, cela afin de conserver les grandes lois de la Nature.

Après ce rappel sur la marche des idées, revenons maintenant aux idées initiales d'A. Einstein.

I.2 Pourquoi existe-t-il des référentiels privilégiés (dit galiléens) en mécanique newtonienne ?

I.2.1 Le principe recherché par A. Einstein

« Tous les corps de références, quel que soit leur état de mouvement, sont équivalents pour la description de la nature (formulation des lois générales de la nature). »

« Comment est-il possible que certains corps de référence (ou leurs états de mouvement) se distinguent d'autres corps de référence (ou leurs états de mouvement) ? Quelle est la raison de cette préférence ? »

« L'objection est surtout importante quand l'état de mouvement du corps de référence est tel qu'il n'a besoin pour son maintien d'aucune action extérieure, par exemple dans le cas où le corps de référence effectue un mouvement de rotation uniforme. »

Telles sont quelques phrases d'A. Einstein reprenant certaines idées d'Ernst Mach, extraites de son ouvrage *La relativité*.
C'est d'ailleurs ce qui peut plaire (ou déplaire) dans l'approche scientifique d'A. Einstein, une approche non pas initialement fondée sur l'empirisme, mais sur des grands principes qu'A. Einstein va ensuite à relier à des observations et à des expériences.

Dans la deuxième partie de *La relativité*, A Einstein explique pourquoi suivant un principe de relativité *générale*, il cherche à rapprocher toute force « normale » d'une force d'inertie.

En mécanique newtonienne, lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen ou inertiel (en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un premier référentiel galiléen), à un référentiel non galiléen, par exemple en rotation $\vec{\Omega}$ par rapport au premier référentiel galiléen (changement de référentiels semblable à l'annulation d'un mouvement : le vecteur rotation $\vec{\Omega}$), il est nécessaire d'ajouter des forces d'inertie dans le principe fondamental de la dynamique de Newton.

Ces forces d'inertie peuvent apparaître artificielles par rapport aux forces « normales » types forces gravitationnelles, électriques ou autres. Surtout lorsqu'on constate que le choix du premier référentiel galiléen, celui par rapport auquel on définit tous les autres référentiels, est un choix à priori.
Après tout, pourquoi ne pas choisir comme premier référentiel de référence, celui justement en rotation ? Dans ce cas, on pourrait supprimer les forces d'inertie que l'on ajoute lorsqu'on passe à ce référentiel.

La question fondamentale est donc la suivante : pourquoi cette différence dans la formulation des lois physiques puisque le choix d'un premier référentiel galiléen est un choix à priori ?

Nota sur la définition d'un référentiel galiléen
Un référentiel galiléen est usuellement défini comme un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. Certains physiciens ont aussi coutume de définir un référentiel galiléen comme un référentiel dans lequel le principe fondamental de la dynamique de Newton s'applique, sans avoir de forces d'inertie à ajouter.

I.2.2 Rattacher toute force « normale » à une force d'inertie

Pour conserver l'invariance des lois générales de la Nature, A. Einstein a une idée des plus originales. Il cherche à montrer que toute force « normale » puisse se rattacher à une force d'inertie. A l'instar d'une force d'inertie, une force « normale » serait introduite dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, lorsqu'on effectue un changement de référentiels (changement correspondant

le plus souvent à l'annulation d'un mouvement). C'est-à-dire que toute force, qu'elle soit d'inertie ou « normale », serait introduite dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, afin de *corriger l'annulation d'un mouvement*.

Ainsi, A. Einstein compense le choix à priori du premier référentiel galiléen et l'ajout des forces d'inertie qui en découle pour les référentiels non galiléens, par le fait que toute force à introduire dans le principe fondamental de la dynamique de Newton (que le référentiel soit galiléen ou non) soit elle-même rapprochée d'une force d'inertie.
Du même coup, A. Einstein annule la distinction artificielle entre forces « normales » et forces d'inertie.

I.2.3 Le cas du champ gravitationnel, égalité entre masse pesante et masse inertielle

Dans sa réflexion, A. Einstein étudie d'abord le champ gravitationnel. Il s'intéresse à l'égalité entre masse pesante et masse inertielle.
La masse pesante intervient dans l'expression de la force gravitationnelle : plus la masse pesante d'un corps est importante, plus le corps va subir une force gravitationnelle. La masse inertielle est associée à l'accélération dans le principe fondamental de la dynamique de Newton : plus la masse inertielle d'un corps est importante, plus son accélération aura une résistance importante face aux forces qui s'appliquent à lui.
A priori, ces deux masses ne désignent pas la même notion physique. Pourtant, on les égalise toujours dans les équations physiques. On peut alors obtenir un champ gravitationnel égal à une accélération.

En quelque sorte, au choix à priori d'un référentiel galiléen :
- décrivant un corps en accélération et soumis à un champ gravitationnel,
- incluant dans le principe fondamental de la dynamique de Newton aucune accélération d'inertie,

A. Einstein substitue un choix tout aussi à priori d'un référentiel non galiléen :
- décrivant un corps immobile (en accélération nulle) et soumis à un champ gravitationnel,
- incluant dans le principe fondamental de la dynamique de Newton une accélération d'inertie équivalente localement à un champ gravitationnel.

Quel que soit le choix du référentiel, il faut finalement prendre en compte la même chose : une accélération ou un champ gravitationnel équivalant localement à une accélération d'inertie.

Par la suite, l'objectif d'A. Einstein est de chercher les changements de référentiels correspondant aux forces autres que gravitationnelles, en particulier les forces de type électrique. Le souci, c'est que le raisonnement précédent n'est pas directement transposable de la gravitation à l'électricité. En effet, dans un champ électrique, l'accélération d'un corps chargé électriquement n'est pas égale au champ électrique mais dépend en plus de sa charge massique. Il n'existe donc pas de changements de référentiels triviaux qui fassent correspondre localement champ électrique et accélération (ou même un autre mouvement).

I.3 Analogie Temps et Espace, peut-on traiter le Temps de la même manière que l'Espace ?

L'idée d'un traitement de la dimension Temps à l'identique des trois dimensions de l'Espace n'est pas à priori liée à la notion de force d'inertie et de changement de référentiels. Il semble néanmoins intéressant de l'évoquer ici, car la notion de changement de référentiel galiléen à référentiel en rotation sera dans le prochain mémoire élargie en rapprochant les notions de Temps et d'Espace.

Dans les écrits d'A. Einstein sur la Relativité, ce traitement identique du Temps et de l'Espace est une idée récurrente. On l'observe par exemple dans la proposition d'un continuum de l'Espace-Temps ou dans des déformations des distances à l'image de celles des durées.

Cette conception du Temps et de l'Espace est d'ailleurs l'un des grands bouleversements de la physique du 20ème siècle. Malgré la difficulté d'accepter intuitivement une ressemblance entre Temps et Espace et d'en trouver des raisons au-delà d'une volonté simplificatrice des modèles d'Univers, A. Einstein et bien d'autres ont constaté que l'analogie entre le Temps et l'Espace était riche de promesses dans la compréhension de l'Univers.

Dans un courrier d'A. Einstein, on relève la lecture lors de ses jeunes années, d'ouvrages de H. Poincaré. On doit en effet à ce dernier les premières analyses rigoureuses d'une ressemblance entre l'Espace et le Temps. C'est en étudiant des problèmes de symétrie et de translation que H. Poincaré s'est aperçu que positions et instants pouvaient jouer des rôles interchangeables dans l'observation du mouvement d'un corps A par un expérimentateur E.

Prenons l'exemple d'une voiture A en mouvement rectiligne uniforme. Si nous modifions la position d'observation de l'expérimentateur E, la voiture A est vue dans une autre configuration, c'est le principe de relativité appliqué à l'Espace.
Si nous modifions les instants de l'expérimentateur E, par exemple des instants postérieurs, la voiture A est aussi vue dans une autre configuration, c'est le principe de relativité appliqué au Temps.
Si l'on modifie la position de E, il est possible de modifier les instants de E, antérieurs ou postérieurs, afin que la voiture A soit toujours observée dans la même configuration. Ainsi, la translation des instants de E vient compenser celle des positions de E, et permet d'observer un mouvement identique.

Nota : pour distinguer la notion d'Espace x, y, z d'un espace mathématique à trois dimensions et pouvant inclure la dimension Temps, par exemple t, x, y, on utilisera dans ces mémoires une majuscule pour le premier (Espace x, y, z), et une minuscule pour le second (espace t, x, y).
On fera de même pour le Temps t, où on utilisera une majuscule.

I.4 Conclusion du chapitre

En résumé, c'est pour répondre à un principe de relativité générale, c'est-à-dire à une invariance dans la formulation des lois générales de Nature, qu'afin de compenser le choix à priori d'un premier référentiel galiléen, l'on cherche ici à assimiler toute force « normale » à une force d'inertie à ajouter lors d'un changement de référentiels de galiléen à non galiléen.

Chapitre II Rappels sur les forces d'inertie en mécanique newtonienne

Objet du chapitre
On évoque d'abord les objectifs fixés par A. Einstein pour les théories de la Relativité restreinte et de la Relativité générale.
On fait ensuite un rappel des forces d'inertie utilisées en mécanique newtonienne dite « générale » : force centrifuge, force de Coriolis et masse fois accélération. On s'intéressera à leurs principales caractéristiques afin de chercher les méthodes qui permettront de faire correspondre toute force « normale » à une force d'inertie.

II.1 Des objectifs de la Relativité restreinte à ceux de la Relativité générale

II.1.1 Sur la transformation de Galilée et sur la transformation de Lorentz, cas de la Relativité restreinte

La transformation de Galilée permet de passer d'un référentiel galiléen R^0 (ou inertiel) à un autre référentiel galiléen $R^{0\prime}$ (également inertiel). Le passage de R^0 à $R^{0\prime}$ laisse invariant l'intervalle d'Espace :

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

Dans ces 2 référentiels galiléens R^0 et $R^{0\prime}$, le principe fondamental de la dynamique est respecté sans qu'il y ait de force d'inertie à ajouter lors du changement de référentiels.

On rappelle la transformée de Galilée :

$$x' = x - vt$$
$$t' = t$$

La transformée de Lorentz proposée par H. Lorentz (en 1904) et corrigée par Henry Poincaré (en 1905) laisse notamment invariante l'équation d'onde d'Alembert $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, les équations de Maxwell ou l'intervalle d'Espace-Temps :

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c\Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c\Delta t'^2$$

Suivant les idées d'A. Einstein exposées dans la théorie de la Relativité restreinte, la transformée de Lorentz correspond au passage dans l'Espace-Temps d'un référentiel galiléen (ou inertiel) R^0 à un autre référentiel galiléen (ou inertiel) $R^{0\prime}$. Que l'on soit dans R^0 ou $R^{0\prime}$, elle permet à la fois :

- de mesurer une même vitesse de la lumière c dans le vide,
- de laisser invariant toutes les lois de la Nature, en particulier le principe fondamentale de la dynamique sans qu'il y ait de forces d'inertie à y ajouter.

On a la transformée de Lorentz :

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$
$$\text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\gamma(x - vt)$$

On note que lorsque $v << c$, $\gamma \approx 1$, on retrouve la transformée de Galilée à partir de la transformée de Lorentz.

II.1.2 Sur les objectifs fixés par les théories de la Relativité restreinte et de la Relativité générale

La Relativité restreinte s'arrête aux changements de référentiels Galiléens de R^0 à $R^{0\prime}$. Le principe fondamental de la dynamique de Newton doit rester invariant lors d'un changement de référentiels, sans avoir à ajouter des forces d'inertie.

A. Einstein fixe des objectifs beaucoup plus ambitieux pour la théorie de la Relativité générale. Celle-ci étudie les changements de référentiels de galiléen à non galiléen de R^0 à R'.
En mécanique newtonienne dite « générale », le principe fondamental de la dynamique de Newton doit rester invariant lors d'un changement de référentiels de R^0 à R', quitte à ajouter des forces d'inertie.

Nota, principale différence entre mécanique newtonienne et einsteinienne
En mécanique newtonienne, on retrouve donc ces notions de restreinte et de générale par l'ajout ou non de forces d'inertie dans le principe fondamental de la dynamique de Newton.

La principale différence entre mécanique newtonienne et mécanique einsteinienne n'est donc pas à aller chercher entre restreint et général, mais dans une extension de l'Espace à l'Espace-Temps.
En mécanique newtonienne dite « restreinte », c'est l'intervalle d'Espace $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ qui est conservé lors du passage de R^0 à $R^{0\prime}$, tous deux référentiels galiléens.
En mécanique einsteinienne dite « restreinte », c'est l'intervalle d'Espace-Temps $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c\Delta t^2$ qui est conservé lors du passage de R^0 à $R^{0\prime}$, tous deux également référentiels galiléens.

II.2 Rappels de quelques invariants par la transformée de Lorentz

On rappelle ici quelques équations invariantes par la transformée de Lorentz, et donc suivant les idées d'A. Einstein, invariantes par changement de référentiels galiléens (ou inertiels) dans le cadre de la Relativité restreinte.

II.2.1 L'intervalle d'Espace-Temps

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c\Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c\Delta t'^2$$

Nota 1 sur la notion de quadrivecteur
Sur le modèle de l'intervalle d'Espace-Temps, en Relativité restreinte, on construit des quadrivecteurs :

- position $(\vec{r}, ct)$,
- vitesse $\gamma(\vec{v}, \mathrm{c})$,
- accélération $(\gamma \frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}), \frac{d}{dt}(\gamma c))$,
- impulsion énergie $(\vec{p} = \gamma m\vec{v}, \frac{E^t}{c} = \frac{\gamma mc^2}{c})$,
- force $\gamma(\vec{f}, \frac{1}{c}\frac{dE^t}{dt})$ ou $\gamma(\vec{f}, \frac{\vec{f}.\vec{v}}{c})$,
- potentiel électromagnétique $(\vec{A}, \frac{\mathrm{A}^t}{c})$,
- densité de courant $(\vec{J}, \rho^t c)$,
- vecteur d'onde $\left(\vec{k}, \frac{\omega^t}{c}\right) = \frac{1}{\hbar}(\vec{p}, \frac{E^t}{c})$

dont la norme est invariante par la transformée de Lorentz :

$$\bar{X}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - {x_4}^2 = {x_1}'^2 + {x_2}'^2 + {x_3}'^2 - {x_4}'^2$$

Ces quadrivecteurs sont conservés par changement de référentiels galiléens (ou inertiels) dans le cadre de la Relativité restreinte.

Nota 2 sur un quadrivecteur champ électromagnétisme ?

Les quantités $\overrightarrow{El}.\vec{B} = \overrightarrow{El'}.\overrightarrow{B'}$ et $\frac{1}{c^2}\overrightarrow{El}.\overrightarrow{El} - \vec{B}.\vec{B} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{El'}.\overrightarrow{El'} - \overrightarrow{B'}.\overrightarrow{B'}$ sont également invariantes par transformée de Lorentz. On pourrait donc imaginer un quadrivecteur champ électromagnétique du type :

$$\left(\frac{\overrightarrow{El}}{c}, B\right)$$

Néanmoins, la nature de B, ici scalaire, reste floue et en Relativité restreinte on définit plutôt un tenseur champ électromagnétique (ou tenseur de Maxwell Faraday) $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$.

II.2.2 L'équation d'onde d'Alembert

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Par transformée de Lorentz, on a également :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$$

Nota

u peut être un scalaire comme dans le cas de l'équation d'onde d'Alembert. Il peut aussi être plus généralement un champ électrique, un champ magnétique, un potentiel scalaire ou vecteur. Il vérifie alors l'équation d'onde :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F$$

II.2.3 Le principe fondamental de la dynamique de Newton

On rappelle le principe fondamental de la dynamique, en mécanique newtonienne restreinte, avec conservation de ce principe par la transformée de Galilée, et donc valable dans tous les référentiels galiléens dans le cadre de la mécanique newtonienne :

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

On rappelle le principe fondamental de la dynamique, en mécanique einsteinienne restreinte (extension de l'Espace à l'Espace-Temps et donc présenté sous forme de quadrivecteur), avec conservation de ce principe par la transformée de Lorentz, et donc valable dans tous les référentiels galiléens (ou inertiels) :

$$\gamma\left[\frac{d\gamma m_0\vec{v}}{dt}, \frac{d\gamma m_0 c}{dt}\right] = \gamma\left[\vec{F}, \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right]$$

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}$ et m_0 la masse au repos du corps étudié par l'observateur.

Ce dernier principe résume à la fois le principe fondamental de la dynamique dans l'Espace : $\frac{d\gamma m_0\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ et l'expression de l'énergie dans le Temps : $E = \gamma m_0$c.

II.3 Généralités sur les forces d'inertie en mécanique newtonienne dite « générale »

II.3.1 Deux stratégies

En mécanique newtonienne, un physicien a deux stratégies à priori équivalentes pour appliquer le principe fondamental de la dynamique de Newton.

Soit la **1ère stratégie** (cas de la mécanique newtonienne dite « restreinte »), il applique ce principe dans un référentiel galiléen R^0. On met ci-dessous à gauche les termes liés au mouvement et à droite les termes de type force :

$$[m(\vec{a})]_{R^0} = \Sigma\left[\vec{F}\right]_{R^0}$$

L'accélération $\vec{a}$ peut par exemple se décomposer en une accélération relative $\vec{a}_r$ et une accélération d'entrainement (ou d'inertie) $\vec{a}_i$. On a :

$$[m(\vec{a})]_{R^0} = [m(\vec{a}_r + \vec{a}_i)]_{R^0} = \Sigma\left[\vec{F}\right]_{R^0}$$

Soit la **2ème stratégie** (cas de la mécanique newtonienne dite « générale »), il applique ce principe dans un référentiel non galiléen R'. Il faut alors ajouter des forces d'inertie $\left[\vec{F}_i\right]_{R'}$.

Par exemple, si $\vec{a}_r$ est l'accélération restante dans le référentiel R', la force d'inertie à ajouter sera :

$$\left[\vec{F}_i\right]_{R'} = -[m\vec{a}_i]_{R'}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique dans R' :

$$[m\vec{a}_r]_{R'} = \left[\vec{F}_i\right]_{R'} + \Sigma\left[\vec{F}\right]_{R'}$$

avec $\left[\vec{F}_i\right]_{R'} = -[m\vec{a}_i]_{R^0}$ et $\Sigma\left[\vec{F}\right]_{R'} = \Sigma\left[\vec{F}\right]_{R^0}$ (la somme des forces est considérée comme restant identique lors du changement de référentiels).

Si le corps étudié est immobile dans R', $\vec{a}_r = \vec{0}$. On applique le principe fondamental de la dynamique, avec à gauche le mouvement nul et à droite les termes de type force :

$$\vec{0} = \left[\vec{F}_i\right]_{R'} + \Sigma\left[\vec{F}\right]_{R'}$$

Tels deux vases communicants, le mouvement est annulé à gauche, et est remplacé par des forces d'inertie à droite.

II.3.2 Trois types de force d'inertie en mécanique newtonienne

On peut distinguer trois types de forces d'inertie en mécanique newtonienne dite « générale ».

Les deux premières se rencontrent dans le cadre des mouvements de rotation. Ce sont la force centrifuge et la force de Coriolis. On les ajoute dans le principe fondamental de la dynamique de Newton lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen R^0 à un référentiel R^Ω où on annule le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

La troisième force d'inertie est de nature différente et n'est d'ailleurs pas toujours interprétée comme une force d'inertie. C'est la masse fois l'accélération d'inertie que l'on ajoute lors d'un changement de référentiels où l'on annule l'accélération (ou une partie de l'accélération) et qui selon le principe d'équivalence d'A. Einstein est équivalente localement à une force gravitationnelle.

Remarques

R1. Notons qu'on suppose implicitement que la masse est une quantité qui se conserve lors des changements de référentiels.

R2. Pour les trois forces, on parle de forces d'inertie, mais on peut tout aussi bien simplement parler d'accélération d'inertie. La masse m apparait en effet comme une quantité à part, car conservée dans les changements de référentiels.

II.4 Equivalence locale entre un champ gravitationnel et une accélération

II.4.1 Expérience de pensée de l'ascenseur

En 1907, A. Einstein a selon ses propres termes « l'idée la plus heureuse de toute » sa « vie ». Germe en lui, l'idée d'une équivalence locale entre un mouvement accéléré et un champ gravitationnel. A. Einstein nomme cette équivalence, le principe d'équivalence, principe implicitement présent dans les travaux de G. Galilée et d'I. Newton.

Dans l'article paru en 1907 *Du principe de relativité et des conséquences tirées de celui-ci*, A. Einstein développe ce principe d'équivalence qui va le conduire quelques années plus tard à la théorie de la Relativité générale.
Dans l'ouvrage *La relativité*, pour expliciter ce principe, A. Einstein prend l'exemple d'un ascenseur plongé dans le vide et transportant un expérimentateur E. Un être extérieur à l'ascenseur tire avec une force constante à l'aide d'une corde accrochée à l'ascenseur, lui communiquant un mouvement uniformément accéléré.

L'expérimentateur E laisse tomber des objets de masse différente, ceux-ci mettent exactement la même durée pour atteindre le plancher de l'ascenseur (l'expérimentateur E réitère l'expérience de G. Galilée du haut de la tour de Pise). L'expérimentateur E connaît la mécanique d'I. Newton, et comme lui, il peut en déduire l'existence d'un champ gravitationnel. En effet, pour l'expérimentateur E dans l'ascenseur, il est impossible de savoir :

- s'il est dans un champ gravitationnel uniforme,
- ou s'il subit un mouvement uniformément accéléré (mouvement que l'on peut annuler par un changement de référentiels adéquat).

II.4.2 Mise en équations de l'expérience de pensée de l'ascenseur

Soit R^0, le référentiel où E est immobile et qu'il considère comme galiléen. Dans R^0, on applique le principe fondamental de la dynamique de Newton pour un corps soumis à une force gravitationnelle (par exemple l'un des objets que laisse tomber l'expérimentateur) :

$$m[\vec{a}]_{R^0} = m\left[\vec{G}r\right]_{R^0}$$

Montrons maintenant que $\vec{G}r$ correspond bien à l'accélération d'inertie $[\vec{a}_i]_{R^a}$ que l'on ajoute dans le principe fondamental de la dynamique, lors du passage au référentiel non galiléen R^a où on annule l'accélération $\vec{a}$.

On applique dans R^a le principe fondamental de la dynamique de Newton (à gauche les termes liés au mouvement $\vec{0} = m[\vec{a}]_{R^a}$, à droite les termes de type force $m\left[\vec{G}r'\right]_{R^a} - m[\vec{a}_i]_{R^a}$) :

$$\vec{0} = m[\vec{a}]_{R^a} = m\left[\vec{G}r'\right]_{R^a} - m[\vec{a}_i]_{R^a}$$
$$\vec{0} = \left[\vec{G}r'\right]_{R^a} - [\vec{a}_i]_{R^a}$$

avec $\vec{G}r'$ le transformé de $\vec{G}r$ lors du passage de R^0 à R^a.

Tels deux vases communicants, le mouvement est annulé à gauche, et est remplacé par une force d'inertie $\left[\vec{F}_i\right]_{R^a} = -m[\vec{a}_i]_{R^a}$ à droite.

On obtient pour les termes de droite :

$$\left[\vec{G}r'\right]_{R^a} = [\vec{a}_i]_{R^a}$$

On suppose que la masse de l'objet et que le champ gravitationnel sont invariants lors du passage de R^0 à R^a. On a donc :

$$[\vec{G}r]_{R^0} = [\vec{G}r']_{R^a} = [\vec{a}_i]_{R^a}$$

Dans R^a, le champ gravitationnel est donc équivalent localement à l'accélération d'inertie que l'on ajoute dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, afin de corriger l'annulation d'un mouvement.

Ce principe d'équivalence locale appelle les **remarques** suivantes.
R1 sur les causes d'un mouvement accéléré et sur l'équation $\vec{G}r = \vec{a}$
Si un champ gravitationnel implique bien toujours une accélération, la cause d'une accélération n'est pas toujours un champ gravitationnel, elle peut être par exemple une accélération d'inertie centrifuge ou un champ électromagnétique.
Ainsi, l'équation $\vec{G}r = \vec{a}$ peut paraître trompeuse, car si le champ gravitationnel $\vec{G}r$ peut toujours être assimilée à une accélération $\vec{a}$, $\vec{a}$ ne peut pas toujours être assimilée à $\vec{G}r$.

On réalise que cette idée, malgré son intérêt, présente quelques faiblesses, notamment l'évacuation du champ électromagnétique.
A. Einstein en fut évidemment conscient et les tentatives de sa réintroduction dans une théorie globale des champs le préoccupèrent toute sa vie.

R2 sur l'objectif de ce mémoire et du prochain
Dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, il y a correspondance entre :
- l'annulation à gauche d'un mouvement,
- l'ajout à droite d'une force d'inertie.

A. Einstein note que :
- l'annulation à gauche d'un mouvement de type accélération uniforme,
- implique l'ajout à droite d'une force d'inertie équivalente localement à la force gravitationnelle.

D'où son idée de faire correspondre toute force « normale » à une force d'inertie que l'on ajoute lorsqu'on annule un mouvement.

C'est également l'objectif suivi dans ce mémoire et dans le prochain. On proposera de faire correspondre :
- l'annulation à gauche d'un « mouvement généralisé »,
- l'ajout à droite de toute force « normale » ou d'inertie.

II.5 Examen des forces d'inertie centrifuge et de Coriolis

II.5.1 Rappels mathématiques sur les forces d'inertie centrifuge et de Coriolis

En 1835, Gustave Coriolis fait paraitre un article intitulé *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*. A l'aide d'une approche énergétique, il développe la notion de forces centrifuges composées. Ces dernières prendront le nom de force de Coriolis.

Pour décrire les forces d'inertie centrifuge et de Coriolis, rappelons maintenant l'approche cinématique, approche aujourd'hui la plus couramment utilisée.

Soit un corps A sur un manège en rotation $\vec{\Omega}$ et possédant sur ce manège une vitesse relative $\vec{v}_r$.

Dans le référentiel R^0 (considéré comme galiléen), on a la vitesse du corps A :

$$[\vec{v}]_{R^0} = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}M$$

Dans le référentiel R^Ω où on annule le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (référentiel R^Ω lui-même en rotation par rapport à R^0), on a la vitesse du corps A :

$$[\vec{v}]_{R^{\Omega}} = \vec{v}_r$$

Nota
Dans le référentiel $R^{\Omega\times v_r}$, où on annule à la fois $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}_r$, le corps A a une vitesse nulle :

$$[\vec{v}]_{R^{\Omega\times v_r}} = \vec{0}$$

Dans le référentiel R^0 , on a l'accélération du corps A :

$$[\vec{a}]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^0} + \vec{\Omega} \wedge \left[\frac{d\vec{O}M}{dt}\right]_{R^0} + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_{R^0} \wedge \vec{O}M$$

On a :

$$\left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^{\Omega}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

Et :

$$\left[\frac{d\vec{O}M}{dt}\right]_{R^0} = [\vec{v}]_{R^0} = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}M$$

On obtient l'accélération du corps A dans R^0 :

$$[\vec{a}]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^0} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_{R^0} \wedge \vec{O}M$$

$$[\vec{a}]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^{\Omega}} + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_{R^0} \wedge \vec{O}M + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

Plaçons-nous dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme $\left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_{R^0} = 0$, on a :

$$[\vec{a}]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^{\Omega}} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$[\vec{a}]_{R^0} = [\vec{a}_r]_{R^{\Omega}} + [\vec{a}_e]_{R^0} + [\vec{a}_c]_{R^0}$$

$\left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^{\Omega}} = [\vec{a}_r]_{R^{\Omega}}$ est l'accélération relative du corps A dans le référentiel R^{Ω}.
$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) = [\vec{a}_e]_{R^0}$ est l'accélération d'entrainement, qui multipliée par une masse correspond à la force d'inertie centrifuge.
$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = [\vec{a}_c]_{R^A}$ est l'accélération de Coriolis (ou accélération complémentaire), qui multipliée par une masse correspond à la force d'inertie de Coriolis.

On a les deux forces d'inertie suivantes à ajouter dans R^{Ω}pour appliquer le principe fondamental de la dynamique :

- la force d'inertie centrifuge

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M})$$

$$\vec{F}_{cent} = mr\Omega^2\vec{n}$$

- la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{F}_{cor} = -m2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = m\vec{v}_r \wedge 2\vec{\Omega} = \vec{p}_r \wedge 2\vec{\Omega}$$

Remarques
R1 Notons que l'accélération de Coriolis est composée de deux termes distincts :

- la dérivée de la vitesse $\left[\frac{d\vec{O}M}{dt}\right]_{R^0}$ multipliée par la rotation $\vec{\Omega}$,
- la dérivée de $\left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$.

R2 Lorsque le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ tend vers 0, on retrouve bien une même dérivée de la vitesse relative :

$$\left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$
$$\left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega} + 0$$

II.5.2 Energie potentielle des forces d'inertie centrifuge et de Coriolis

On rappelle le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$:

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{l}$$

Le travail total le long d'une trajectoire C est égal à :

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{l}$$

Lorsque le travail total d'une force est indépendant de la trajectoire suivie par la particule, on dit que la force est conservative. On définit une énergie potentielle Ep (à une constante près) :

$$Ep = -\int \vec{F}.d\vec{l}$$

La force est alors le gradient (la dérivée par rapport à l'Espace), de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = -gr\vec{a}d(Ep)$$

On a alors :

$$r\vec{o}t\vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{car } \overrightarrow{rot}(gr\vec{a}d) = \vec{0}$$

Nota
La force gravitationnelle et la force électrostatique sont des forces conservatives. La force magnétique de Lorentz n'est pas une force conservative. Néanmoins, on peut la retrouver à partir d'un potentiel généralisé électromagnétique : $A^t - \vec{A}^a.\vec{v}$ $(a = x, y, z)$ via l'équation d'Euler-Lagrange.

Calculons l'énergie potentielle de la force d'inertie centrifuge dans le référentiel R^Ω :

$$\left[\vec{F}_{cent}\right]_{R^\Omega} = mr\Omega^2\vec{n}$$

$$[Ep(\vec{F}_{cent})]_{R^\Omega} = -\int \vec{F}_{cent}.d\vec{l}$$

$$[Ep(\vec{F}_{cent})]_{R^\Omega} = -\int mr\Omega^2\vec{n}.d\vec{r} = -\int mr\Omega^2 dr$$

$$[Ep(\vec{F}_{cent})]_{R^\Omega} = -\frac{1}{2}mr^2\Omega^2 + cst$$

On a la vitesse d'entrainement dans R^0 :

$$v_e = r\Omega$$

On a l'énergie cinétique dans R^0 due au vecteur rotation Ω :

$$[Ec(\Omega)]_{R^0} = \frac{1}{2}mr^2\Omega^2$$

On a donc (à une constante près) :

$$[Ec(\Omega)]_{R^0} = -[Ep(\vec{F}_{cent})]_{R^\Omega}$$

On calcule le travail de la force de Coriolis dans le référentiel R^Ω :

$$[\delta W(\vec{F}_{cor})]_{R^\Omega} = \vec{F}_{cor}.d\vec{l} = 0$$

On a en effet une force de Coriolis perpendiculaire à $\vec{v}_r$, et donc à $d\vec{l}$.

On a pour l'énergie potentielle de la force de Coriolis :

$$[Ep(\vec{F}_{cor})]_{R^\Omega} = cst$$

On prendra généralement une constante nulle.

Remarques
R1 sur le terme potentiel de l'énergie potentielle
Le terme potentiel semble ici particulièrement adapté. En effet, l'énergie potentielle apparait après un changement de référentiels où on annule un mouvement (vecteur rotation $\vec{\Omega}$) et donc de l'énergie cinétique. Cette énergie est potentiellement disponible et transformable en énergie cinétique si on effectue le changement de référentiels inverse.

R2 Comment comprendre intuitivement (sans calculs) que certaines forces et accélérations sont perpendiculaires aux vitesses dont elles dérivent ?
La force de Coriolis et l'accélération dite normale sont toutes deux perpendiculaires à des vitesses.
Dans le cas d'un mouvement de rotation de vitesse linéaire $\vec{v}\begin{bmatrix}\cos\omega\,t\\ \sin\omega\,t\end{bmatrix}$, on a une dérivée $\frac{d\vec{v}}{dt}\begin{bmatrix}-\omega\sin\omega\,t\\ \omega\cos\omega\,t\end{bmatrix}$ perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$.

C'est parce qu'on s'intéresse à des mouvements de type rotation, que certaines forces et accélérations sont perpendiculaires aux vitesses dont elles dérivent.

II.6 Conclusion du chapitre

En mécanique newtonienne dite « générale », on corrige l'annulation d'une partie du mouvement du corps de référence lors d'un changement de référentiels galiléen à non galiléen, en ajoutant dans le principe fondamental de la dynamique de Newton des forces d'inertie.

On souhaite généraliser cela aux forces « normales ». Le souci, c'est que forces et mouvements ne sont pas totalement équivalents. C'est-à-dire que le passage de l'un à l'autre n'est pas à priori si aisé, puisque des masses et des charges interviennent.
Sauf comme le souligne A. Einstein pour le champ gravitationnel équivalent localement à une accélération et donc à un mouvement.

Dans le prochain mémoire, on s'attachera à faire correspondre l'annulation de « mouvements généralisés » (à gauche) à l'ajout de forces « normales » (à droite). Mais dans l'immédiat, étudions les modèles de l'électron de Bohr, Broglie et Schrödinger.

Chapitre III Modèles de l'électron de Bohr, Broglie et Schrödinger

Objet du chapitre
Dans le cadre de notre étude des forces d'inertie, on s'intéresse maintenant aux modèles de l'électron de Bohr, Broglie et Schrödinger qui font intervenir la force électrostatique et la force d'inertie centrifuge. Ce sera également l'occasion de revenir sur la Physique quantique et ondulatoire des années 1920.

III.1 Les mystérieuses raies spectrales de l'hydrogène

La spectroscopie étudie les spectres lumineux d'un phénomène physique. Au cours du 19ème siècle, cette discipline connait un développement spectaculaire sous l'impulsion de Gustav Kirchhoff et de Robert Wilhelm Bunsen. On observe que dans son état normal, la matière n'émet aucun rayonnement, mais qu'une fois excitée (excitation qui consiste en un apport d'énergie), elle peut réémettre de l'énergie sous forme de rayonnement lumineux.

Par exemple, des expérimentateurs remplissent des tubes capillaires de gaz d'hydrogène et l'excitent à l'aide d'une différence de potentiels électriques appliqués aux deux extrémités du tube. Ils étudient le spectre de la lumière réémise par l'hydrogène. A leur grande surprise, ils observent des raies spectrales. C'est-à-dire que le spectre de la lumière est discontinu et que seules quelques longueurs d'ondes sont réémises.

On donne sur la figure ci-dessous une partie du spectre lumineux de l'hydrogène, avec la série dite de Balmer dans le visible, la série dite de Lyman dans l'invisible ultraviolet, et la série dite de Paschen dans l'invisible ultraviolet.

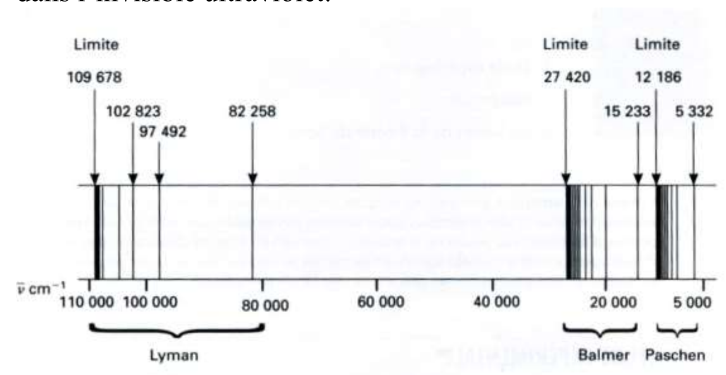


Figure 1 : partie du spectre lumineux du gaz d'hydrogène

Nota
$\bar{\nu}$ est le nombre d'onde, inverse de la longueur d'onde, avec $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$. Il s'exprime en m^{-1}.
$K = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde angulaire. Il s'exprime en $rad.m^{-1}$.
Dans cet essai, on utilisera le terme de vecteur d'onde pour désigner K.

Suite à ces observations, les physiciens cherchent une relation empirique entre les caractéristiques des différentes raies spectrales. C'est Johann Jakob Balmer en 1885 qui établit le premier la relation :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2})$$

avec R_H la constante de Rydberg de l'hydrogène,λ la longueur d'onde de la lumière réémise et m un entier.

La relation de J. Balmer est ensuite généralisée par Johannes Rydberg et Walther Ritz :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$$

n et m sont des entiers avec $n < m$.

III.2 Le modèle planétaire d'atome d'Ernest Rutherford (1911)

En 1909, E. Rutherford, aidé de Hans Geiger et d'Ernest Marsden, conduisent des expériences de bombardement de feuilles d'or par des particules α (noyaux d'hélium He^{2+}). Les 3 expérimentateurs constatent que la plupart des particules α traversent la feuille d'or. Néanmoins, quelques-unes, dans une très faible proportion, sont déviées suivant de très grands angles.

Suite à ces expériences, E. Rutherford propose en 1911 le modèle d'atome de Rutherford comparable à un petit système planétaire. Au centre, un noyau dense et chargé positivement, à l'origine de la déviation suivant de très grands angles de quelques particules α. Autour, surtout du vide qui ne dévie pas les particules α, ainsi que des électrons chargés négativement qui orbitent sur des trajectoires circulaires ou elliptiques.

Le modèle planétaire de Rutherford a un précurseur : le modèle saturnien proposé par Hantarō Nagaoka quelques années plus tôt en 1904. Ces deux modèles se heurtent toutefois à la théorie du rayonnement de l'électron en mouvement accéléré (en particulier en rotation).
En effet, d'après les observations expérimentales et les équations de Maxwell, un électron soumis à une accélération émet de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques (c'est le même principe qu'une antenne radio émettrice).

En 1897, Joseph Larmor établit la relation suivante :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

avec P la puissance rayonnée et a l'accélération de la charge électrique.

D'après cette relation, l'électron en orbite autour du noyau doit perdre de l'énergie en rayonnant des ondes électromagnétiques, et donc finir par s'écraser sur le noyau.

En contradiction avec cette relation, l'une des idées fondamentales de la Physique quantique va être de proposer que l'électron, même en mouvement (accéléré) de rotation, ne rayonne pas continument de l'énergie. C'est uniquement lors du passage d'un mouvement de rotation à un autre (changement d'orbites), que l'électron rayonne une onde électromagnétique. En dehors, l'électron est dit dans un état stable ou permanent.

Nota
En Physique quantique, état stable de l'électron et mouvement de rotation sont donc rapprochés. Soulignons ici le lien la phrase d'A. Einstein précédemment citée : « L'objection est surtout importante quand l'état de mouvement du corps de référence est tel qu'il n'a besoin pour son maintien d'aucune action extérieure, par exemple dans le cas où le corps de référence effectue un mouvement de rotation uniforme. »

III.3 Modèle de l'électron de Bohr dans l'atome d'hydrogène

En 1913, Niels Bohr publie un article intitulé *De la constitution des atomes et des molécules* où il réunit trois domaines à priori différents de la physique. Il reprend d'abord le modèle planétaire de Rutherford. Il utilise ensuite la constante h de Planck et son lien avec le moment cinétique proposé par Max Planck en 1900. Enfin, il retrouve la constante de Rydberg R_H et explique (en partie) les mystérieuses raies spectrales de l'hydrogène.

III.3.1 Expliquer l'état stable de l'électron en s'inspirant du modèle planétaire et de la gravitation newtonienne

Dans son article, N. Bohr cherche à comprendre pourquoi l'électron se trouve dans un état stable (ou permanent pour reprendre son terme). Pourquoi dans le modèle de Rutherford ne tombe-t-il pas sur le proton ? Pour y répondre, il s'inspire comme E. Rutherford du modèle planétaire, ainsi que de la gravitation newtonienne.

Prenons l'exemple de la Lune. Celle-ci ne tombe pas sur la Terre car la force gravitationnelle attractive est compensée par l'effet centrifuge du mouvement de rotation de la Lune autour de la Terre.
Dans le cas du modèle d'électron proposé par N. Bohr, l'effet centripète de la force attractive électrostatique du proton sur l'électron est compensé par l'effet centrifuge dû au mouvement de rotation de l'électron autour du proton.

La force électrostatique attractive est donnée par la loi de Coulomb :

$$F_{Es} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire de l'électron autour du proton, on a :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

En dérivant, on obtient l'accélération qui a une composante normale par rapport à la vitesse :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v^2}{r}$$

L'effet centrifuge du mouvement de rotation est donné par :

$$m\frac{\partial v}{\partial t} = -m\frac{v^2}{r}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel galiléen R^0 à un électron en rotation autour du proton et soumis à une force électrostatique, s'écrit :

$$m\frac{\partial v}{\partial t} = F_{Es}$$

On obtient :

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

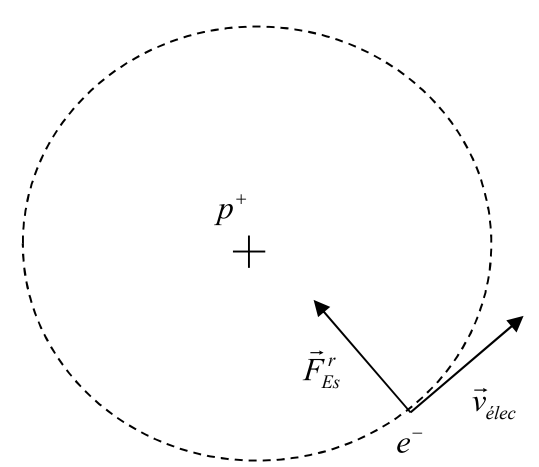


Figure 2 : électron « stabilisé » par une force électrostatique et par un mouvement de rotation autour du proton (l'indice r *pour* $\vec{F}^r_{Es}$ *indique que la force électrostatique est radiale dans le modèle).*

III.3.2 Energie mécanique dans R^0

On a l'énergie potentielle électrique dans R^0 :

$$Ep(F_{Es}) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

En utilisant $m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, on obtient pour l'énergie cinétique dans R^0 :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}Ep(F_{Es})$$

On a l'énergie mécanique E dans R^0 :

$$E = Ec + Ep(F_{Es}) = -Ec = -\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Ep(F_{Es}) = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

III.3.3 Force d'inertie centrifuge dans R^Ω

Dans la théorie newtonienne et dans le modèle de Bohr, la Lune et l'électron sont respectivement « stabilisés » par une force attractive et par leur mouvement de rotation. Montrons qu'ils peuvent aussi être considérés immobiles et stabilisés par une force attractive et une force d'inertie centrifuge.

On se place dans le référentiel non galiléen R^Ω où le mouvement de l'électron est annulé. Dans R^Ω, on a toujours la même force attractive :

$$F_{Es} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

On a une force d'inertie centrifuge :

$$F_{Cent} = m\frac{v^2}{r}$$

Dans R^Ω, l'électron est immobile, on applique le principe d'inertie :

$$0 = F_{Es} + F_{Cent}$$

On retrouve la même équation :

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

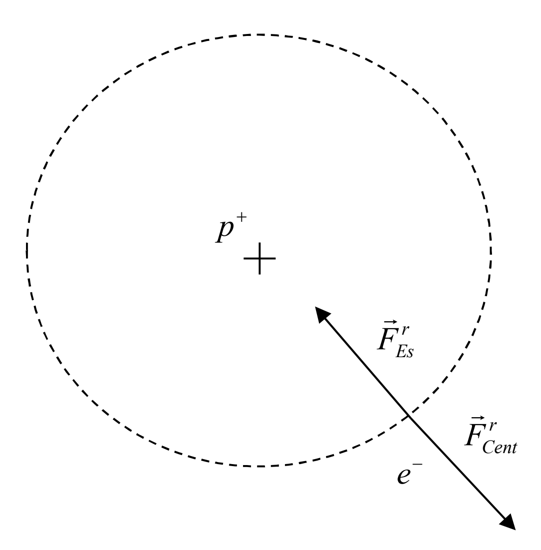


Figure 3 : électron « stabilisé » par une force électrostatique et par une force d'inertie centrifuge

III.3.4 Energie mécanique dans R^{Ω}

On a l'énergie potentielle électrique dans R^{Ω} :

$$Ep(F_{Es}) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On a l'énergie potentielle de la force d'inertie centrifuge dans R^{Ω} (comptée ici positivement lorsque la force est répulsive) :

$$Ep(F_{Cent}) = \frac{1}{2}mv^2$$

On a la même énergie mécanique dans R^{Ω} :

$$E = Ep(F_{Es}) + Ep(F_{Cent}) = -\frac{1}{2}mv^2$$

Nota 1 sur le côté à priori artificiel d'introduire une force d'inertie
Le fait d'introduire une force d'inertie centrifuge peut sembler artificiel. Cependant, cela présente l'avantage de se placer dans un référentiel R^{Ω} plus naturel pour l'électron : c'est celui où il est immobile et où il ne rayonne pas.
Cela aura toute son importance dans le modèle de l'électron de L. de Broglie où ce dernier modélise l'électron par une onde stationnaire (onde immobile dans l'Espace).

Nota 2, pourquoi associer force électrostatique et force d'inertie centrifuge ?
Ce qui reste inexpliqué, c'est pourquoi l'association dans le modèle de l'électron de Bohr de ces deux forces : force électrostatique et force d'inertie centrifuge ?
On a la même interrogation avec le modèle planétaire de Kepler-Newton, pourquoi l'association de ces deux forces : force gravitationnelle et force d'inertie centrifuge ?

III.3.5 Quantification du moment cinétique

On rappelle le moment cinétique d'une particule de masse m :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Dans son article, N. Bohr s'inspire des idées de M. Planck et d'A. Einstein sur la quantification de l'énergie et de l'action S à l'aide de $\hbar$. Il émet l'hypothèse que le moment cinétique σ_n de l'électron tournant autour du proton est quantifié, et qu'il est un multiple entier de $\hbar$:

$$\sigma_n = r_n m v_n = n\hbar$$

Le nombre entier n correspond aux orbites possibles de l'électron, $n = 1$ correspond à la plus basse et la plus stable des orbites, $n = 2$ correspond à une orbite un peu plus haute et un peu moins stable, et ainsi de suite.

III.3.6 Vitesses de l'électron, vitesse de Bohr

A partir des équations $m{v_n}^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$ et $r_n m v_n = n\hbar$, on en déduit les différentes vitesses de l'électron, suivant son orbite et indépendamment de sa masse.

On a :

$$m r_n v_n \times v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$n\hbar \times v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

On obtient :

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$$

Pour $n = 1$, on a la vitesse la plus élevée de l'électron (appelée aussi vitesse de Bohr) :

$$v_1 = v_{Bohr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$$

Nota
On pose souvent :
$v_{Bohr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} = \alpha_{em} c$ avec $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ la constante de structure fine, appelée également constante de couplage électromagnétique.

La constante de structure fine $\alpha_{em} \approx \frac{1}{137}$ est proposée en 1916 par Arnold Sommerfeld afin d'expliquer des écarts fins entre les raies spectrales de l'hydrogène. Elle relie la vitesse de la lumière à la vitesse de l'électron dans son orbite la plus stable. On verra dans le 4ème mémoire que la constante de structure fine est fréquemment utilisée dans l'Electrodynamique quantique relativiste et dans le Modèle standard.

III.3.7 Rayons de l'atome d'hydrogène, rayon de Bohr

Suivant l'hypothèse de quantification du moment cinétique, on a le rayon :

$$r_n = \frac{n\hbar}{mv_n}$$

En remplaçant v_n par $v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$, on obtient :

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2$$

Pour $n = 1$, on a le plus petit rayon. On l'appelle le rayon de Bohr :

$$r_1 = r_{Bohr} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

On le fait correspondre au rayon de l'atome d'hydrogène. Numériquement, on a :

$$r_{Bohr} \approx 0{,}529\overset{0}{A}$$

III.3.8 Les niveaux d'énergie, retrouver la constante R_H

A partir des rayons r_n, c'est-à-dire des différentes orbites possibles pour l'électron, N. Bohr définit des niveaux d'énergie :

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$$

Avec :

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2$$

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2}\frac{1}{n^2}$$

N. Bohr applique l'hypothèse des quanta de M. Planck au passage d'un niveau d'énergie à un autre :

$$E_m - E_n = h\nu = \frac{\hbar 2\pi c}{\lambda}$$

Il obtient :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_m - E}{\hbar 2\pi c} = \frac{me^4}{(4\pi)^3{\varepsilon_0}^2(\hbar)^3 c}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$$

On avait la relation de Balmer Rydberg Ritz :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$$

N. Bohr obtient pour la constante R_H :

$$R_H = \frac{me^4}{(4\pi)^3{\varepsilon_0}^2(\hbar)^3 c}$$

Par le calcul, il retrouve une valeur très proche de la mesure expérimentale :

$$R_H \approx 109{,}678cm^{-1}$$

Grâce à sa simplicité explicative et à ses résultats confirmés par l'expérience, le succès du modèle de l'électron de Bohr est rapide et considérable. Il va inspirer de nombreux physiciens comme Arnold Sommerfeld avec sa constante de structure fine dans la recherche d'un modèle relativiste. Cependant, c'est avec les idées de L. de Broglie et d'E. Schrödinger qu'il trouvera son véritable prolongement.

III.4 Idées de L. de Broglie, l'électron à la fois onde et particule

III.4.1 Ondes stationnaires circulaires

Durant la 1ère guerre mondiale, L. de Broglie travaille sur des antennes installées en haut de la tour Eiffel. Il s'intéresse alors à la théorie des antennes, ainsi qu'aux ondes stationnaires intervenant dans cette théorie et comportant un nombre multiple et entier de nœuds.

Après la lecture de l'article de Bohr, L. de Broglie note de fortes ressemblances entre le modèle mathématique des ondes stationnaires et le modèle de l'électron de Bohr. Quelques années plus tard, il modifie le modèle planétaire de Rutherford-Bohr et imagine un nouveau modèle pour l'électron. Ce dernier n'est plus une particule ponctuelle, c'est à la fois une onde et une particule. On parle de dualité onde particule.

Dans un référentiel galiléen R^0, l'onde électron est considérée comme une onde progressive, se propageant à la vitesse v_n, comme la particule électron du modèle de Bohr.
Dans le référentiel de l'électron R^{Ω}, l'onde électron est considérée comme une onde stationnaire, c'est-à-dire immobile dans l'Espace. L. de Broglie rapproche le nombre de nœuds n de l'onde stationnaire électron du numéro n du niveau d'énergie mécanique E_n.

Au lieu des orbites de l'électron, L. de Broglie imagine des ondes stationnaires circulaires. La figure suivante propose différentes configurations possibles de l'onde stationnaire circulaire, avec un nombre n de nœuds et une énergie mécanique E_n, tous deux croissants. Pour l'onde stationnaire circulaire, on a un nombre de nœuds égal au mode propre n de l'onde stationnaire.

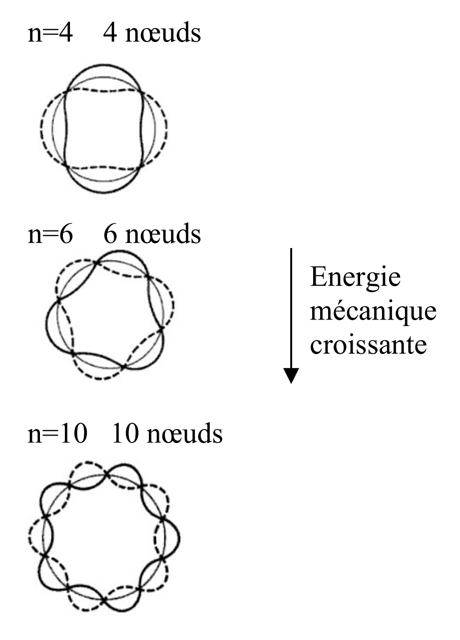


Figure 4 : exemple de l'onde stationnaire circulaire avec augmentation du nombre de nœuds et de l'énergie mécanique

III.4.2 Relier les données de la mécanique newtonienne à celles de la mécanique ondulatoire

Suite à son idée d'onde particule, L. de Broglie souhaite relier les données de la mécanique classique newtonienne à celles d'une nouvelle mécanique qualifiée de mécanique ondulatoire, et qu'il conçoit comme une généralisation de la mécanique newtonienne. Ainsi, il cherche à relier la vitesse et l'impulsion de la particule électron à une vitesse et à une impulsion de l'onde progressive électron.

L. de Broglie interprète l'électron pas tout à fait comme une onde, mais plutôt comme un paquet d'ondes (de longueurs d'ondes très voisines) avec une vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ différente de sa vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Pour faire le lien entre la particule et l'onde électron, L. de Broglie rapproche la vitesse v de la particule électron (telle que définie en mécanique classique newtonienne) de la vitesse de groupe v_g de l'onde électron :

$$v = v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Il rapproche aussi l'impulsion p de l'électron de l'impulsion d'un photon de longueur d'onde λ proposée par A. Einstein :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Selon L. de Broglie, cette formule reste aussi valable pour un électron non relativiste de masse $m_{élec}$ et de longueur d'onde λ. C'est-à-dire qu'on a :

$$p = m_{élec} v = \frac{h}{\lambda}$$

III.4.3 Condition de quantification

En posant $p = m_{élec} v = \frac{h}{\lambda}$ pour un électron, L. de Broglie éclaire de façon intuitive la condition de quantification de Bohr :

$$\sigma_n = r_n m_{élec} v_n = n\hbar$$

Pour que l'onde stationnaire circulaire électron ne soit pas détruite sur sa trajectoire circulaire de rayon r_n et de longueur $l = 2\pi r_n$ (c'est-à-dire pour qu'on évite les interférences destructrices), il faut que la longueur de cette trajectoire soit égale à *n* fois la longueur d'onde (avec n un entier) dans R^{Ω} :

$$l = 2\pi r_n = n\lambda_n$$

Or, pour une onde progressive électron on a dans R^0 :

$$p_n = m_{élec} v_n = \frac{h}{\lambda}$$

On obtient :

$$l = 2\pi r_n = n\lambda_n = n\frac{h}{m_{élec} v_n}$$

On retrouve la condition de quantification de Bohr :

$$r_n m_{élec} v_n = n\hbar$$

Nota
On rappelle que dans R^{Ω}, l'onde électron est stationnaire. Dans R^0, l'onde électron est progressive avec la vitesse $v = v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$.

Que l'on décrive l'électron dans R^0 ou R^{Ω}, celui-ci est considéré dans un état stable ou permanent et ne rayonne pas de l'énergie.

III.5 Equation d'onde de l'électron de Schrödinger

III.5.1 Préambule historique

En 1926, E. Schrödinger s'inspire du modèle de Bohr de l'électron et des idées de L. de Broglie. En quelques mois, il publie une série d'articles fondamentaux regroupés ultérieurement dans un recueil *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*. Dans le 1er article, il propose la célèbre équation qui porte son nom.

L'équation est alors une formidable révolution intellectuelle. Grâce à elle, on comprend de nombreuses propriétés des éléments chimiques et de leurs électrons (niveau d'énergie, liaisons chimiques, etc.). Elle éclaire le tableau périodique des éléments chimiques de Dmitri Mendeleïev (1870). On peut la considérer comme l'acte de fusion entre la physique et la chimie.

Nota sur la méthode utilisée par E. Schrödinger
Dans son premier article datant de 1926 : *Quantification et valeurs propres*, E. Schrödinger obtient l'équation de Schrödinger dès la 3ème page.

Pour cela, il part de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton :

$$H(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}) = E$$

Avec q la position, p l'impulsion et $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ l'action, intégrale du Lagrangien L.

Il introduit la fonction d'onde ψ sous la forme :

$$S = k\, log(\psi)$$

avec k une constante ayant les dimensions d'une action.

Il obtient pour l'équation aux dérivées partielles de Hamilton :

$$H(q, \frac{k}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}) = E$$

En utilisant une analogie avec un mouvement de Kepler, il aboutit après quelques contorsions à son équation :

$$\Delta\psi + \frac{2m}{k^2}(E_m - E_p)\psi = 0$$

Avec :

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Par la suite, il donne à la constante k la valeur de $\hbar$.

On s'inspire maintenant d'idées de L. de Broglie pour retrouver l'équation de Schrödinger.

III.5.2 Milieu réfringent

On rappelle l'équation d'onde d'Alembert pour une onde ψ monochromatique :

$$\Delta\psi - \frac{n^2}{{v_{\phi 0}}^2}\partial_t^2\psi = 0$$

avec $v_{\phi 0}$ la vitesse de phase de l'onde lorsque l'indice de réfraction $n = 1$ (c'est-à-dire dans le vide).

Usuellement, on prend $v_{\phi 0} = c$.

On a la vitesse de phase de l'onde dans un milieu réfringent d'indice $n \neq 1$:

$$v_\phi = \frac{v_{\phi 0}}{n}$$

Nota
Ne pas confondre ici l'indice de réfraction *n* et *n* le niveau d'énergie des états stationnaires de l'électron.

Dans le référentiel R^Ω où l'onde électron est immobile, on a une fonction d'onde stationnaire qui peut s'écrire : $\psi(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{i\Omega t}$ avec $f(x, y, z)$ fonction des variables d'Espace.

On obtient une équation d'onde sous la forme :

$$\Delta\psi + \frac{\Omega^2 n^2}{{v_{\phi 0}}^2}\psi = 0$$

III.5.3 Vitesse de phase

On pose que l'électron est semblable dans R^0 à une onde progressive possédant une vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\Omega}{K}$$

La quantité de mouvement de l'onde électron est égale à :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar K$$

L'énergie de l'onde électron est égale à :

$$E = \hbar\Omega$$

On obtient pour la vitesse de phase de l'onde électron dans un milieu réfringent :

$$v_\phi = \frac{v_{\phi 0}}{n} = \frac{\Omega}{K} = \frac{\hbar\Omega}{\hbar K} = \frac{E}{p}$$

III.5.4 Equation d'onde de Schrödinger

Suivant un raisonnement classique, on a la relation entre énergie mécanique, énergie cinétique et énergie potentielle : $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = qA^t$ l'énergie potentielle électrique.

On a pour l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{p^2}{2m_{élec}}$$

On en tire :

$$E_c = E_m - E_p = \frac{p^2}{2m_{élec}}$$

On en déduit la quantité de mouvement (ou impulsion) de l'électron :

$$p = \sqrt{2m_{élec}(E_m - E_p)}$$

On obtient pour la vitesse de phase de l'onde électron :

$$v_\phi = \frac{v_{\phi 0}}{n} = \frac{E_m}{p} = \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2m_{élec}(E_m - E_p)}}$$

En mettant au carré, on a :

$$\frac{{v_{\phi 0}}^2}{n^2} = \frac{\hbar^2\Omega^2}{2m_{élec}(E_m - E_p)}$$

On en tire :

$$\frac{\Omega^2 n^2}{{v_{\phi 0}}^2} = \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E_m - E_p)$$

On avait l'équation d'onde :

$$\Delta\psi + \frac{\Omega^2 n^2}{{v_{\phi 0}}^2}\psi = 0$$

En substituant $\frac{\Omega^2 n^2}{{v_{\phi 0}}^2}$ par $\frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E_m - E_p)$, on retrouve l'équation de Schrödinger :

$$\Delta\psi + \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E_m - E_p)\psi = 0$$

Le choix des coordonnées cartésiennes est mal adapté pour résoudre cette équation. On utilise usuellement les coordonnées sphériques : r, θ, ϕ avec $\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)\psi(\theta, \phi)$.

III.5.5 Résolution de l'équation de Schrödinger pour la partie radiale $\psi(r)$

On propose de résoudre l'équation de Schrödinger pour la partie radiale $\psi(r)$ et pour le premier orbital atomique qu'on appelle $1s$ (on parle usuellement de couche K et de niveau d'énergie $n = 1$).

Pour le niveau $n = 1$ de l'électron, on a les énergies mécaniques et potentielles :

$$E_m = -\frac{m_{élec}e^4}{8{\varepsilon_0}^2(2\pi\hbar)^2}$$

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On a le vecteur d'onde K :

$$K = \frac{p}{\hbar} = \frac{m_{élec}v}{\hbar} = \frac{m_{élec}\alpha_{em}c}{\hbar} = \frac{m_{élec}e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} = \frac{1}{r_{Bohr}}$$

qui est l'inverse du rayon de l'atome de Bohr.

Nota
L'équation d'onde partie radiale de Schrödinger correspond à l'équation d'onde du modèle de l'électron de Bohr. On retrouve dans $K = \frac{1}{r_{Bohr}}$ le rayon de Bohr.
A noter que l'équation d'onde partie radiale ne permet pas d'expliquer les orbitales atomiques et donc les liaisons chimiques. Il faut faire en plus appel à la partie tangentielle ou angulaire ($\psi(\theta, \phi)$) de l'équation d'onde pour unifier physique et chimie.

On obtient :

$$\frac{2m_{élec}}{\hbar^2}E_m = \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}\frac{m_{élec}e^4}{8{\varepsilon_0}^2(2\pi\hbar)^2} = -K^2$$

$$\frac{2m_{élec}}{\hbar^2}E_p = -\frac{2K}{r}$$

On a donc une équation différentielle sous la forme :

$$\Delta\psi + \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E_m - E_p)\psi = 0$$

$$\Delta\psi - (K^2 - \frac{2K}{r})\psi = 0$$

On résout l'équation différentielle en coordonnées sphériques pour la partie radiale $\psi(r)$:

$$\nabla_r^2\psi(r) = (K^2 - \frac{2K}{r})\psi(r)$$

On trouve une solution sous la forme :

$$\psi(r) = Ae^{-Kr}$$

La normalisation de la fonction d'onde implique :

$$\int_0^\infty \psi^2 4\pi r^2 dr = 1$$

l'élément de volume $d\tau$ étant égale à $4\pi r^2 dr$.

On trouve une fonction d'onde pour le premier orbital atomique $1s$:

$$\psi(1s) = \sqrt{\frac{K^3}{\pi}}e^{-Kr}$$

On obtient comme solution une onde indépendante du Temps et stationnaire dans le référentiel R^{Ω}. On retrouve le vecteur d'onde K. Cependant, celui-ci ne joue pas son rôle de « propagateur » comme il le ferait dans le cas d'une onde progressive, puisqu'il n'est pas précédé d'un i complexe.

Nota, équation simplifiée de Schrödinger
On peut partir d'une équation d'onde indépendante du Temps. On a :

$$\Delta\psi + \frac{\Omega^2}{{v_\phi}^2}\psi = 0$$

Si on pose une vitesse de phase complexe :

$$v_\phi = \frac{i\Omega}{K}$$

On obtient l'équation différentielle :

$$\Delta\psi - K^2\psi = 0$$

En résolvant l'équation en cordonnées cartésiennes, on retrouve une solution sous la forme :

$$\psi(x) = Ae^{-Kx}$$

III.5.6 Vitesse de groupe v_g de l'onde progressive électron

Suivant les idées de L. de Broglie, la vitesse de l'électron du modèle de Bohr correspond à la vitesse de groupe de l'onde progressive électron (on parle aussi de paquet d'ondes électron). On reprend ici sa démonstration qui permet de vérifier cette idée.

On se place dans le référentiel R^0 où l'onde progressive électron se propage à la vitesse v_g. Soit ν la fréquence et λ la longueur d'onde de l'onde progressive électron.

D'après la relation de Rayleigh sur la vitesse de groupe, on a :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial K}{\partial \Omega} = \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial \nu} = \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial \nu} = \frac{\partial \frac{\nu}{v_\phi}}{\partial \nu} = \frac{1}{{v_\phi}_0}\frac{\partial n\nu}{\partial \nu}$$

On a donc :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial K}{\partial \Omega} = \frac{\partial p}{\partial E_m} = \frac{\partial\sqrt{2m_{élec}(E_m - E_p)}}{\partial E_m} = \frac{m_{élec}}{\sqrt{2m_{élec}(E_m - E_p)}}$$

On en tire la vitesse de groupe de l'onde électron :

$$v_g = \frac{\sqrt{2m_{élec}(E_m - E_p)}}{m_{élec}}$$

Or :

$$p = \sqrt{2m_{élec}(E_m - E_p)} = m_{élec}v$$

On retrouve bien une vitesse de groupe v_g de l'onde électron égale à la vitesse v (newtonienne) de la particule électron :

$$v_g = \frac{m_{élec} v}{m_{élec}} = v$$

III.5.7 Indice n

En l'absence de champ électrostatique, on a la vitesse de phase de l'onde progressive électron :

$$v_{\phi 0} = \frac{\hbar \Omega}{\sqrt{-2 m_{élec} E_m}}$$

En présence de champ électrostatique, on a la vitesse de phase de l'onde progressive électron :

$$\frac{v_{\phi 0}}{n} = \frac{\hbar \Omega}{\sqrt{2 m_{élec} (E_m - E_p)}}$$

En mettant au carré :

$$\frac{{v_{\phi 0}}^2}{n^2} = \frac{\hbar^2 \Omega^2}{2 m_{élec} (E_m - E_p)}$$

En éliminant ${v_{\phi 0}}^2$, on obtient l'indice n :

$$n^2 = 1 - \frac{E_p}{E_m} = 1 - \frac{E_p}{\hbar \Omega}$$

Nota
L'existence d'un milieu réfringent ($n \neq 1$) est ici lié à présence d'un champ électrostatique.

III.5.8 Lagrangien de l'équation de Schrödinger

On rappelle le Lagrangien de l'équation de Schrödinger :

$$L = \bar{\psi}^{\dagger} (i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2 (\partial_x - i \frac{e}{\hbar} A^x)^2}{2 m_{élec}} - e A^t) \psi$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = 0$ à ce Lagrangien L, on retrouve l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \partial_t \psi = (-\frac{\hbar^2}{2 m_{élec}} (\partial_x - i \frac{e}{\hbar} A^x)^2 + e A^t) \psi$$

III.5.9 Interprétation probabiliste de la fonction d'onde

En 1926, Max Born propose d'interpréter le carré de la fonction d'onde, ou le module au carré si la fonction d'onde est complexe, $|\psi|^2$, comme la densité de probabilité de présence de la particule.

En intégrant sur un volume V quelconque, on obtient la probabilité de trouver l'objet dans ce volume :

$$P = \int_V |\psi(x, y, z)|^2 \, d\tau$$

On a également la condition de normalisation sur un volume infini :

$$P = \int_{\infty} |\psi(x,y,z)|^2 \, d\tau = 1$$

Cette interprétation est incluse dans ce qu'on appelle aujourd'hui l'interprétation de Copenhague, en référence à l'institut de physique dirigé par N. Bohr et localisé dans cette ville.

On trouve d'autres interprétations, plus ou moins proches (et plus ou moins compatibles) avec celle de Copenhague. Par exemple, au lieu d'avoir un électron localisé dans un petit volume d'Espace, l'électron se trouve réparti dans tout l'Espace, avec une densité volumique ρ proportionnelle à $|\psi|^2$. On a pour la charge électrique totale de l'électron : $e = \int_{\infty} \rho(x,y,z) \, d\tau$.

On retrouve en quelque sorte dans ces 2 interprétations, la dualité onde corpuscule avec :

- pour l'interprétation de Copenhague, un électron probabiliste, localisé et donc davantage particule,
- et pour la deuxième interprétation (celle qu'on pourrait qualifier de Broglie), un électron réparti dans tout l'Espace et donc davantage onde.

III.5.10 Conclusion du chapitre

Les modèles de l'électron de Bohr, Broglie et Schrödinger privilégient deux référentiels, passant continuellement de l'un à l'autre dans les raisonnements menés. L'un R^0 considéré comme galiléen, où l'électron est en mouvement de rotation et est interprété comme une onde progressive vérifiant $p = \hbar K$. L'autre R^{Ω} considéré comme non galiléen, où l'électron est immobile et est interprété comme une onde stationnaire. C'est dans celui-ci qu'on obtient les fonctions d'ondes stationnaires solutions de l'équation de Schrödinger.

Dans ses écrits, L. de Broglie présente la mécanique ondulatoire comme une généralisation de la mécanique newtonienne. On va maintenant s'intéresser à différentes équations d'ondes qui peuvent s'interpréter comme des extensions du principe fondamental de la dynamique de Newton.

Chapitre IV Théories de Jauge locale, applications à différentes fonctions d'onde (de Dirac 1928, Schrödinger 1925 à Pauli 1927)

Objet du chapitre
On s'intéresse aux ressemblances conceptuelles entre :
- la mécanique newtonienne datant du 17ème siècle et permettant de décrire la gravitation et les systèmes planétaires,
- les théories de Jauge locale développées surtout au 20ème siècle, et permettant de décrire la force électromagnétique, les interactions nucléaires fortes et faibles, et les systèmes de particules.

Cela permettra d'étudier les fonctions d'onde de Dirac, Schrödinger et Pauli proposées dans les années 1920, sous un angle théorie de Jauge locale.

IV.1 Généralités sur les théories de Jauge locale

Les termes invariance de Jauge et transformation de Jauge peuvent sembler à priori énigmatiques, ils s'inspirent en fait de notions déjà présentes en mécanique newtonienne. On propose ici d'éclairer ces 2 termes via leurs ressemblances avec la mécanique newtonienne.

IV.1.1 Qu'est-ce qui est invariant ?

L'invariance, c'est le respect des lois fondamentales de la Nature quel que soit le changement de référentiels ou la transformation de Jauge locale, c'est-à-dire le principe de relativité cher à A. Einstein.

En mécanique newtonienne, lors de l'annulation d'un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (c'est-à-dire lors d'un changement de référentiels), on ajoute des forces d'inertie centrifuge et de Coriolis, cela afin de respecter le principe fondamental de la dynamique de Newton.
Sur un mode similaire, dans les théories de Jauge locale, lors de l'annulation d'une partie de la phase de la fonction d'onde (c'est-à-dire lors d'une transformation de Jauge locale), on ajoute des quadrivecteurs énergies impulsions d'interaction (associés à l'interaction électromagnétique ou aux interactions fortes et faibles), cela afin de respecter l'équation d'onde.
C'est ce respect de l'équation d'onde, quel que soit la transformation de Jauge locale, qui est considéré comme l'invariant de Jauge recherché.

Ainsi, en mécanique newtonienne, la loi fondamentale de la Nature, c'est-à-dire l'invariant à respecter lors l'un changement de référentiels, c'est le principe fondamental de la dynamique de Newton $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$, quitte à ajouter des forces d'inertie.
En mécanique ondulatoire (ou en Physique quantique), la loi fondamentale de la Nature ou l'invariant à respecter lors l'une d'une transformation de Jauge locale, c'est l'équation d'onde, quitte à ajouter des énergies impulsions potentielles.

Nota 1
On verra néanmoins qu'on ne parvient pas à généraliser ce principe aussi loin que l'on le souhaiterait. En effet, suivant le cas où on se place, l'équation d'onde à respecter n'est pas exactement la même.

Dans le vide (pas de masse et pas de charge électrique), l'équation d'onde à respecter, c'est celle proposée par Jean Le Rond d'Alembert en 1746 :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

En Physique quantique relativiste, l'équation d'onde à respecter, c'est celle de Klein Gordan proposée en 1926 :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

En Physique quantique non relativiste, l'équation d'onde à respecter, c'est celle de Schrödinger libre proposée en 1925 (absence de potentiel électrique) :

$$\Delta\psi - \frac{i2m}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

Cette dernière équation d'onde de Schrödinger libre rappelle l'équation de chaleur (ou équation de diffusion : la variation d'une concentration dans le Temps est proportionnelle au surplus relatif de cette concentration dans son environnement infinitésimal) proposée par Joseph Fourier en 1807 :

$$\Delta u - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Nota 2
A souligner que le tenseur de Maxwell Faraday, ainsi que les équations de Maxwell, sont aussi conservés lors d'une transformation de Jauge locale. Tenseur de Maxwell Faraday et équations de Maxwell sont donc considérés comme des lois fondamentales de la Nature dans les théories de Jauge locale.

IV.1.2 Qu'est-ce qu'on transforme ?

Une transformation de Jauge locale consiste à modifier (annuler en partie) d'une part la phase de la fonction d'onde, d'autre part les potentiels (électromagnétiques ou autres).
On peut rapprocher une transformation de Jauge locale d'un changement de référentiels de la mécanique newtonienne où l'on modifie le mouvement du corps de référence (par exemple, on annule un vecteur rotation $\vec{\Omega}$).

IV.1.3 Qu'est-ce qu'on fait pour conserver l'invariance (des lois de la Nature) lors de la transformation ?

En mécanique newtonienne, lorsqu'on effectue un changement de référentiels galiléen à non galiléen, on ajoute des forces d'inertie dans le principe fondamental de la dynamique de Newton. Ces forces peuvent dériver d'une énergie potentielle, comme c'est le cas pour la force d'inertie centrifuge.
Dans les théories de Jauge locale, lors d'une transformation de Jauge locale, on transforme la dérivée de la fonction d'onde en une dérivée covariante. On verra que cela revient à ajouter un quadrivecteur énergie impulsion potentielle, que l'on associe à une interaction.
Ces interactions sont en quelque sorte le pendant des forces d'inertie de la mécanique newtonienne. Dans leur nature, elles diffèrent puisqu'il ne s'agit pas de la force centrifuge ou de la force de Coriolis, mais de l'interaction électromagnétique et des interactions nucléaires faible et forte.

Nota
En Electrodynamique quantique relativiste ou dans le Modèle standard, l'ajout d'un quadrivecteur énergie impulsion potentielle ieA^μ ($\mu = t, x, y, z$) (dans les dérivées partielles ou dans les équations d'ondes) revient à ajouter une énergie d'interaction dans les Lagrangien. Cette énergie d'interaction peut représenter les interactions électromagnétique, forte et faible.

Dans le cas de l'interaction électromagnétique, l'énergie d'interaction est justement égale à l'énergie potentielle généralisée, qui à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange permet de retrouver la force électromagnétique.

Par contre, pour les interactions forte et faible, ce n'est pas le cas. En fait, pour ces interactions, la notion de force n'existe pas, au sens que ces interactions n'interviennent pas dans le principe fondamental de la dynamique de Newton.

IV.1.4 Quelle est la référence ?

En mécanique newtonienne, le référentiel de base, c'est le référentiel galiléen, où le principe fondamental de la dynamique s'applique sans avoir de forces d'inertie à ajouter.

Pour les théories de Jauge locale, le vide (c'est-à-dire un milieu homogène, linéaire et isotrope sans masse et charge électrique) pourrait apparaître comme la référence. L'équation d'onde à respecter serait alors celle d'Alembert.

Cependant, cela ne convient pas à la Physique quantique relativiste où l'équation d'onde à respecter est celle de Klein Gordan. Par rapport à celle d'Alembert, il apparait un terme de masse supplémentaire.
Nous ne connaissons pas de transformation de Jauge locale qui permette de passer de l'équation d'onde d'Alembert à celle de Klein Gordan. Dans ce dernier cas, la référence serait plutôt un milieu « massique », homogène, linéaire et isotrope.

Un problème analogue se pose en Physique quantique non relativiste où l'équation d'onde à respecter est celle de Schrödinger libre. Nous ne connaissons pas de transformation de Jauge locale qui permette de passer de l'équation d'onde d'Alembert à celle de Schrödinger libre.

IV.2 Quelques rappels sur les équations d'onde

IV.2.1 Equation d'onde d'Alembert (1746)

On rappelle la fonction d'une onde progressive, sinusoïdale, plane et monochromatique qui se propage suivant x et t :

$$\psi = cos(\omega t - \vec{k}.\vec{x} + \phi)$$

avec ϕ la phase à l'origine, ω la pulsation et $\vec{k}$ le vecteur d'onde.

On a en notation complexe :

$$\psi = e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x} + \phi)}$$

La fonction d'onde vérifie l'équation d'Alembert (équation de propagation de l'onde) :

$$\frac{1}{{v_\phi}^2}\partial_t^2\psi - \partial_{\vec{x}}^2\psi = 0$$

avec $\Delta = \nabla^2 = \partial_{\vec{x}}^2$ l'opérateur laplacien (dérivée seconde par rapport à l'Espace),
v_ϕ la vitesse de phase de l'onde.

Nota sur la méthode de J. le Rond d'Alembert
Pour trouver son équation d'onde $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, J. le Rond d'Alembert cherche à modéliser la corde d'un violon et s'inspire du principe fondamental de la dynamique de Newton $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \Sigma\vec{F}$.
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ représente l'accélération, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ représente la somme des forces et $\frac{1}{c^2}$ représente le terme de masse (comme si l'énergie E_0 était égale à 1 suivant $E_0 = mc^2$).

IV.2.2 Relation de dispersion

On a la vitesse de phase, dite aussi relation de dispersion entre la pulsation ω et le vecteur d'onde k. Dans un milieu dispersif, l'indice n est fonction de la pulsation ω. On a :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$$

Dans un milieu non dispersif, l'indice n est indépendant de ω, on a :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

Dans le vide, $n = 1$, on a :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$$

IV.2.3 Opérateurs d'impulsion et d'énergie

Suivant les idées de L. de Broglie d'une dualité onde corpuscule (ou dualité onde particule), on passe d'une particule caractérisée par son impulsion p^x et son énergie $E^t = m^t c^2$, à une onde caractérisée par son vecteur d'onde k^x et sa pulsation ω^t par les relations :

$$p^x = \hbar k^x$$
$$E^t = m^t c^2 = \hbar \omega^t$$

Pour une onde progressive suivant x, une fonction d'onde ψ simple est par exemple :

$$\psi = cos\,(\omega^t t - \vec{k}^x \vec{x})$$

On peut réécrire cette fonction d'onde à partir de p^x et E^t :

$$\psi = cos\,(\frac{E^t}{\hbar} t - \frac{\vec{p}^x}{\hbar} \vec{x})$$

En notation complexe :

$$\psi = e^{i(\frac{E^t}{\hbar} t - \frac{\vec{p}^x}{\hbar} \vec{x})}$$

On a la dérivée partielle par rapport à x de la fonction d'onde ψ :

$$\partial_x \psi = -i \frac{p^x}{\hbar}\, \psi$$
$$-i\hbar \partial_x \psi = p^x \psi$$

Suivant la relation précédente, en Physique quantique (ou Mécanique ondulatoire), on définit usuellement un opérateur impulsion :

$$\hat{p}^x = -i\hbar \partial_x$$

L'operateur $\hat{p}^x$ « agit » sur la fonction d'onde et permet d'obtenir une impulsion :

$$\hat{p}^x \psi = -i\hbar \partial_x \psi = p^x \psi$$

On a la dérivée partielle par rapport à t de la fonction d'onde ψ :

$$\partial_t \psi = i \frac{E^t}{\hbar}\, \psi$$
$$i\hbar \partial_t \psi = E^t \psi$$

Suivant la relation précédente, en Physique quantique, on définit usuellement un opérateur énergie :

$$\hat{E}^t = \mathrm{i}\hbar\, \partial_\mathrm{t}$$

L'operateur $\hat{E}^t$ « agit » sur la fonction d'onde et permet d'obtenir une énergie :

$$\hat{E}^t\,\psi = i\hbar\partial_t\psi = E^t\psi$$

Nota sur la notation d'un opérateur
En Physique quantique, on utilise aussi fréquemment la notation ^ pour désigner un opérateur. Cela donne $\hat{p}$ ou $\hat{E}$, pour les opérateurs d'impulsion et d'énergie. Dans la suite de chapitre, on évoquera également $\hat{S}$ pour l'opérateur de moment cinétique de spin et $\hat{\mu}_S$ pour l'opérateur de moment magnétique de spin.

IV.2.4 Relations de dispersion en mécanique ondulatoire

Pour une onde particule, la relation entre énergie E et impulsion p peut être vue comme une relation entre ω et k, et s'interpréter comme une relation de dispersion.

On a les relations de dispersion suivantes.
Pour une onde particule non relativiste de masse m :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Pour une onde particule relativiste de masse m :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Pour une onde particule (relativiste ou non) de masse nulle et d'énergie potentielle nulle :

$$E = pc$$

Nota
Pour la mécanique relativiste, on note que le passage de $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ à $E = pc$ pour une particule de masse nulle est évident.
Pour la mécanique non relativiste, on peut utiliser l'indice n avec $n^2 = 1 - \frac{E_p}{E}$ et E_p l'énergie potentielle d'une force électrostatique. En faisant tendre E_p vers 0, on trouve $n = 1$ et $v_\phi = \frac{c}{n} = c = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$. D'où $E = pc$.

IV.2.5 Relations de dispersion, relations énergie masse impulsion et équations d'onde

En Physique quantique (ou Mécanique ondulatoire), pour passer des relations énergie impulsion aux équations d'onde, on fait usuellement les substitutions :

$$p^x \to -i\hbar\partial_x = \hat{p}^x$$

$$E^t \to i\hbar\partial_t = \hat{E}^t$$

Ainsi à partir de $E^2 = p^2c^2$, on retrouve l'équation d'onde d'Alembert :

$$p^2 - \frac{1}{\mathrm{c}^2}E^2 = 0$$

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

De même à partir de l'énergie relativiste $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, on retrouve l'équation d'onde de Klein Gordan :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

De même à partir de l'énergie cinétique $E = \frac{p^2}{2m}$, on retrouve l'équation d'onde de Schrödinger libre :

$$\Delta\psi - \frac{i2m}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

IV.2.6 Quadrivecteur pulsation vecteur d'onde

En mécanique ondulatoire, on relie le quadrivecteur énergie impulsion de la particule à un quadrivecteur pulsation vecteur d'onde de l'onde.

On a le quadrivecteur énergie impulsion :

$$4\vec{p} = (\frac{E^t}{c}, \vec{p}^x)$$

On a le quadrivecteur pulsation vecteur d'onde :

$$4\vec{k} = (\frac{\omega^{1/t}}{c}, \vec{k}^{1/x})$$

On a la relation entre les deux quadrivecteurs :

$$4\vec{k} = \frac{4\vec{p}}{\hbar}$$

Ces deux quadrivecteurs sont des caractéristiques propres à l'onde particule.

IV.3 Etude simple d'une transformation de Jauge locale, cas du Temps

IV.3.1 Fonction d'onde

Soit une fonction d'onde dans le référentiel R^0 (assimilable au vide) :

$$[\psi]_{R^0} = cos(\frac{q}{\hbar}(t - \theta(t))$$

avec q la densité de charge électrique et $\theta(t)$ une phase fonction des instants.

Nota
Les termes d'Espace ne sont pas ici indiqués.

$\frac{q}{\hbar}$ joue le rôle de la pulsation ω.
On peut voir les choses comme ça :
$\omega = \frac{E^t}{\hbar} = \frac{qA_0^t}{\hbar} = \frac{q}{\hbar}$ avec le potentiel électrique $A_0^t = id$.

En forme complexe, cela donne :

$$[\psi]_{R^0} = e^{i\frac{q}{\hbar}(t-\theta(t))}$$

On a dans le référentiel R^0 :

$$[t]_{R^0} = t$$

$$[\partial_t]_{R^0} = \frac{\partial}{\partial t}$$

On a la dérivée de ψ par rapport à t dans R^0 :

$$[\partial_t]_{R^0}\psi = (i\frac{q}{\hbar} - i\frac{q}{\hbar}\frac{\partial\theta(t)}{\partial t})\psi$$

Nota
La dérivée de ψ par rapport à t va jouer le rôle de l'équation d'onde à respecter lors de la transformation de Jauge locale.

IV.3.2 Transformation de Jauge locale

On effectue une transformation de Jauge locale, assimilable à un changement de référentiels de R^0 à R^{A^t}, où des quantités physiques sont modifiées et d'autres sont conservées.

La densité de charge électrique q est la quantité conservée de R^0 à R^{A^t}.
$A^t = \frac{\partial\theta(t)}{\partial t} = \partial_t\theta(t)$ est la quantité annulée ou soustraite de R^0 à R^{A^t} (A^t est de type potentiel électrique).

Lors de la transformation de Jauge locale de R^0 à R^{A^t}, les 2 transformations suivantes s'appliquent.

On effectue d'une part une translation dans le Temps, ce qui transforme la phase de la fonction d'onde :

$$t \to [t]_{R^{A^t}} = t - \theta(t)$$

$$[\psi]_{R^0} = e^{i\frac{q}{\hbar}(t-\theta(t))} \to [\psi]_{R^{A^t}} = [\psi]_{R^0}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)} = e^{i\frac{q}{\hbar}t}$$

On modifie d'autre part le potentiel électrique en lui soustrayant $A^t = \partial_t\theta(t)$:

$$[A^t]_{R^0} = 0 \to [A^t]_{R^{A^t}} = [A^t]_{R^0} - \partial_t\theta(t) = -\partial_t\theta(t)$$

Nota 1
On parle ici de transformation de Jauge locale car la fonction $\theta(t)$ est fonction d'une variable locale, les instants.

Nota 2
La transformation du potentiel électrique A^t donnée ci-dessus, conserve le tenseur de Maxwell Faraday, ainsi que les équations de Maxwell.

IV.3.3 L'invariant : la dérivée partielle par rapport à t

Dans R^0, on a la dérivée partielle par rapport à t de la fonction d'onde :

$$[\partial_t]_{R^0}[\psi]_{R^0} = (i\frac{q}{\hbar} - i\frac{q}{\hbar}A^t)[\psi]_{R^0}$$

Dans une transformation linéaire, la dérivée partielle $\partial_t\psi$ se transforme en $a\partial_t\psi$ de la même manière que ψ se transforme en $a\psi$.

L'objectif, c'est que lors d'une transformation de Jauge locale de R^0 à R^{A^t}, la dérivée partielle $[\partial_t]_{R^0}[\psi]_{R^0}$ se transforme en $[\partial_t]_{R^{A^t}}[\psi]_{R^{A^t}}$ de la même manière que $[\psi]_{R^0}$ se transforme en $[\psi]_{R^{A^t}}$.

Si la dérivée partielle première par rapport au Temps se transforme de la même manière, la dérivée partielle seconde également, et une équation d'onde du genre $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$ également.

Nota
On s'intéresse ici uniquement à la dérivée partielle par rapport au Temps. On aura un raisonnement analogue pour la dérivée partielle seconde par rapport à l'Espace $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$.

Dans cet objectif, on définit la dérivée dite covariante :

$$[\partial_t]_{R^{A^t}}[\psi]_{R^{A^t}} = ([\partial_t]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^{A^t}})[\psi]_{R^{A^t}}$$

On vérifie que la dérivée covariante ainsi définie, vérifie bien notre objectif :

$$[\partial_t]_{R^{A^t}}[\psi]_{R^{A^t}} = ([\partial_t]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^{A^t}})[\psi]_{R^{A^t}}$$

$$= ([\partial_t]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^{A^t}})[\psi]_{R^0}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}$$

$$= [\partial_t]_{R^0}([\psi]_{R^0}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}) - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^0}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}[\psi]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}\partial_t\theta(t)[\psi]_{R^0}$$

$$= e^{i\rho\theta(t)}[\partial_t]_{R^0}([\psi]_{R^0} + i\frac{q}{\hbar}\partial_t\theta(t)e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}[\psi]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^0}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}[\psi]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}\partial_t\theta(t)[\psi]_{R^0}$$

$$= e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}[\partial_t]_{R^0}([\psi]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^0}e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}[\psi]_{R^0}$$

$$= e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}([\partial_t]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^0})[\psi]_{R^0}$$

On a donc :

$$[\partial_\mathrm{t}]_{\mathrm{R}^{\mathrm{A}^\mathrm{t}}}[\Psi]_{\mathrm{R}^{\mathrm{A}^\mathrm{t}}} = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}([\partial_\mathrm{t}]_{\mathrm{R}^{\mathrm{A}^\mathrm{t}}})[\Psi]_{\mathrm{R}^0}$$

On obtient la forme désirée, avec la fonction d'onde ψ et sa dérivée partielle $\partial_t\psi$ qui se transforme de la même manière en multipliant par $e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}$:

$$[\psi]_{R^0} \to [\psi]_{R^{A^t}} = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}[\psi]_{R^0}$$

$$[\partial_t]_{R^0}[\psi]_{R^0} \to [\partial_t]_{R^{A^t}}[\psi]_{R^{A^t}} = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(t)}([\partial_t]_{R^{A^t}})[\psi]_{R^0}$$

Dans R^{A^t}, on donne en forme abrégée la dérivée partielle :

$$[\partial_t]_{R^{A^t}} = [\partial_t]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^{A^t}}$$

En **conclusion**, lors du passage de R^0 à R^{A^t}, pour avoir une dérivée partielle qui se transforme de la même manière que la fonction d'onde, il faut ajouter un terme $-i\frac{q}{\hbar}A^t$ comparable à une énergie potentielle électrostatique et dont on peut faire dériver une force électrostatique.

IV.4 Etude simple d'une transformation de Jauge locale, cas de l'Espace

IV.4.1 Fonction d'onde

Soit une fonction d'onde dans le référentiel R^0 (assimilable au vide) :

$$[\psi]_{R^0} = e^{i\frac{q}{\hbar}(x-\theta(x))}$$

avec q la densité de charge électrique et $\theta(x)$ une phase fonction des positions.

Nota
Les termes de Temps ne sont pas ici indiqués.

$\frac{q}{\hbar}$ joue le rôle du vecteur d'onde K.
On peut voir les choses comme ça :
$K = \frac{p^x}{\hbar} = \frac{qA_0^x}{\hbar} = \frac{q}{\hbar}$ avec le potentiel magnétique $A_0^x = id$

IV.4.2 Transformation de Jauge locale

La transformation de Jauge locale est ici assimilable à un changement de référentiel de R^0 à R^{A^x}.
$A^x = \frac{\partial\theta(x)}{\partial x} = \partial_x\theta(x)$ est la quantité annulée ou soustraite de R^0 à R^{A^x}. A^x est de type potentiel vecteur magnétique.

Pour la dérivée covariante, on obtient une relation dans l'Espace semblable à celle du Temps :

$$[\partial_x]_{R^{A^x}}[\psi]_{R^{A^x}} = ([\partial_x]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^x\,]_{R^{A^x}})[\psi]_{R^{A^x}}$$

Nota
On peut généraliser à l'Espace-Temps la dérivée covariante :

$$[\partial_\mu]_{R^{A^\mu}}[\psi]_{R^{A^\mu}} = ([\partial_\mu]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^\mu\,]_{R^{A^\mu}})[\psi]_{R^{A^\mu}}$$

avec $\mu = t, x, y, z$

Pour avoir exactement une même forme de la dérivée covariante par rapport à t et à x, on inverse le signe usuel des trois composantes du potentiel vecteur magnétique.

On a la forme désirée, c'est-à-dire que la dérivée partielle $[\partial_x]_{R^0}[\psi]_{R^0}$ se transforme en $[\partial_x]_{R^{A^x}}[\psi]_{R^{A^x}}$ de la même manière que $[\psi]_{R^0}$ se transforme en $[\psi]_{R^{A^x}}$.

$$[\psi]_{R^0} \rightarrow [\psi]_{R^{A^x}} = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(x)}[\psi]_{R^0}$$

$$[\partial_x]_{R^0}[\psi]_{R^0} \rightarrow [\partial_x]_{R^{A^x}}[\psi]_{R^{A^x}} = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(x)}[\partial_x]_{R^{A^x}}[\psi]_{R^0}$$

Dans R^{A^x}, on donne en format abrégé la dérivée partielle :

$$[\partial_x]_{R^{A^x}} = [\partial_t]_{R^0} - i\frac{q}{\hbar}[A^x\,]_{R^{A^x}}$$

En **conclusion**, lors du passage de R^0 à R^{A^x}, pour avoir une dérivée partielle qui se transforme de la même manière que la fonction d'onde, il faut ajouter un terme $-i\frac{q}{\hbar}A^x$ comparable à une impulsion potentielle magnétique.

L'ajout d'une énergie potentielle électrostatique et d'une impulsion potentielle magnétique dans les dérivées partielles revient à ajouter une énergie potentielle généralisée électromagnétique :

$$Ep = q(A^t - (\vec{v}^a \cdot \vec{A}^a)$$

dans le Lagrangien. En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange, on peut faire dériver de l'énergie potentielle généralisée électromagnétique, la force électromagnétique. On reviendra sur cela dans le prochain mémoire.

IV.5 De l'équation d'onde d'Alembert (1746) à l'équation d'onde de Dirac (1928) dans un champ électromagnétique

IV.5.1 Généralités

On s'intéresse maintenant aux équations d'onde de Dirac d'une particule sans masse, puis d'une particule avec masse, puis d'une particule avec masse dans un champ électromagnétique.
En mettant ces équations au carré, on retrouve 3 équations d'onde, d'abord celle d'Alembert (dans le vide), puis celle de Klein Gordan libre, puis celle de Dirac dans un champ électromagnétique.

On souhaiterait que les passages d'une particule sans masse, à une particule avec masse, puis à une particule avec masse dans un champ électromagnétique, puissent s'interpréter comme des transformations de Jauge.
On verra que si c'est bien le cas pour le deuxième passage (de particule libre à particule dans un champ électromagnétique), ce n'est pas à priori le cas pour le premier passage (de particule sans masse à particule avec masse).

IV.5.2 Equation de Dirac libre d'une particule sans masse dans le référentiel R^0 (le vide)

On rappelle l'équation de Dirac libre d'une particule sans masse dans un référentiel R^0 (assimilable à du vide) :

$$(\beta[\partial_{ct}]_{R^0} + \beta\vec{\alpha} \circ [\vec{\partial}_x]_{R^0})\psi = 0$$

En élevant au carré cette équation, on retrouve l'équation d'onde d'Alembert dans R^0 :

$$([\partial_{ct}^2]_{R^0} - [\partial_x^2]_{R^0})\psi = 0$$

Rappel sur les matrices utilisées
On rappelle les 3 matrices 2 × 2 de Pauli utilisées par W. Pauli pour introduire le spin dans l'équation de Schrödinger (on y reviendra) :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^1 = \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^2 = \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^3 = \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On rappelle les matrices 4 × 4 β et α^i défini à partir des 3 matrices de Pauli :

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ $i = 1,2,3$

On utilise aussi fréquemment les matrices 4 × 4 γ^0 et γ^i :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \gamma^0 \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

IV.5.3 Equation de Dirac libre d'une particule relativiste avec masse (de type électron)

En 1928, lorsque P. Dirac propose son équation, son objectif n'est pas d'obtenir une équation qui élevée au carré, permette de retrouver l'équation d'onde d'Alembert, mais une équation qui élevée au carré, permettent de retrouver l'équation relativiste de dispersion d'A. Einstein :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

C'est-à-dire, si on traduit en fonction d'onde, on a l'équation d'onde de Klein Gordan :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

Dans le cadre de la mécanique ondulatoire relativiste de l'électron, P. Dirac propose l'équation d'onde d'une particule avec masse (de type électron), dite équation de Dirac libre :

$$(\beta[\partial_{ct}]_{R^c} + \beta\vec{\alpha} \circ [\vec{\partial}_x]_{R^c} + i\frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

Nota : le référentiel R^c est toujours le référentiel de base, mais il ne s'agit plus du vide R^0 puisqu'il y a présence d'une masse m.

On peut l'écrire en format abrégée :

$$(\gamma^\mu[\partial_\mu]_{R^c} + i\frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

La fonction d'onde ψ utilisée par P. Dirac est ici un spineur à 4 composantes (on parle aussi de bispineur à deux composantes chacune). Comme l'équation d'onde non relativiste de Pauli proposée quelques mois plus tôt, l'équation de Dirac inclut la notion de spin via les 3 matrices de Pauli.

En élevant au carré l'équation de Dirac libre, on obtient l'équation d'onde de Klein Gordan libre :

$$([\partial_{ct}^2]_{R^c} - [\partial_x^2]_{R^c} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi = 0$$

$$([\partial_\mu^2]_{R^c} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi = 0$$

$$\text{avec } \partial_\mu^2 = \partial_{ct}^2 - \nabla^2, \mu = t, x, y, z$$

Nota 1, explication succincte de la méthode de P. Dirac

P. Dirac cherche une équation d'onde qui mise au carré, permette de retrouver :

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

$$\text{ou } E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

En 1928, il suppose l'existence de coefficients A, B, C, D qui répondent à cet objectif et qui vérifient les conditions :

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t{}^2 = (A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + \frac{i}{c}D\partial_t)(A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + \frac{i}{c}D\partial_t)$$
$$AB + BA = 0$$
$$A^2 = B^2 = \ldots = 1$$
$$(A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + \frac{i}{c}D\partial_t)\psi = k\psi$$
$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t{}^2)\psi = k^2\psi$$

Il trouve pour A, B, C, D des matrices 4×4 égales à :

$$A = i\beta\alpha^1$$
$$B = i\beta\alpha^2$$
$$C = i\beta\alpha^3$$
$$D = \beta$$

Nota 2 sur le passage d'Alembert à Klein Gordan (c'est-à-dire de Dirac libre sans masse à Dirac libre avec masse)
Pour passer de Dirac libre sans masse à Dirac libre avec masse, on ajoute le terme $i\frac{mc}{\hbar}$. On aimerait assimiler cet ajout à une transformation de Jauge locale de R^0 à R^c :

$$\beta[\partial_{ct}]_{R^c} + \beta\vec{\alpha} \circ [\vec{\partial}_x]_{R^c} = \beta[\partial_{ct}]_{R^0} + \beta\vec{\alpha} \circ [\vec{\partial}_x]_{R^0} - i\frac{m}{\hbar}c$$

Malheureusement, ça ne marche pas car on ne retrouve pas dans le terme $i\frac{m}{\hbar}c$ une énergie impulsion potentielle.
On perçoit ici un point non éclairci de la théorie quantique relativiste, car le référentiel de base n'est pas R^0 (le vide), mais un référentiel R^c qui contient déjà une masse.

IV.5.4 Equation de Dirac d'une particule relativiste avec masse (de type électron) dans un champ électromagnétique

On rappelle la dérivée covariante lors d'une transformation de Jauge locale de R^c à R^{A^μ}, avec A^μ le quadrivecteur potentiel électromagnétique annulé (ou soustrait) et $\frac{q}{\hbar}$ la quantité conservée :

$$[\partial_\mu]_{R^{A^\mu}} = [\partial_\mu]_{R^c} - i\frac{q}{\hbar}A^\mu$$

avec $\mu = t, x, y, z$

Pour un électron libre, on a l'équation de Dirac dans R^c :

$$(\beta[\partial_{ct}]_{R^c} + \beta\vec{\alpha} \circ [\vec{\partial}_x]_{R^c} + i\frac{m}{\hbar}c)\psi = 0$$

Pour un électron dans un champ électromagnétique, on a l'équation de Dirac dans R^{A^μ} :

$$(\beta([\partial_{ct}]_{R^{A^\mu}} + i\frac{q}{\hbar}A^t) + \beta\vec{\alpha} \circ ([\vec{\partial}_x]_{R^{A^\mu}} + i\frac{q}{\hbar}A^x) + i\frac{m}{\hbar}c)\psi = 0$$

Nota sur le Lagrangien et l'équation d'Euler-Lagrange
Précédemment, on a souligné les liens conceptuels entre la mécanique newtonienne et les théories de Jauge locale utilisées en Physique quantique.

Observons maintenant qu'à partir des Lagrangiens L et de l'équation d'Euler-Lagrange, on peut retrouver à la fois :

- l'équation invariante à respecter de la mécanique newtonienne : $\dot{p}_i = F_i$ (avec $i = x, y, z$),
- l'équation invariante à respecter de la Physique quantique relativiste : $\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$.

Historiquement, le Lagrangien L est introduit en 1788 par Joseph-Louis Lagrange pour une nouvelle formulation de la mécanique newtonienne à partir du principe de moindre action. Depuis, le Lagrangien est utilisé dans de nombreuses théories physiques, en particulier en Physique quantique.

En mécanique newtonienne, on définit un Lagrangien $L = E_c - E_p = T - V$ (différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle).
L'application de l'équation d'Euler-Lagrange à ce Lagrangien permet de retrouver le principe fondamental de la dynamique de Newton :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_i}) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_i} = 0$$

On a la quantité de mouvement généralisée :

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_i}$$

On a la force généralisée :

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

On retrouve :

$$\dot{p}_i = F_i$$

En Physique quantique relativiste, on définit une densité Lagrangienne :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow L(\varphi, \partial_\mu \varphi, x_\mu)$$

Avec $\mu = t, x, y, z$

La densité Lagrangienne $L(\varphi, \partial_\mu \varphi, x_\mu)$ vérifie aussi l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

On a la densité Lagrangienne d'un fermion libre (par abus de langage, on parle tout simplement de Lagrangien d'un fermion libre) :

$$L_{libre} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi$$

En appliquant à ce Lagrangien l'équation d'Euler-Lagrange, on retrouve l'équation d'onde de Dirac :

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi$$

En mettant au carré, on retrouve l'équation de Klein Gordan :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\psi$$

IV.6 Equations d'onde de Schrödinger (1925), électron non relativiste sans spin

IV.6.1 Généralités

En Physique quantique non relativiste, l'équation d'onde utilisée comme invariant est celle de Schrödinger libre :

$$\Delta\psi - \frac{i2m}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

On va voir que par une transformation de Jauge locale, on passe de l'équation de Schrödinger libre à l'équation de Schrödinger usuelle.

Nota
On est ici dans le cas non relativiste, car on se place implicitement dans un référentiel où la particule électron est immobile dans l'Espace et où l'onde électron est stationnaire.

IV.6.2 Equation d'onde de Schrödinger libre

On part de la relation de dispersion (non relativiste) reliant l'énergie à l'impulsion :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

En utilisant les substitutions usuelles de la mécanique quantique, on trouve dans R^c l'équation de Schrödinger libre :

$$i\hbar[\partial_t]_{R^c} = \frac{1}{2m}(-i\hbar[\partial_x]_{R^c})^2$$

Nota
R^c est ici également un référentiel où il subsiste une masse m. Il se différentie à priori de celui vu dans le cas relativiste.

IV.6.3 Equation d'onde de Schrödinger

On effectue la transformation de Jauge locale (changement de référentiels de R^c à R^{A^μ}) :

$$[\psi(\vec{x},t)]_{R^{A^\mu}} = e^{i\frac{q}{\hbar}\theta(\vec{x},t)}[\psi(\vec{x},t)]_{R^0}$$

$$[A^\mu\ ]_{R^{A^\mu}} = [A^t\ ]_{R^c} - \partial_\mu\theta(\vec{x},t) = -\partial_\mu\theta(\vec{x},t)$$

On définit comme précédemment les dérivées covariantes :

$$[\partial_t]_{R^{A^\mu}} = [\partial_t]_{R^c} - i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^{A^\mu}}$$

$$[\partial_x]_{R^{A^\mu}} = [\partial_x]_{R^c} - i\frac{q}{\hbar}[A^x\ ]_{R^{A^\mu}}$$

Dans R^{A^μ}, on obtient l'équation d'onde :

$$i\hbar([\partial_t]_{R^{A^\mu}} + i\frac{q}{\hbar}[A^t\ ]_{R^{A^\mu}}) = \frac{1}{2m}(-i\hbar([\partial_x]_{R^c} + i\frac{q}{\hbar}[A^x\ ]_{R^{A^\mu}}))^2$$

$$i\hbar[\partial_t]_{R^{A^\mu}} - q[A^t\ ]_{R^{A^\mu}} = \frac{1}{2m}(-i\hbar[\partial_x]_{R^{A^\mu}} + q[A^x\ ]_{R^{A^\mu}})^2$$

On retrouve dans $R^{A^{\mu}}$ l'équation d'onde de Schrödinger (avec en plus le terme $q[A^x]_{R^{A^{\mu}}}$ qui correspond à une impulsion potentielle magnétique) :

$$i\hbar[\partial_t]_{R^{A^{\mu}}} = \frac{1}{2m}(-i\hbar[\partial_x]_{R^{A^{\mu}}} + q[A^x]_{R^{A^{\mu}}})^2 + q[A^t]_{R^{A^{\mu}}}$$

IV.7 Equations d'onde de Pauli (1927), électron non relativiste avec spin

IV.7.1 Equation d'onde non relativiste de Pauli, électron doté d'un spin dans un champ magnétique

En 1922, Otto Stern et Walther Gerlach constatent l'influence du champ magnétique sur des atomes d'argent. En 1925, pour expliquer ce phénomène (et d'autres comme le fin doublement des raies en spectroscopie), S. Goudsmit et G. Uhlenbeck proposent que les particules sont dotées d'un moment cinétique sur elle-même et d'un moment magnétique sur elle-même. Ils appellent cette nouvelle propriété le spin, de tourner rapidement en anglais.

En 1927, W. Pauli modifie le modèle de l'électron de Schrödinger et y intègre la notion de spin. Dans l'équation d'onde non relativiste de Pauli, il décrit un électron doté d'un spin dans un champ magnétique extérieur.

A partir des trois matrices 2×2 dites de Pauli σ^1, σ^2, σ^3, W. Pauli définit un opérateur de moment cinétique de spin de l'électron :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir de cet opérateur de moment cinétique de spin $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, W. Pauli définit un opérateur de moment magnétique de spin de l'électron :

$$\vec{\mu}_S = \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

W. Pauli travaille sur des matrices 2×2. Il définit pour la fonction d'onde ψ un spineur à 2 composantes : ψ_1 et ψ_2 (ces deux composantes étant de même type que la fonction d'onde de Schrödinger).

Le moment magnétique de spin peut être assimilé à un petit aimant. Soit l'énergie potentielle d'interaction entre le moment magnétique de spin de l'électron et un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur dans lequel est plongé l'électron :

$$E_p = \vec{\mu}_S \cdot \vec{B} = \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

On obtient l'équation d'onde de Pauli ici écrite sous forme d'opérateurs :

$$(\frac{1}{2m_e}(\vec{P} + e\vec{A}^x)^2 - eA^t + \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} - E)\psi = 0$$

Dans cette équation d'onde de Pauli figure :

- d'une part l'énergie d'une particule sans spin plongée dans un champ électromagnétique :

$$E_1 = \frac{1}{2m_e}(\vec{P} + e\vec{A^x})^2 - eA^t$$

, c'est-à-dire la partie équation de Schrödinger,

- d'autre part l'énergie d'interaction entre le moment magnétique de spin et le champ magnétique $\vec{B}$ extérieur :

$$E_2 = \vec{\mu}_S \cdot \vec{B} = \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

, c'est-à-dire la partie ajoutée par W. Pauli.

Nota 1 sur le spin
Soulignons que la notion de spin n'est pas spécifiquement relativiste. En effet, on la retrouve aussi bien dans l'équation d'onde de Dirac que dans celle de Pauli. Elle apparait via la constante $\frac{\hbar}{2}$ et les matrices de Pauli σ_1, σ_2, σ_3 qui sont présentes dans l'équation d'onde de Dirac et dans celle de Pauli.

Nota 2 sur relativiste et non relativiste
On comprend mal pourquoi il faut distinguer deux cas : l'un relativiste avec les équations d'onde de Klein Gordan et de Dirac dans un champ électromagnétique, l'autre « classique » ou non relativiste avec les équations d'onde de Schrödinger et de Pauli.
Le cas non relativiste est souvent présenté comme un cas limite du cas relativiste. Le passage reste tout de même non trivial entre l'équation d'onde de Pauli et celle de Dirac. Au lieu d'un cas limite l'un de l'autre, ne faut-il pas plutôt voir deux cas différents qualitativement ?

Nota 3 sur le signe du potentiel vecteur magnétique
Dans cet essai, on utilise un signe opposé pour le potentiel vecteur magnétique afin d'avoir un même type de construction pour le champ électrique et le champ magnétique (on y reviendra dans le prochain mémoire). On a donc pour l'équation d'onde de Pauli :

$$(\frac{1}{2m_e}(\vec{P} - e\vec{A^x})^2 - eA^t + \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} - E)\psi = 0$$

IV.7.2 Transformation de Jauge locale

Partons dans R^{A^μ} de l'équation d'onde de Schrödinger :

$$i\hbar[\partial_t]_{R^{A^\mu}} = \frac{1}{2m}(-i\hbar[\partial_x]_{R^{A^\mu}} + q[A^x]_{R^{A^\mu}})^2 + q[A^t]_{R^{A^\mu}}$$

Prenons pour l'impulsion potentielle :

$$q[A^x]_{R^{A^\mu}} = -e\vec{A^x}$$

et pour l'énergie potentielle :

$$q[A^t]_{R^{A^\mu}} = -eA^t + \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

On retrouve ainsi l'équation d'onde de Pauli à partir de celle de Schrödinger :

$$i\hbar[\partial_t]_{R^{A^\mu}} = \frac{1}{2m}(-i\hbar[\partial_x]_{R^{A^\mu}} - e\vec{A^x})^2 - eA^t + \frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

IV.8 Conclusion du mémoire

Dans ce 1er mémoire, on a voulu souligner que de la mécanique newtonienne et des théories de Jauge locale utilisées en Physique quantique, se dégageait un principe très général dont l'objectif était l'invariance de lois de la Nature lors de changements de référentiels ou lors de transformations de Jauge locale.

Dans le cas de la mécanique newtonienne, pour conserver cette invariance, lorsqu'annule une rotation, on ajoute les forces d'inertie centrifuge et de Coriolis. Dans le cas des théories de Jauge locale, pour conserver cette invariance, lorsqu'annule une phase de la fonction d'onde, on ajoute un quadrivecteur énergie impulsion potentielle associé à une énergie d'interaction. Dans le cas de l'interaction électromagnétique, l'énergie d'interaction est justement égale à l'énergie potentielle généralisée dont dérive la force électromagnétique.

Dans le prochain mémoire, toujours dans cet objectif d'invariance, on s'attachera à montrer que lorsqu'on annule des « rotations généralisées », on doit ajouter à la fois les forces d'inertie centrifuge et de Coriolis, et la force électromagnétique.
On réfléchira également à une théorie plus générale qui engloberait changements de référentiels et transformations de Jauge locale.

Bibliographie du mémoire 1

Sur la théorie de la relativité, le principe d'invariance des lois de la Nature et le champ gravitationnel

[1] A. Einstein, La relativité. Gauthier-Villars, Paris, 1956 pour l'édition en langue française, 1916 pour la 1ère édition en langue allemande

[2] A. Einstein, Physique, philosophie, politique, textes choisis et commentés par Françoise Balibar. Seuil, Paris, 2002 (pour l'édition en livre de poche)

Sur les forces d'inertie en mécanique newtonienne

[3] H. Lumbroso, problème résolus de mécanique du point et des systèmes de ponts. Dunod, Paris, 1984

Sur le modèle de l'électron de Bohr

[4] N. Bohr, On the Constitution of Atoms and Molecules. Philosophical Magazine 26, 1913, p.1-24

[5] R. Didier, Chimie générale. Technique et documentation, Paris, 1984

Sur le modèle de l'électron de Broglie

[6] L. de Broglie, thèse de 1924

[7] L. de Broglie, The wave nature of the electron. Nobel Lecture, 1929

[8] L. de Broglie, Physique nouvel et quanta. Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris, 1937

[9] L. de Broglie, Eléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire, Paris, Gauthier-Villars, 1953

Sur le modèle de l'électron de Schrödinger

[10] Alain Laverne, A propos de l'équation de Schrödinger. chapitre II, Paris

[11] R. Didier, Chimie générale. Technique et documentation, Paris, 1984

[12] Erwin Schrödinger, Mémoires sur la mécanique ondulatoire. Félix-Alcan, Paris, 1933, traduction française par Alexandre Proca des mémoires historiques de 1926

Sur le modèle de l'électron de Pauli

[13] Wikipedia, Pauli equation

[14] Jean Hladik, Michel Chrysos, Pierre-Emmanuel Hladik, Lorenzo Ugo Ancarani, Mécanique quantique Atomes et noyaux Applications technologiques. Dunod, Paris, 1997

Sur le modèle de l'électron de Dirac

[15] Wikipedia, Dirac equation

Sur les théories de Jauge locale

[16] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL

[17] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007

Table des matières

Mémoire 2 Vecteurs rotations « généralisées » et champs dans un plan spatio-temporel

Résumé du mémoire
Ce 2ème mémoire proposera davantage de conjonctures que le 1er. On reviendra sur les analogies entre gravitation et électrostatique (travaux de la fin du 18ème, début du 19ème siècle), puis entre mécanique des fluides et magnétisme (travaux du 19ème siècle), enfin entre mécanique des milieux continus et Electrodynamique quantique relativiste (travaux du milieu du 20ème siècle).
A partir de ces analogies, on proposera les notions de champ pulsation $\vec{\Omega}$ et de champ vecteur d'onde $\vec{K}$. Ces deux champs s'appliqueront respectivement dans un plan spatial et dans un plan spatiotemporel. Par la suite, on tentera de construire toute force de la physique classique sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis, avec lors d'un changement de référentiels une quantité conservée et une quantité annulée. Cette quantité annulée s'apparente à un vecteur rotation « généralisée » (avant le changement de référentiels) ou à un champ (après le changement de référentiels). On fera ainsi correspondre annulation de rotations « généralisées » et ajout de forces dans le principe fondamental de la dynamique.

Ce mémoire sera également l'occasion de revenir sur la physique du 19ème siècle, physique qui s'est particulièrement impliquée dans l'électricité et le magnétisme. Entre autres seront évoqués la loi de Charles-Augustin Coulomb pour l'électrostatique (1785), l'équation de Siméon Denis Poisson (1813) (dont A. Einstein s'est largement inspiré pour sa théorie de la Relativité Générale), les travaux de Michael Faraday sur l'induction magnétique (à partir de 1821), la force magnétique de Pierre-Simon Laplace (à partir de 1820) précurseur de la force magnétique de Hendrik Antoon Lorentz (travaux de la fin du 19ème), ainsi que la force d'inertie de Gustave Coriolis (1835).

Chapitre I Analogies gravitation newtonienne et électrostatique coulombienne

Objet du chapitre
On rappelle les principales analogies entre gravitation et électrostatique, analogies qui ont souvent permis un enrichissement mutuel de ces deux disciplines de la physique.

I.1 Potentiel gravitationnel newtonien et potentiel électrique coulombien

I.1.1 Rappels historiques sur la gravitation

La théorie de la gravitation se développe au cours du 17ème siècle sur la base d'observations astronomiques. Les premières avancées notables sont dues à Johannes Kepler qui de 1609 à 1618 énonce ses trois lois sur les mouvements des planètes.

La 1ère loi stipule que la trajectoire des planètes autour du Soleil est elliptique, avec le Soleil occupant l'un des 2 foyers de l'ellipse.
La 2ème loi stipule que les aires balayées par le rayon vecteur d'une planète, le sont dans des durées égales.
La 3ème loi stipule que le carré de la période T de révolution de la planète, varie comme le cube du demi-grand axe a de l'ellipse :

$$\frac{T^2}{a^3} = cons\,tan\,t\,e$$

En 1687, près de 80 ans après J. Kepler, Isaac Newton publie en latin l'ouvrage sans doute le plus célèbre de la Physique. Il s'agit de *Philosophiae naturalis principia mathematica*, qu'on appelle souvent simplement *Principia* : les Principes. Dans l'ouvrage, à partir des principes physiques et mathématiques posés par I. Newton, les 3 lois de Kepler sont retrouvées et expliquées. Véritablement révolutionnaire, *Principia* montre que la nature de l'univers peut être décrite de manière simple par des équations mathématiques.

Dans *Principia*, I. Newton unifie deux notions qui a priori n'ont rien à voir :
- le mouvement elliptique des planètes (1ère loi de Kepler),
- la chute des corps sous l'effet d'une force gravitationnelle qui décroit avec la distance en $\frac{1}{r^2}$ depuis la source (une masse) selon la loi universelle de la gravitation de Newton :

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

I. Newton réunit mouvements et forces via son célèbre principe de la dynamique (appelé aussi 2ème loi de Newton) :

$$\dot{\vec{p}} = \Sigma\vec{F}$$

Nota sur l'unification d'I. Newton
En quelque sorte, I. Newton a unifié 2 phénomènes physiques à priori distincts et les a fait correspondre à une même notion physique appelée la force. Il a pu ainsi comparer ces 2 phénomènes.
Le premier phénomène est la répulsion vers l'extérieur à laquelle est soumis un corps lors d'un mouvement de rotation (ou plus généralement un mouvement elliptique). Pour quantifier ce phénomène, on peut se placer dans le référentiel en rotation et utiliser la force d'inertie centrifuge.
Le deuxième phénomène est l'attraction à laquelle sont sujets deux corps massiques entre eux. Pour quantifier ce phénomène, I. Newton a introduit la force gravitationnelle.

On ne compare donc pas des choux et des carottes, mais 2 phénomènes qui sont de même nature physique : la force.
Certains esprits (dont A. Einstein faisait partie) ont tout de même été chagrinés qu'on compare 2 choses qui ne sont pas exactement de même nature : une force gravitationnelle et une force d'inertie centrifuge, cette dernière qualifiée par certains de *pseudo force* car ajoutée lors d'un changement de référentiels.
En proposant dans cet essai, que toute force se ramène à une *pseudo force* ajoutée lors d'un changement de référentiels, on évacue la distinction entre force et pseudo force. On peut aussi en tirer des conséquences importantes sur la notion de masse.

I.1.2 Rappels historiques sur l'électrostatique

A la fin du 18ème, début 19ème, l'électricité et en particulier l'électrostatique progressent rapidement sur la base d'expériences de laboratoire ou de terrain. Les pionniers sont par exemple Ewald Georg von Kleist avec la bouteille dite de Leyde en 1745 (ancêtre du condensateur) ou Luigi Galvani avec le courant électrique (concept d'électricité animale).

Bien que les observations électriques s'effectuent fréquemment en laboratoire et sont non tournées vers les astres, un peu curieusement, les développements théoriques de l'électricité s'effectuent souvent en analogie avec la gravitation newtonienne. De nouvelles notions sont proposées, comme le potentiel, qui vient à la fois enrichir la théorie électrostatique et la théorie gravitationnelle.

Dans les années 1780, à l'aide de balance de torsion, Charles-Augustin Coulomb effectue des expériences sur des charges électriques. A l'instar de la force gravitationnelle, il mesure une force électrostatique qui décroit avec la distance en $\frac{1}{r^2}$ depuis la source (une charge électrique). Néanmoins, cette force n'est pas toujours attractive : elle est répulsive lorsque les charges électriques sont de même nature et attractive lorsqu'elles sont de nature opposée. On a :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Egalement dans les années 1780, Pierre-Simon de Laplace développe la notion de potentiel. Il montre que dans le vide, un potentiel satisfait à l'équation différentielle :

$$\Delta\varphi^t = \nabla^2\varphi^t = \frac{\partial^2\varphi^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi^t}{\partial z^2} = 0$$

avec Δ le laplacien.

En 1813, Siméon Denis Poisson poursuit les travaux de P-S. Laplace et publie un mémoire sur le potentiel scalaire newtonien. Comme ses prédécesseurs, il s'appuie sur des analogies entre l'électrostatique et la gravitation pour développer la notion d'un potentiel qui décroit en $\frac{1}{r}$ depuis un point d'origine. On a par exemple pour le potentiel gravitationnel newtonien :

$$V^t = -G\frac{m_1}{r}$$

et pour le potentiel électrique coulombien :

$$A^t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

C'est également dans ce mémoire qu'est introduite l'équation source potentiel de Poisson :

$$f = \Delta\varphi^t$$

avec f une fonction représentant la source et φ^t un potentiel scalaire.

Dans les années 1830, Carl Friedrich Gauss reprend les travaux de S-D. Poisson. Il s'inspire également des travaux de Leonhard Euler sur la mécanique des fluides (années 1750, champ des vitesses d'écoulement du fluide), de M. Faraday sur le magnétisme (années 1830, champ magnétique visualisable sur des limailles de fer orientées).
Avec d'autres, C. F. Gauss généralise la notion féconde de champ à la gravitation et à l'électrostatique. Il propose qu'une densité de masse ou de charge électrique (correspondant à la source), génèrent respectivement un champ gravitationnel et un champ électrique divergents. Il donne ainsi leur forme moderne aux relations sources champs dites gaussiennes.

I.1.3 Résumé des analogies

On rappelle dans le tableau suivant les principales analogies entre les lois de la gravitation newtonienne et de l'électrostatique coulombienne.

	Gravitation newtonienne	Electrostatique
Source	Masse m^t	Charge électrique q^t
Constante	$-4\pi G$	$\frac{1}{\varepsilon_0}$
Potentiel	$V^t = -G\frac{m_1}{r}$	$A^t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$
Energie potentielle	$Ep = m_2 V^t$ $Ep = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	$Ep = q_2 A^t$ $Ep = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$
Champ	$Gr = -\frac{\partial V^t}{\partial r}$ $\vec{G}r = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_r$	$Es = -\frac{\partial A^t}{\partial r}$ $\vec{E}s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}_r$
Force	$\vec{F} = m_2\vec{G}r$ $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F} = q_2\vec{E}s$ $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$
Relations sources potentiels de Poisson	$4\pi G\rho_{mas} = \Delta V^t$	$-\frac{\rho_{éléc}}{\varepsilon_0} = \Delta A^t$
Relation sources champs de Gauss	Intégrale : $\oiint_{\Sigma}\vec{G}r(M).d^2\vec{S} = -\iint_V 4\pi G\rho_{mas}dV$ $= -4\pi G M_{int}$ Locale : $div\vec{G}r = -4\pi G\rho_{mas}$	Intégrale : $\oiint_{\Sigma}\vec{E}s(M).d^2\vec{S} = \iint_V \frac{\rho_{éléc}}{\varepsilon_0}dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ Locale : $div\vec{E}s = \frac{\rho_{éléc}}{\varepsilon_0}$

Remarque sur un quadrivecteur potentiel vitesse
A l'instar du potentiel électrique A^t qui est la composante temporelle d'une quadrivecteur potentiel électromagnétique : (A^t, A^x, A^y, A^z), on proposera dans ce mémoire que le potentiel newtonien V^t soit la composante temporelle d'un quadrivecteur potentiel vitesse : (V^t, V^x, V^y, V^z). Les vitesses V^x, V^y, V^z peuvent s'interpréter comme une « vitesse dans l'Espace », le potentiel newtonien V^t pourrait s'interpréter comme une « vitesse dans le Temps ».

I.2 Les notions d'énergie et de puissance en gravitation et en électrostatique

Ma femme est professeur de physique. Pour expliquer la différence entre puissance et énergie, elle utilise une métaphore qui m'a toujours paru instructive et pédagogique. Cette métaphore est d'autant

plus utile qu'elle souligne également les ressemblances entre gravitation et électrostatique. On retrouve en effet dans ces deux disciplines les deux mêmes notions : puissance et énergie.

Prenons l'exemple d'un immeuble de 10 étages desservi par un escalier et un ascenseur. Une jeune femme se trouve au rez-de chaussée et doit monter jusqu'au 10ème étage avec ses paquets. La même énergie sera dépensée par la jeune femme qu'elle utilise l'ascenseur ou l'escalier.
Par contre, la puissance sera différente. Avec l'ascenseur, la puissance utilisée sera bien plus importante qu'avec l'escalier. En effet, la durée de montée sera bien plus courte avec l'ascenseur qu'avec l'escalier.

On liste les différentes notions qu'on retrouve aussi bien en gravitation qu'en électrostatique.

Nombre de paquets
Masse dm ou charge dq

Flux de paquets
Flux de masse $I_m = \frac{dm}{dt}$ ou courant électrique $I_q = \frac{dq}{dt}$
Hauteur dr de l'immeuble

Champ
Champ gravitationnel newtonien : Gr
Champ électrostatique : Es

Différence de potentiels
Différence de potentiels gravitationnels newtoniens

$$dV^t = \vec{G}r \cdot d\vec{r}$$

Différence de potentiels électriques (tension)

$$U = dA^t = \vec{E}s \cdot d\vec{r}$$

Force
Force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{Gr} = dm \times \vec{G}r$$

Force électrostatique :

$$\vec{F}_{Es} = dq \times \vec{E}s$$

Puissance
Puissance gravitationnelle :

$$P_{Gr} = I_m \times dV^t = \frac{dm}{dt} \times dV^t$$

$$P_{Gr} = \frac{dm}{dt} \times \vec{G}r \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{Gr} \cdot \vec{v}$$

$$\text{avec } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Puissance électrique :

$$P_{Es} = I_q \times U = I_q \times dA^t = \frac{dq}{dt} \times dA^t$$

$$P_{Es} = \frac{dq}{dt} \times \vec{E}s \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{Es} \cdot \vec{v}$$

Energie

Energie gravitationnelle :

$$dE_{Gr} = P_{Gr} \times dt = dm \times dV^t = dm \times \vec{G}r \cdot d\vec{r}$$

$$dE_{Gr} = \vec{F}_{Gr} \cdot d\vec{r}$$

Energie électrique :

$$dE_{Es} = P_{Es} \times dt = dq \times dA^t = dq \times \vec{E}s \cdot d\vec{r}$$

$$dE_{Es} = \vec{F}_{Es} \cdot d\vec{r}$$

I.3 Conclusion du chapitre

Alors que la gravitation et l'électrostatique se sont développés sur des terrains expérimentaux très différents, l'observation des planètes pour le premier, des expériences en laboratoire ou sur le terrain pour le deuxième, les théories les décrivant partagent de nombreuses notions communes, comme celles de l'énergie, de la puissance, de la source, du champ ou d'un potentiel décroissant depuis la source en $\frac{1}{r}$. Les théories électriques et gravitationnelles se sont souvent influencées et ont permis un enrichissement mutuel.

La notion de courant électrique proposé entre autres par L. Galvani, s'inspirait de la notion de fluide. Dans le prochain chapitre, on voir que le magnétisme s'est particulièrement développé en analogie avec la mécanique des fluides.

Chapitre II Analogies mécanique des fluides et magnétisme, analogies $\vec{\Omega}$ et $\vec{B}$

Objet du chapitre

Au début du 19ème siècle, parallèlement à l'électrostatique, un autre domaine de recherches est en plein essor, c'est le magnétisme. Avec la loi de Biot et Savart (1820), on retrouve un potentiel magnétique qui décroit en $\frac{1}{r}$ comme le potentiel gravitationnel newtonien et le potentiel électrique coulombien. Cependant, les ressemblances entre le magnétisme et la gravitation sont bien moins fortes qu'entre l'électrostatique et la gravitation. Cette fois-ci, c'est surtout par des analogies entre la mécanique des fluides et le magnétisme que cette dernière discipline va progresser.

Dans ce chapitre, on va rappeler les principales analogies entre la mécanique des fluides (ainsi que la mécanique au sens large) et le magnétisme, entre le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ ou rotation $\vec{\Omega}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ nous intéresse, car son annulation lors d'un changement de référentiels est lié à l'ajout de forces d'inertie.

On terminera sur un rappel de l'énergie potentielle généralisée électromagnétique, qui à partir de l'équation d'Euler-Lagrange, permet de retrouver la force électromagnétique.

II.1 Loi de Biot et Savart (1820), analogies gravitation, électrostatique et magnétisme

Dans les années 1820, le danois Hans Christian Ørsted découvre un lien entre électricité et magnétisme à travers des expériences restées célèbres. Par exemple, il observe qu'un fil transportant un courant électrique est capable de faire bouger l'aiguille aimantée d'une boussole. C'est-à-dire qu'un courant électrique peut être la source d'un champ magnétique capable de faire bouger l'aiguille.

Quelques mois plus tard, suite à une série d'expériences, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart proposent la loi donnant le champ magnétique créé par une distribution de courants électriques. Comme pour le champ gravitationnel et le champ électrique, les 2 expérimentateurs trouvent un champ magnétique qui décroit dans l'Espace en $\frac{1}{r^2}$ depuis une source de courants électriques. La loi diffère néanmoins des autres champs, puisqu'on retrouve un produit vectoriel :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Pour une distribution volumique de courants, on a :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_\tau \frac{\vec{I}d\tau \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

A comparer avec les champs électrostatique et gravitationnel :

$$\vec{E}s(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_\tau \frac{\rho_{éléc} d\tau \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$$\vec{G}r(r) = -G \iint_\tau \frac{\rho_{mas} d\tau \times \vec{u}_r}{r^2}$$

On a les analogies suivantes, moins nombreuses qu'entre la gravitation et l'électrostatique :

	Gravitation newtonienne	Electrostatique	Magnétisme
Source	Masse m	Charge q	Courant I
Constante	$-4\pi G$	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	μ_0
Potentiel	$V^t = -G\frac{m}{r}$	$A^t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$\vec{A}^{x,y,z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}}{r}$
Champ	$Gr = -gradV^t$ $\vec{G}r(r) = -G\iint_\tau \frac{\rho_{mas}d\tau \times \vec{u}_r}{r^2}$	$Es = -gradA^t$ $\vec{E}s(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_\tau \frac{\rho_{éléc}d\tau \times \vec{u}_r}{r^2}$	$\vec{B}(r) = r\vec{o}t\vec{A}^{x,y,z}$ $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_\tau \frac{\vec{I}d\tau \wedge \vec{u}_r}{r^2}$
Poisson, relation source potentiel	$4\pi G\rho_{mas} = \Delta V^t$	$-\frac{\rho_{éléc}}{\varepsilon_0} = \Delta A^t$	$-\mu_0\vec{J} = \Delta\vec{A}$

Nota
En intégrant la loi de Biot et Savart sur une boucle fermée Γ quelconque (qui a priori n'est pas un circuit électrique), on retrouve le théorème d'Ampère qui décrit la relation entre un champ magnétique et un courant électrique :

$$\oint_\Gamma \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{int}$$

II.2 Analogies entre mécanique des fluides et magnétisme

II.2.1 Rappels historiques

Dans la 1ère moitié du 19ème siècle, les recherches sur le magnétisme connaissent de grands progrès, en particulier grâce aux travaux de Michael Faraday et d'André-Marie Ampère qui tous deux s'intéressent à deux domaines différents du magnétisme.

A.-M. Ampère étudie la correspondance entre boucle de courant électrique et champ magnétique, que l'on regroupe dans la magnétostatique.
M. Faraday étudie la correspondance entre variation du flux du champ magnétique à travers un circuit et apparition d'un courant électrique induit dans ce circuit, que l'on regroupe dans les phénomènes d'induction.

Dans les années 1860, lors d'une vaste synthèse, James Clerk Maxwell transcrit les travaux de M. Faraday et d'A.-M. Ampère en équations mathématiques. Pour cette synthèse, J. C. Maxwell s'inspire fréquemment de la mécanique des fluides. Par exemple, il fait correspondre le champ magnétique à la vitesse d'un fluide.

Intéressons-nous maintenant à deux analogies entre la mécanique des fluides et le magnétisme.
La première se fait entre le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et le courant $\mu_0\vec{J}$, tous deux considérés comme des *sources*, ainsi qu'entre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le champ magnétique $\vec{B}$, tous deux considérés comme des *champs*. On se place dans le cas de la magnétostatique, où généralement les sources (courants ou aimants) sont connues, et où le champ magnétique $\vec{B}$ généré par ces sources est constant dans le Temps.
La deuxième se fait entre le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et le champ $\vec{B}$, tous deux considérés comme des *champs*.

Dans la suite de ce mémoire, on s'appuiera surtout sur la 2ème analogie (entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{B}$). La première analogie conserve toutefois tout son intérêt, car elle indique cette ambivalence entre une grandeur physique (ici $\vec{\Omega}$) qui peut être à la fois *source* et *champ*.

II.2.2 Analogie entre vecteur tourbillon $2\vec{\Omega}$ et courant $\mu_0\vec{j}$ tous deux considérés comme des sources, ainsi qu'entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$ tous deux considérés comme des champs

En 1893, Henri Poincaré publie un ouvrage sur la mécanique des fluides intitulé *Théorie des Tourbillons*. L'ouvrage est issu de leçons professées en 1891-92. S'inspirant des travaux de J. C. Maxwell, H. Poincaré y conduit des analogies entre l'hydrodynamique (écoulement rotationnel, permanent et incompressible) et la magnétostatique. Dans un article annexe, il propose les analogies suivantes.

Soit $\vec{v}(M)$ la vitesse locale en un point M, d'un fluide parfait incompressible caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$. Soit $\vec{j}$ le vecteur densité de courant.

Puisque le fluide est incompressible, on a $div\vec{v} = 0$.
Suivant $div\vec{v} = 0$, on peut faire dériver $\vec{v}(M)$ d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ avec $\vec{v} = r\vec{o}t\vec{A}$.

Selon Maxwell-Thomson (ou Maxwell-flux), on a : $div\vec{B} = 0$.
On peut faire dériver $\vec{B}(M)$ d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ avec $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$.

On résume les analogies de H. Poincaré dans le tableau ci-dessous.

	Hydrodynamique (rotationnel, permanent, incompressible)	**Magnétostatique**
Potentiel	$\vec{A}$	$\vec{A}$
Source	$2\vec{\Omega}$	$\mu_0\vec{j}$
Champ	$\vec{v}(M)$	$\vec{B}(M)$
Equation de conservation	$div\vec{v} = 0$	$div\vec{B} = 0$
Relation champ potentiel	$\vec{v} = r\vec{o}t\vec{A}$	$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$
Relation source potentiel	$2\vec{\Omega} = -\Delta\vec{A}$	$\mu_0\vec{j} = -\Delta\vec{A}$
Relation source champ	$2\vec{\Omega} = r\vec{o}t\vec{v}$	$\mu_0\vec{j} = r\vec{o}t\vec{B}$

Nota
Dans le cas d'un vecteur $\vec{\Omega}$ uniforme, on a :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{O}M$$

$$2\vec{\Omega} = r\vec{o}t\vec{v} = r\vec{o}t(\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$$

Dans le cas d'un courant $\mu_0\vec{j}$ uniforme, on a :

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\vec{j} \wedge \vec{O}M$$

$$\mu_0\vec{j} = r\vec{o}t\vec{B} = \frac{1}{2}r\vec{o}t(\mu_0\vec{j} \wedge \vec{O}M)$$

II.2.3 Analogie entre vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et champ magnétique $\vec{B}$ tous deux considérés comme des champs

La deuxième analogie consiste à rapprocher :

- d'une part la vitesse locale $\vec{V}(M)$ avec le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ (on réécrit $\vec{v}(M)$ en majuscule $\vec{V}(M)$ pour souligner le lien avec un potentiel),
- d'autre part le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}r\vec{o}t\vec{V}$ avec champ magnétique $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$.

On résume ces analogies dans le tableau ci-dessous.

	Mécanique des fluides	**Magnétostatique**
Potentiel	$\vec{V}$	$\vec{A}$
Equation de conservation	$div\vec{\Omega} = 0$	$div\vec{B} = 0$
Relation champ potentiel	$2\vec{\Omega} = r\vec{o}t\vec{V}$ $2\Omega_{xy}^{1/t} = \frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y}$	$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$ $B_{xy}^{1/t} = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$
Relation source potentiel		$\mu_0\vec{j} + \Delta\vec{A} = 0$
Relation source champ	On proposera une analogie ultérieurement.	$\mu_0\vec{j} = r\vec{o}t\vec{B} - (\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}l}{\partial t})$ $\mu_0 j_{yt}^x = \frac{\partial B_{yx}^{1/t}}{\partial y} - (\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial El_{tx}^{1/y}}{\partial t})$ $\mu_0 j_{xt}^y = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x} - (\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial El_{ty}^{1/x}}{\partial t})$ (relation de Maxwell Ampère dans un espace x, y, t à 3 dimensions)

Nota 1

Les courants de déplacement de type $\vec{j}_D = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}l}{\partial t}$ sont absents en magnétostatique. Pour cette raison, ils sont indiqués entre parenthèses dans le tableau ci-dessus.

Nota 2

On reviendra dans quelques paragraphes sur les notations du type $\Omega_{xy}^{1/t}$, $B_{xy}^{1/t}$ ou $El_{ty}^{1/x}$ utilisées ici.

II.2.4 Identification vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et vecteur rotation $\vec{\Omega}$

En mécanique des fluides, on définit un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}r\vec{o}t\vec{V}$.

Lorsque les points matériels du fluide partagent un même mouvement circulaire, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ s'identifie à la vitesse de rotation ω des points matériels. Vérifions cela pour un mouvement circulaire uniforme dans un plan spatial x, y.

Soient les vecteurs position et vitesse des points matériels :

$$\vec{M}\begin{pmatrix} cos\,\omega\,t \\ sin\,\omega\,t \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(M,t)\begin{pmatrix} -\omega\,sin\,\omega\,t \\ \omega\,cos\,\omega\,t \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse de rotation des points matériels.

Sous une autre écriture, on a :

$$\vec{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(M,t)\begin{pmatrix} -x\omega \\ y\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule les 3 composantes du vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r\vec{o}t\vec{V}$

$$\Omega_z = \Omega_{xy}^{1/z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\omega - -\omega) = \omega$$

$$\Omega_y = \Omega_{xz}^{1/y} = 0$$

$$\Omega_x = \Omega_{yz}^{1/x} = 0$$

On obtient bien une identification entre le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r\vec{o}t\vec{V}$ et la vitesse de rotation $\omega = \frac{d\theta}{dt}$:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{xy}^{1/z} = \omega \vec{e}_z$$

Notons que $\vec{\Omega}$ est perpendiculaire au plan de rotation x, y. Dans un espace à trois dimensions, on définit usuellement les vecteurs tourbillons ou rotations $\vec{\Omega}$ (ainsi que le moment cinétique) comme perpendiculaires au plan de rotation.

II.3 Analogies entre vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et champ magnétique $\vec{B}$

Dans les paragraphes qui suivent, on rappelle les principales analogies entre un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

II.3.1 Relation de Larmor

A la fin des années 1890, Joseph Larmor constate que pour des valeurs de champ magnétique usuellement réalisables, si on place l'électron sur un manège qui tourne à la vitesse de rotation :

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e}\vec{B}$$

avec *e* la charge électrique (en valeur absolue) de l'électron et m_e sa masse, alors le mouvement de l'électron est comme si l'électron ne tournait pas et si le champ magnétique $\vec{B}$ n'existait pas. Il y a compensation entre les effets du champ magnétique et les effets du manège.

D'un point de vue changement de référentiels, la relation de Larmor peut s'interpréter :

$$R^{\Omega+B} = R^0$$

avec R^0 un référentiel galiléen.

II.3.2 Analogie potentiel vitesse $\vec{V}$ et potentiel magnétique $\vec{A}$

Le champ magnétique $\vec{B}$ dérive d'un potentiel magnétique $\vec{A}$:

$$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$$

Dans trois dimensions, x, y, t, on a :

$$B_{xy}^{1/t} = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$$

De même, le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ dérive d'un potentiel vitesse $\vec{V}$:

$$2\vec{\Omega} = r\vec{o}t\vec{V}$$

Dans trois dimensions, x, y, t, on a :

$$2\Omega_{xy}^{1/t} = \frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y}$$

Nota 1

La notation $\Omega_{xy}^{1/t}$ indique que la rotation s'effectue dans le plan x, y. Dans trois dimensions, x, y, t, $\Omega_{xy}^{1/t}$ est orienté suivant le Temps et s'exprime en $rad \times s^{-1}$.
Par analogie, on pose pour $B_{xy}^{1/t}$ la même notation, même si l'unité du champ magnétique est le tesla et non la s^{-1}.

Nota 2

On reviendra ultérieurement sur cette notion de potentiel vitesse $\vec{V}$. L'idée à retenir c'est qu'un potentiel vitesse correspond à une vitesse annulée après un changement de référentiels.

II.3.3 Analogie potentiel vitesse d'un mouvement circulaire uniforme et potentiel magnétique d'un champ magnétique uniforme

On a la relation entre la vitesse linéaire (sous la forme ici d'un potentiel vitesse $\vec{V}^s$) et le vecteur rotation $\vec{\Omega}^{1/t}$ d'un mouvement circulaire uniforme et le rayon $\vec{r}$ (r, s, t repère à trois dimensions orthogonales) :

$$\vec{V}^s = \vec{\Omega}^{1/t} \wedge \vec{r}$$

De même, on la relation entre le potentiel vecteur magnétique, le champ magnétique uniforme et le rayon $\vec{r}$:

$$\vec{A}^s = \frac{1}{2}\vec{B}^{1/t} \wedge \vec{r}$$

II.3.4 Rappel moment magnétique orbital d'un dipôle magnétique

En magnétisme, on définit le moment magnétique orbital $\vec{\mu}$ d'un dipôle magnétique qui peut s'interpréter comme un petit aimant.

Dans le cas d'une particule chargée q en rotation, on a le moment magnétique orbital (perpendiculaire au plan de rotation de la particule chargée) :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge q\vec{v}$$

En forme intégrale sur un contour fermé C, on obtient si $\vec{r}$ toujours perpendiculaire à $q\vec{v}$:

$$\vec{\mu} = (\oint_C \frac{1}{2} rq\vec{v} \cdot d\vec{l})\vec{n}$$

avec $\vec{n}$ vecteur unitaire perpendiculaire au plan de rotation.

On définit également le moment magnétique orbital $\vec{\mu}$ d'un dipôle magnétique sous la forme :

$$\vec{\mu} = \iint_S Id\vec{s} = I\vec{S}$$

Avec I le courant électrique
$\vec{S}$ et $d\vec{s}$ perpendiculaires aux surfaces S et ds,
$\vec{n}ds = d\vec{s}$ vecteur unitaire perpendiculaire à la surface ds.

Nota 1
On veut montrer l'identité des 2 définitions du moment magnétique orbital $\vec{\mu}$.

$$\oint_C \frac{1}{2} rq\vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S Ids\,?$$

Si C est un contour de périmètre $2\pi r$ et S un disque de surface πr^2, on obtient les relations :

$$\frac{1}{2} rq\vec{v} \cdot \oint_C d\vec{l} = I \iint_S ds?$$

$$\frac{1}{2} rqv \times 2\pi r = I \times \pi r^2?$$

On a le courant :

$$qv = I$$

On retrouve bien :

$$\vec{\mu} = (\oint_C \frac{1}{2} rq\vec{v} \cdot d\vec{l})\vec{n} = \iint_S Id\vec{s} = I\vec{S}$$

Nota 2
Le passage de $\oint_C \frac{1}{2} rq\vec{v}.d\vec{l}$ à $\iint_S Ids$ se fait via le théorème de Stockes.

Sous forme locale, on a :

$$\frac{1}{2} r\vec{o}t(rq\vec{v}) = I\vec{n}$$

D'après le théorème de Stockes on a :

$$\oint_C \frac{1}{2} rq\vec{v}.d\vec{l} = \iint_S \frac{1}{2} r\vec{o}t(rq\vec{v}).d\vec{s} = \iint_S Ids$$

II.3.5 Analogie moment cinétique orbital et moment magnétique orbital

On rappelle le moment cinétique orbital d'une particule de masse m :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

On a la relation entre le moment magnétique orbital $\vec{\mu}$ d'une particule de charge q, de masse m et le moment cinétique orbital $\vec{\sigma}$de cette particule (un signe $-$ s'introduit) :

$$\vec{\mu} = -\frac{q}{2m}\vec{\sigma}$$

On pose souvent $\vec{\mu} = \gamma\vec{\sigma}$ avec $\gamma = -\frac{q}{2m}$ le rapport gyromagnétique.

On a la relation entre le moment magnétique orbital $\vec{\mu}_{Bohr}$ d'un électron de charge $-e$, de masse m_e et son moment cinétique orbital $\vec{\sigma}_e$:

$$\vec{\mu}_{Bohr} = \frac{e}{2m_e}\vec{\sigma}_e$$

(relation dite de Bohr-Procopiu avec $\vec{\mu}_{Bohr}$ appelé le magnéton de Bohr).

Suivant le modèle de l'électron de Bohr, le moment cinétique $\vec{\sigma}_e$ est quantifié :

$$\vec{\sigma}_e = n\hbar\vec{z}$$

On obtient le moment magnétique de l'électron dans son état le plus stable ($n = 1$) :

$$\vec{\mu}_{Bohr} = \frac{e\hbar}{2m_e}\vec{z}$$

Nota

On a une analogie comparable entre le moment cinétique de spin $\vec{S}$ et le moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S$:

$$\vec{\mu}_S = g\frac{q}{2m}\vec{S}$$

avec le moment cinétique de spin $\vec{S} = \pm\frac{1}{2}\hbar\vec{z}$ et g le facteur de Landé.

Pour l'électron, on a le facteur de Landé $g \approx -2$.

II.3.6 Energie potentielle d'un dipôle magnétique en fonction de $\vec{B}$ et de $\vec{\Omega}$

On a l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$:

$$Ep = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Nota

On peut aussi interpréter Ep comme une énergie d'interaction entre un dipôle magnétique et un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur.
Dans les mémoires 4 et 5, lorsqu'on s'intéressera aux particules élémentaires, le dipôle magnétique sera rapproché des fermions et le champ magnétique extérieur des photons.

On a la relation de Larmor pour l'électron :

$$\vec{B} = \frac{2m_e}{e}\vec{\Omega}$$

On a le magnéton de Bohr-Procopiu pour l'électron :

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_e}\vec{\sigma}_e$$

On a alors l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique électron dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ de la forme :

$$Ep = -\frac{e}{2m_e}\vec{\sigma}_e \cdot \frac{2m_e}{e}\vec{\Omega}$$

$$Ep = -\vec{\sigma}_e \cdot \vec{\Omega}$$

Avec $\vec{\sigma}_e = \hbar\vec{z}$, on obtient :

$$Ep = -\hbar\Omega$$

Nota 1
On retrouve une relation proche de l'énergie d'un photon proposée par A. Einstein :

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}2\pi\nu = \hbar\Omega$$

Au début de sa thèse, L. de Broglie généralise la relation d'Einstein appliquée aux photons, aux particules massiques comme l'électron. Pour cela, il réunit deux célèbres équations proposées par A. Einstein. Il égalise les énergies d'une onde stationnaire de pulsation $\Omega_0 = 2\pi\nu_0$ et celle d'un corpuscule de masse m_0 au repos :

$$E_0 = h\nu_0 = \hbar\Omega_0 = m_0c^2$$

On reviendra sur ces équations dans le mémoire 3 sur les équations sources champs.

Nota 2
Le photon et l'électron possèdent tous les deux un moment cinétique de spin $\vec{S}$. Par contre, l'électron est le seul à posséder une charge et une masse, et donc un moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S = g\frac{q}{2m}\vec{S}$. Si un photon ne subit pas les effets d'un champ magnétique $\vec{B}$, un électron considéré comme un petite aimant de moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S$, s'oriente suivant $\vec{B}$ pour une minimisation du moment de force $\vec{M} = \vec{\mu}_S \wedge \vec{B}$.

II.3.7 Analogie force de Coriolis et force magnétique de Lorentz

On a la force de Coriolis :

$$\vec{F}_{Cor} = m\vec{v} \wedge 2\vec{\Omega}$$

et la force magnétique de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lor} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Toutes deux sont perpendiculaires :

- à une impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$ ou à un courant $\vec{j} = q\vec{v}$,
- à un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ ou à un champ magnétique $\vec{B}$.

II.3.8 Energie et impulsion potentielles

Pour la gravitation et l'électrostatique, on définit une énergie potentielle qui dérivée (par rapport à l'Espace) permet de retrouver respectivement la force gravitationnelle de Newton et le force électrostatique de Coulomb.

$$\vec{F}_{Gr} = -\frac{\partial Ep^t_{Gr}(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial m^t V^t}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{F}_{Es} = -\frac{\partial Ep^t_{Es}(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial q^t A^t}{\partial \vec{r}}$$

Nota sur l'énergie Ep^t
L'énergie Ep^t est ici considérée comme une composante vectorielle orientée dans le Temps.

En magnétisme, la force magnétique de Lorentz ne travaille pas. Son énergie potentielle est constante, et on ne peut retrouver la force magnétique en la dérivant.

Il en est de même en mécanique avec la force de Coriolis, analogue de la force magnétique de Lorentz, qui ne travaille pas. Son énergie potentielle est constante, et on ne peut retrouver la force de Coriolis en la dérivant.

Néanmoins, en Electromagnétisme, on définit un potentiel généralisé qui permet de retrouver via l'équation d'Euler Lagrange la force électromagnétique de Lorentz (incluant la force magnétique de Lorentz). On le détaillera dans le prochain paragraphe.

En outre, à partir du potentiel vecteur magnétique A^μ ($\mu = x, y, z$) et de la charge q^t, on définit une impulsion potentielle magnétique. On peut faire de même pour la mécanique newtonienne où on définit une impulsion potentielle gravitationnelle à partir du potentiel vitesse V^μ ($\mu = x, y, z$) et de la masse m^t.

On a le tableau suivant :

	Gravitation	**Electromagnétisme**
Energie potentielle	$Ep^t_{Gr} = m^t V^t$	$Ep^t_{Es} = q^t A^t$ (électrostatique)
Impulsion potentielle suivant x	$p^x = m^t V^x$	$p^x = q^t A^x$
Impulsion potentielle suivant y	$p^y = m^t V^y$	$p^y = q^t A^y$
Impulsion potentielle suivant z	$p^z = m^t V^z$	$p^z = q^t A^z$

Nota : on constate que q^t et m^t sont tous deux orientés dans le Temps. On y reviendra abondamment.

II.4 Rappel énergie potentielle généralisée électromagnétique

II.4.1 Energie potentielle généralisée de la force électromagnétique de Lorentz

Un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ possède une énergie potentielle magnétique $Ep = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$.

Par contre, comme on l'a évoqué dans le précédant paragraphe, la force magnétique de Lorentz et la force d'inertie de Coriolis ne travaillent pas. Les énergies potentielles mises en jeu sont donc constantes. On ne peut faire dériver ces deux forces (par rapport à l'espace) d'une énergie potentielle.

Cependant, il existe une énergie potentielle généralisée électromagnétique au sens des équations d'Euler-Lagrange :

$$Ep = q(A^t - (\vec{v}^\mu \cdot \vec{A}^\mu)$$

avec $\mu = x, y, z$

Nota : pour l'énergie potentielle généralisée électromagnétique, on parle aussi abusivement de potentiel généralisé électromagnétique. Mais il s'agit bien d'une énergie puisqu'on inclut la charge électrique q.

A partir de ce potentiel généralisé, il est possible de retrouver la force électromagnétique de Lorentz.

On va en voir la démonstration dans le prochain paragraphe.

II.4.2 Démonstration

Dans le cas d'une force non conservative, dite généralisée car elle dérive d'une énergie potentielle généralisée Ep, on a la relation :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{\partial Ep(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial Ep(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}}$$

On cherche à montrer qu'à partir de $Ep = q(A^t - (\vec{v}^\mu \cdot \vec{A}^\mu)$, on retrouve bien la force électromagnétique de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lor} = q(\vec{E}l + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

D'après les équations de Maxwell Thomson (divergence nulle du flux magnétique) et Maxwell Faraday, on a :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}l = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Donc :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}l = -\frac{\partial \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{E}l + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

$$\vec{E}l + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} A^t$$

$$\vec{F}_{Lor} = q(-\vec{\nabla} A^t - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}))$$

Or d'après la formule de Willard Gibbs :

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$$

On a donc pour la force électromagnétique de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lor} = q(-\vec{\nabla}A^t - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A})$$

$$\vec{F}_{Lor} = -q(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}) + q(-\vec{\nabla}A^t + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{F}_{Lor} = -q(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}) + q\vec{\nabla}(-A^t + (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{F}_{Lor} = -q(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}) - \frac{\partial q(A^t - (\vec{v} \cdot \vec{A}))}{\partial \vec{r}}$$

En introduisant : $Ep = q(A^t - (\vec{v} \cdot \vec{A})$, on obtient :

$$\vec{F}_{Lor} = -q(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}) - \frac{\partial Ep}{\partial \vec{r}}$$

On a :

$$\frac{\partial Ep}{\partial \vec{v}} = -q\vec{A}$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Ep}{\partial \vec{v}} = -q\frac{d\vec{A}}{dt}$$

Or :

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\dot{z}$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Ep}{\partial \vec{v}} = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\dot{z})$$

On peut remarquer au passage :

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\dot{z}=\begin{pmatrix}\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\\ \dot{x}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_z}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{pmatrix}=\left(\dot{x}\frac{\partial}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$$

$$=\left[\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\dot{z})=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Ep}{\partial\vec{v}}=-q\frac{d\vec{A}}{dt}=-q(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{A})$$

Donc :

$$\vec{F}_{Lor}=\frac{d}{dt}\frac{\partial q(A^t-(\vec{v}\cdot\vec{A}))}{\partial\vec{v}}-\frac{\partial q(A^t-(\vec{v}\cdot\vec{A}))}{\partial\vec{r}}$$

satisfait la relation vue supra.

$$\vec{F}_{Lor}=\frac{d}{dt}\frac{\partial Ep(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{v}}-\frac{\partial Ep(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{r}}$$

Nota 1
On rappelle le lagrangien de la force électromagnétique de Lorentz :

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-q(A^t-(\vec{v}\cdot\vec{A}))=Ec-Ep$$

Nota 2
On rappelle l'équation générale d'Euler-Lagrange pour une force généralisée qui ne dérive pas d'un potentiel :

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\frac{\partial Ec(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{v}}-\frac{\partial Ec(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{r}}$$

avec Ec énergie cinétique.

On retrouve l'équation d'Euler-Lagrange pour la force électromagnétique en égalisant les deux termes l'un avec énergie potentielle, l'autre avec énergie cinétique :

$$\vec{F}_{Lor}=\frac{d}{dt}\frac{\partial Ep(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{v}}-\frac{\partial Ep(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{r}}$$

$$\vec{F}_{Lor}=\frac{d}{dt}\frac{\partial Ec(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{v}}-\frac{\partial Ec(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Ec-Ep}{\partial\vec{v}}-\frac{\partial Ec-Ep}{\partial\vec{r}}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

II.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a souligné que l'Electromagnétisme s'était développé en analogie avec la mécanique des fluides. On a aussi listé les nombreuses analogies qu'il existe entre le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (ou vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$) et le champ magnétique $\vec{B}$.

Les analogies ont été effectuées dans les 3 dimensions de l'Espace x, y, z. Dans le prochain chapitre, on va étendre ces analogies à la 4ème dimension temporelle t en traitant le Temps telle une dimension de l'Espace.

Chapitre III Analogies entre la mécanique des milieux continus et l'Electrodynamique quantique relativiste

Objet du chapitre
On étudie les analogies entre :

- la mécanique des milieux continus (MMC), extension de la mécanique des fluides à tous types de milieux continus,
- l'Electrodynamique quantique relativiste.

L'Electrodynamique quantique relativiste est une théorie développée au milieu du 20ème siècle. Elle a pour but de concilier l'Electromagnétisme du 19ème siècle avec la physique quantique relativiste des années 1920-1930. Elle utilise un formalisme lagrangien.

Sur certains aspects, l'Electrodynamique quantique relativiste pourra apparaître comme une théorie utilisant des outils analogues à ceux de la mécanique des milieux continus, avec extension des 3 dimensions de l'Espace aux 4 dimensions de l'Espace-Temps.

III.1 Présentation historique de l'Electrodynamique quantique relativiste

III.1.1 Symbiose entre l'Electromagnétisme, la Relativité restreinte et la Physique quantique

Dans le chapitre précédant, on a souligné que l'Electromagnétisme du 19ème avait progressé grâce aux analogies avec la dynamique des fluides.

Au début du 20ème siècle, A. Einstein développe la théorie de la Relativité restreinte, puis la théorie de la Relativité générale. Cette dernière théorie se présente comme une généralisation de la mécanique newtonienne et décrit le champ gravitationnel newtonien. Pour ses outils mathématiques, la Relativité générales reprend ceux de la mécanique des milieux continus, extension de la mécanique des fluides à d'autres milieux.

L'Electrodynamique quantique relativiste connait ses principaux résultats dans les années 1930-1950, en particulier avec les travaux de Paul Dirac, puis avec ceux de Richard Feynman (adaptant dans sa thèse de 1942, le principe de moindre action à la mécanique quantique)

On peut considérer l'Electrodynamique quantique relativiste comme un prolongement direct de l'Electromagnétisme du 19ème, avec en plus l'incorporation de la constante de Planck $\hbar$.
On peut ensuite l'interpréter comme une symbiose entre l'Electromagnétisme, la Physique quantique et la Relativité restreinte. Comme cette dernière théorie, l'Electrodynamique quantique relativiste inclut la transformée de Lorentz et s'appuie sur un Espace-Temps à 4 dimensions. Elle va d'ailleurs loin dans les analogies entre Temps et Espace, puisque le Temps est souvent présenté avec deux sens, comme une dimension de l'Espace (d'où la mise en avant du principe de moindre action qui sous-entend une cause finale ou tout du moins qui permet de s'affranchir du principe de causalité).

III.1.2 Equation d'onde relativiste de Dirac comme loi fondamentale à respecter, absence de la constante G

L'Electrodynamique quantique relativiste découle principalement des travaux de Paul Dirac menés dans les années 1920. Ainsi, c'est l'équation d'onde relativiste de Dirac qui sert de loi fondamentale à respecter lors des transformations de Jauge locale et non les équations d'onde non relativistes de Schrödinger et de Pauli.
Comme la Physique quantique des années 1920-1930, l'Electrodynamique quantique relativiste reprend largement les outils de la mécanique analytique de Joseph-Louis Lagrange, Carl Gustav Jakob Jacobi et William Rowan Hamilton (fin 18ème siècle, début 19ème siècle), mécanique analytique qui

historiquement avait été présentée comme une réinterprétation de la mécanique newtonienne, et qui par la suite a trouvé de nombreuses autres applications.

Pourtant, comme un paradoxe, l'Electrodynamique quantique relativiste ne concilie pas la constante $\hbar$ de Planck et la constante G de Newton. C'est-à-dire qu'elle n'incorpore dans ses équations ni la gravitation newtonienne (en particulier la force gravitationnelle $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$), ni la Relativité générale einsteinienne (ces deux théories utilisant la constante G). Par contre, comme la Relativité générale, l'Electrodynamique quantique relativiste reprend les outils de la mécanique des milieux continus, en particulier l'outil tensoriel à 4 dimensions.

Ce sont les analogies entre outils de la mécanique des milieux continus et outils de l'Electrodynamique quantique relativiste, que nous allons étudier dans ce chapitre.

Nota
Pour l'Electrodynamique quantique relativiste, on utilise fréquemment l'abréviation QED comme en anglais quantum electrodynamics.

III.2 Rappels sur la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus étudie les déformations d'un milieu continu, souvent un fluide, voire un solide. Pour cette raison, on l'interprète souvent comme une extension de la mécanique des fluides. Le milieu continu est caractérisé par les mouvements de points matériels dans les trois dimensions de l'Espace.

III.2.1 Descriptions de Lagrange et d'Euler

On distingue deux descriptions pour le mouvement d'un point matériel, celle de Joseph-Louis Lagrange et celle de Leonhard Euler (2 célèbres mathématiciens du 18ème siècle à nouveau réunis dans un modèle physique). On rappelle ici succinctement ces deux descriptions.

Description de Lagrange
On suit dans son mouvement une particule p de fluide qui se trouve au point M et à l'instant t.

On définit pour cette particule p :
- une vitesse de la particule (on parle de vitesse particulaire) :

$$\vec{v}_p(t) = \frac{d\vec{r}_p}{dt}$$

- une accélération de la particule :

$$\vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p}{d^2t}$$

Cette description est similaire à celle de la mécanique newtonienne. Elle est assez peu usitée en MMC car elle nécessite des connaissances portant sur chaque particule du fluide. On utilise plus couramment la description suivante, celle d'Euler.

Description d'Euler
On se place en un point d'observation M fixe et on mesure en ce point M, à l'instant t, la vitesse locale des particules $\vec{v}(M,t)$, fonction des variables indépendantes : positions de M et t.

L'ensemble des vitesses locales, ou champ de vitesses $\vec{v}(M,t)$, permet de décrire le mouvement du fluide.

Pour une particule p de fluide qui se trouve au point d'observation M à l'instant t, on peut confondre la vitesse locale et la vitesse de la particule :

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}(M,t)$$

Par contre, l'accélération est différente. On donne la relation entre l'accélération d'une particule et la vitesse locale :

$$\vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d\vec{v}(M,t)}{dt} + (\vec{v}(M,t).\,gr\vec{a}d)\vec{v}(M,t)$$

avec $\frac{d\vec{v}(M,t)}{dt}$ l'accélération locale et $(\vec{v}(M,t).\,gr\vec{a}d)\vec{v}(M,t)$ l'accélération convective.

On a :

$$(\vec{v}(M,t).\,gr\vec{a}d)\vec{v}(M,t) = grad(\frac{v^2}{2}) + rot\vec{v} \wedge \vec{v} = gr\vec{a}d(\frac{v^2}{2}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

avec $rot\vec{v} = 2\vec{\Omega}$

Dans l'accélération convective, on reconnait :

- $gr\vec{a}d(\frac{v^2}{2})$ qui correspond à l'accélération d'inertie centrifuge,
- $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = rot\vec{v} \wedge \vec{v}$ qui correspond à l'accélération d'inertie de Coriolis.

Nota 1
On peut interpréter le passage de l'une à l'autre de ces 2 descriptions, comme un changement de référentiels. Le référentiel suivant la description d'Euler, suit la particule, et donc annule une partie de son mouvement. Il nécessite l'ajout d'accélérations d'inertie égales à

$$(\vec{v}(M,t).\,gr\vec{a}d)\vec{v}(M,t) = gr\vec{a}d(\frac{v^2}{2}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

Nota 2
Suivant une analogie avec le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}(M,t)$, on définit dans ce mémoire un potentiel vecteur vitesse $\vec{V}(M,t)$ correspondant au mouvement annulé lors d'un changement de référentiels. Le terme potentiel est adéquat, car il s'agit d'un mouvement qui n'existe pas dans le référentiel où il est annulé, mais qui est potentiellement recouvrable si on effectue le changement de référentiels inverse.
Pour souligner la ressemblance entre ce potentiel vecteur vitesse $\vec{V}(M,t)$ et le champ de vitesses $\vec{v}(M,t)$ de la MMC, on les écrira tous les deux en majuscule $\vec{V}(M,t)$.

III.2.2 Tenseur des taux de rotation

En MMC, on définit un tenseur $\bar{\bar{L}}$ 3×3 gradient des vitesses locales $\vec{V}(M,t)$ permettant de caractériser les mouvements du milieu continu.

Les composantes de ce tenseur $\bar{\bar{L}}$ sont $Gr\bar{\bar{a}}d(\vec{V}(M,t))$. On obtient :

$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Dans le cas général, le tenseur $\bar{\bar{L}}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique. Il est décomposé en :

- un tenseur symétrique $\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}(Grad\vec{V}(M,t) + \overrightarrow{Grad\ {}^tV}(M,t))$ appelé tenseur des taux de déformations (ou encore tenseur des vitesses de déformations),
- un tenseur antisymétrique $\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2}(Grad\vec{V}(M,t) - \overrightarrow{Grad\ {}^tV}(M,t))$ avec une diagonale nulle, et appelé tenseur des taux de rotations (ou encore tenseur des vitesses de rotations).

Nota
La décomposition en taux de déformations et de taux de rotations peut s'interpréter comme une décomposition en variation de la norme d'un vecteur et variation de sa direction.

Un point matériel du milieu continu peut se déformer et subir des **cisaillements** qui sont caractérisés par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$$

Un point matériel peut également subir des **rotations** qui sont caractérisées par :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j})$$

Dans le plan spatial x, y, on a la rotation (orientée suivant z) :

$$\Omega_{xy}^z = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})$$

On a le tenseur $\bar{\bar{\Omega}}$ des taux de rotations :

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy}^z & \Omega_{xz}^y \\ -\Omega_{xy}^z & 0 & \Omega_{yz}^x \\ -\Omega_{xz}^y & -\Omega_{yz}^x & 0 \end{bmatrix}$$

Le schéma suivant illustre dans deux dimensions de l'Espace, les déformations que peut subir un milieu continu :

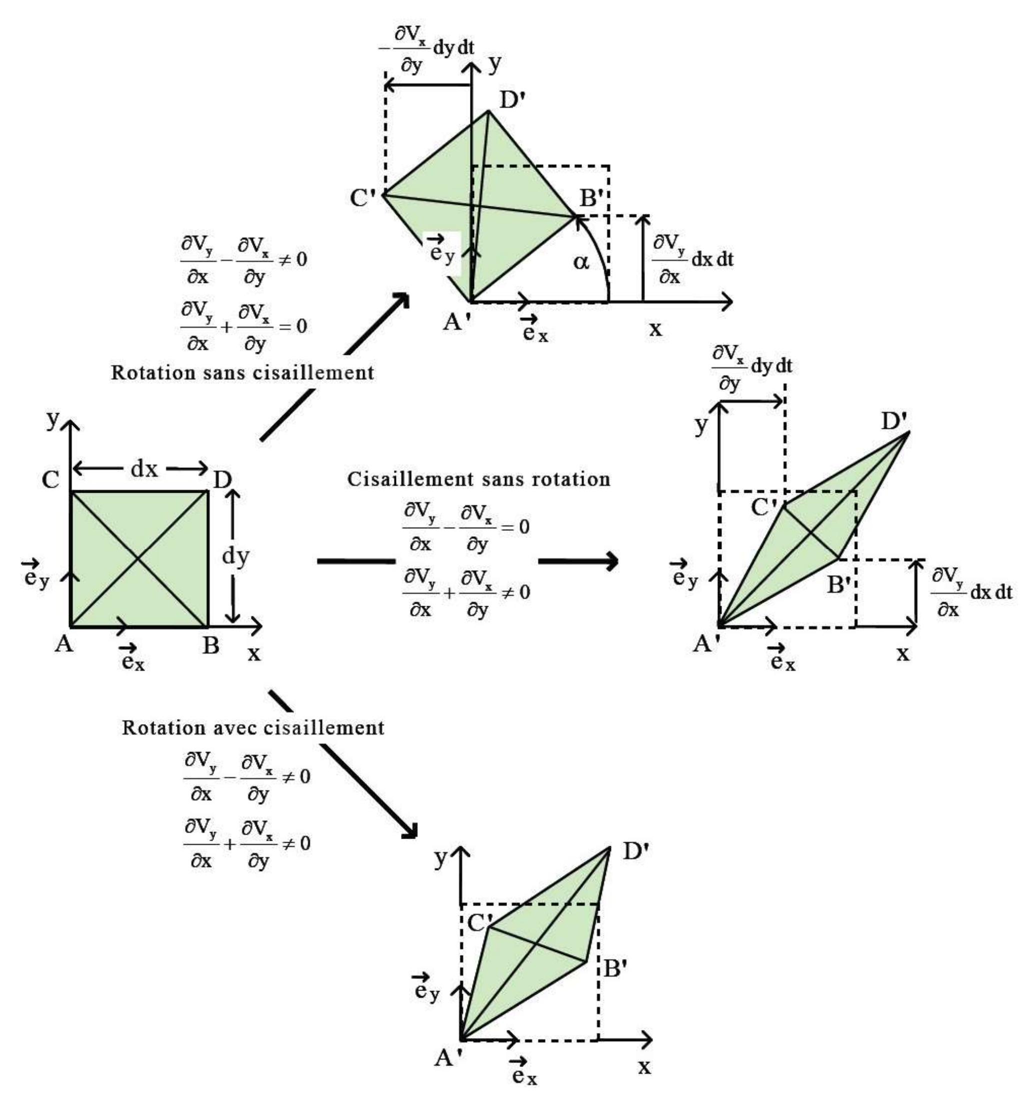


Figure 1 : cisaillements et rotations, extrait de Mécanique des fluides de Jean-François Sini

III.3 Rappels sur le tenseur de Maxwell Faraday, analogies entre les outils de la MMC et de l'Electrodynamique quantique relativiste

III.3.1 Le tenseur de Maxwell Faraday

Comme la MMC et la Relativité générale, l'Electrodynamique quantique relativiste utilise l'outil tensoriel. Le tenseur le plus fréquemment utilisé est celui de Maxwell Faraday, notée ici $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$.

$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique, décrivant le champ électromagnétique. Malgré son nom inspiré par deux célèbres physiciens britanniques du 19ème siècle, il est proposé aux environs des années 1950.

Il existe plusieurs formes pour $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$. On en présente une ci-dessous :

$$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{El_x}{c} & -\frac{El_y}{c} & -\frac{El_z}{c} \\ \frac{El_x}{c} & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{El_y}{c} & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{El_z}{c} & -B^y & B^x & 0 \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ sont définies à partir du quadrivecteur électromagnétique.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial \nu}$$

μ, ν correspondent à t, x, y, z.

On propose de redéfinir les composantes des champs électriques et magnétiques sur le modèle des composantes du tenseur $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ (on l'argumentera dans le chapitre suivant). On a alors :

$$El_{tx} = F_{tx} = \partial_t A^x - \partial_x A^t = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

$$B_{xy} = F_{xy} = \partial_x A^y - \partial_y A^x = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$$

On obtient pour le tenseur :

$$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} \\ \frac{El_{xt}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ \frac{El_{yt}}{c} & B_{yx} & 0 & B_{yz} \\ \frac{El_{zt}}{c} & B_{zx} & B_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{tz}}{c} \\ -\frac{El_{tx}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ -\frac{El_{ty}}{c} & -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ -\frac{El_{tz}}{c} & -B_{xz} & -B_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

III.3.2 Lagrangien d'un fermion en QED

En Electrodynamique quantique relativiste, on définit le lagrangien (ou densité lagrangienne) d'un fermion (par exemple un électron) dans un champ électromagnétique (associé à un photon) :

$$L = i\hbar c\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu + iqcA^\mu)\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

$$L = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma_\mu\partial^\mu - mc^2)\psi - qc\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$$

Nota 1
En physique des particules, les fermions sont les particules qui subissent le champ, par opposition aux bosons qui génèrent le champ. Les fermions ont un spin demi-entier et répondent à la statistique de Fermi-Dirac. Les bosons ont un spin entier et répondent à la statistique de Bose-Einstein. Pour l'interaction électromagnétique, le boson est en fait un photon. On y reviendra largement dans les prochains mémoires.

Nota 2
On a le quadrivecteur densité de charge courants électriques :

$$j^\mu = (\rho^t, j^x, j^y, j^z)$$

$$\text{avec } (\mu = t, x, y, z)$$

On a l'énergie potentielle généralisée électromagnétique :

$$Ep = q^t(A^t - (\vec{v} \cdot \vec{A}) = j^\mu A_\mu$$

En QED, on définit j^μ par :

$$j^\mu = qc\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

On retrouve dans le lagrangien d'un fermion, l'énergie potentielle généralisée électromagnétique :

$$qc\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu = j^\mu A_\mu$$

En appliquant Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = 0$ au lagrangien, on retrouve l'équation d'onde de Dirac dans un champ électromagnétique :

$$(i\hbar c\gamma_\mu(\partial^\mu + iqcA^\mu) - mc^2))\psi = 0$$

A partir du tenseur de Maxwell Faraday, on définit un lagrangien qui permet d'inclure la création et la disparition des photons :

$$L = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

En associant les deux lagrangiens, on obtient le lagrangien de l'Electrodynamique quantique relativiste :

$$L = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma_\mu\partial^\mu - mc^2)\psi - qc\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$L = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma_\mu\partial^\mu - mc^2)\psi - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

III.3.3 Retrouver les équations sources champs de Maxwell à partir d'un lagrangien

Définissons un lagrangien simplement à partir de l'énergie potentielle généralisée électromagnétique et du tenseur de Maxwell Faraday :

$$L = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$L = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$L = -\frac{1}{2\mu_0}(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu$$

En appliquant Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial A_\nu} - \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}) = 0$ à ce lagrangien, on retrouve les deux équations sources champs de Maxwell (Ampère et Gauss) sous la forme source tenseur :

$$\mu_0 j^\mu = \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Nota 1
Suivant les conventions initiales prises sur les constantes μ_0 et ε_0, on peut aussi trouver la relation tenseur source suivante :

$$\frac{j^\mu}{\varepsilon_0} = \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Nota 2
A travers ces relations sources tenseurs, on note la symétrie de construction pour les 2 équations sources champs de Maxwell Ampère et de Maxwell Gauss, symétrie peu visible dans les équations proposées par Oliver Heaviside et Willard Gibbs à la fin du 19ème siècle, mais explicitement apparente ici.
Dans le mémoire 3, on proposera également un même mode de construction pour les 2 équations sources champs de Maxwell.

III.3.4 Analogies entre les outils de la MMC et ceux de la QED

Soulignons maintenant les analogies entre :

- le tenseur $\bar{\bar{\Omega}}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = x, y, z)$ des taux de rotation dans les trois dimensions de l'Espace,
- le tenseur de Maxwell Faraday $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = t, x, y, z)$ dans les quatre dimensions de l'Espace-Temps.

Tous deux sont antisymétriques et construits à partir de différences de dérivées de potentiels qui s'entrecroisent.

$$\bar{\bar{\Omega}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy}^z & \Omega_{xz}^y \\ -\Omega_{xy}^z & 0 & \Omega_{yz}^x \\ -\Omega_{xz}^y & -\Omega_{yz}^x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{tz}}{c} \\ -\frac{El_{tx}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ -\frac{El_{ty}}{c} & -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ -\frac{El_{tz}}{c} & -B_{xz} & -B_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{xy}^z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$El_{tx} = F_{tx} = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

$$B_{xy} = F_{xy} = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$$

On en tire deux observations :

- les outils de la QED s'apparentent à une extension de 3 à 4 dimensions des outils de la MMC avec une prise en compte de la dimension Temps,

- si on rapproche le vecteur rotation Ω et le champ magnétique B, c'est le champ électrique El qui apparait comme l'extension à la dimension Temps.

Nota 1
Notons que pour décrire les interactions faibles et fortes, on utilise dans le Modèle Standard des tenseurs symétriques analogues à celui de Maxwell Faraday :

$$\bar{\bar{F}}^a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & El^a_x & El^a_y & El^a_z \\ -El^a_x & 0 & -B^a_z & B^a_y \\ -El^a_y & B^a_z & 0 & -B^a_x \\ -El^a_z & -B^a_y & B^a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Pour l'interaction forte, avec un paramètre a variant de 1 à 8, il est défini des champs forts El^a et B^a analogues aux champs électriques et magnétiques.

Pour l'interaction faible, avec un paramètre a variant de 1 à 3, il est également défini des champs faibles El^a et B^a analogues aux champs électriques et magnétiques.

Nota 2
On peut s'interroger sur le caractère antisymétrique de tous ces tenseurs, surtout que comme on l'a vu en MMC, le tenseur $\bar{\bar{L}}$ n'est dans le cas général ni symétrique, ni antisymétrique.
Seul le tenseur $\bar{\bar{\Omega}}$ des taux de rotation construit à partir de $\bar{\bar{L}}$ est symétrique.

Certains modèles suggèrent que l'antisymétrie des tenseurs de l'Electrodynamique quantique relativiste et du Modèle Standard, est liée à la conservation des charges et de la masse.
La question reste ouverte.

III.4 Conclusion du chapitre

Comme la Relativité générale, l'Electrodynamique quantique relativiste utilise des tenseurs à 4 dimensions de l'Espace-Temps, outils préalablement développés en mécanique des milieux continues dans 3 dimensions de l'Espace.

Le tenseur électromagnétique de Maxwell-Faraday $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ fait apparaître explicitement les similitudes formelles entre le champ magnétique $B_{xy} = F_{xy}$ et le champ électrique $El_{tx} = F_{tx}$. Ce dernier se construit exactement sur le même mode que le champ magnétique, avec une extension à la dimension Temps.
Dans le prochain chapitre, on reprendra cette idée pour définir le champ électrique tel un vecteur rotation « généralisée » dans un plan spatiotemporel.

Chapitre IV Vecteurs rotations « généralisées » et champs

Objet du chapitre
On propose ici d'expliciter les notions :
- de vecteur rotation « généralisée » pris dans un sens large (dans un plan spatial puis dans un plan spatiotemporel) que l'on annule lors d'un changement de référentiels,
- de champ obtenu après le changement de référentiels et annulation du vecteur rotation « généralisée ».

On définira les notions de champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$ et de champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$. Sur le modèle du champ électrique $\vec{El}_{xt}^{1/y}$ extension à la dimension Temps du champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, le champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$ sera l'extension à la dimension Temps du champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$.

IV.1 Analogies champ magnétique $\vec{B}$, champ électrique $\vec{El}$ et vecteur rotation $\vec{\Omega}$

IV.1.1 Analogies champ magnétique $\vec{B}$ et champ électrique $\vec{El}$

Dans l'Electromagnétisme du 19ème siècle, on fait classiquement dériver le champ électrique $\vec{El}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ d'un potentiel scalaire électrique A^t et d'un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$.

On a les équations suivantes où champ électrique et champ magnétique apparaissent formellement différents :

$$\vec{El} = -gr\vec{a}d(A^t) - \frac{\partial \vec{A}^\mu}{\partial t}$$

$$(\mu = x, y, z)$$

$$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}^\mu$$

On a par exemple pour la composante B_z du champ magnétique $\vec{B}$:

$$B_z = \frac{\partial A^x}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial x}$$

Au cours des années 1930, l'Electrodynamique quantique relativiste se développe, influencée par la théorie de la Relativité. En particulier, elle reprend la notion de quadrivecteur Espace-Temps, et introduit un quadrivecteur potentiel électromagnétique qu'on notera ici $4\vec{A}$ ou $\vec{A}^\mu$ ($\mu = t, x, y, z$) :

$$4\vec{A} = \begin{bmatrix} A^t \\ A^{x'} \\ A^{y'} \\ A^{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t \\ -A^x \\ -A^y \\ -A^z \end{bmatrix}$$

avec A^t le potentiel scalaire électrique et $\vec{A}$ le potentiel vecteur magnétique (on a mis ici un apostrophe $A^{x'}$ pour distinguer les anciens des nouveaux termes du potentiel vecteur magnétique, mais par la suite on n'en mettra plus).

Nota sur le potentiel électrique défini en tant que composante temporelle
On peut s'interroger sur les raisons profondes de définir un quadrivecteur électromagnétique avec un potentiel électrique en composante temporelle et un potentiel magnétique en composantes spatiales.
La seule réponse à cela, il est vrai insatisfaisante, c'est de constater que cela fonctionne parfaitement dans les calculs.

Comme on l'a déjà évoqué dans le précèdent chapitre, ce quadrivecteur potentiel électromagnétique $4\vec{A}$ souligne bien davantage que les équations du 19ème siècle les ressemblances entre champ $\vec{B}$ et champ $\vec{El}$.

On a par exemple pour la composante El_x :

$$El_x = -\frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x} = \frac{\partial A^{x\prime}}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

Et pour la composanteB_z :

$$-B_z = -\frac{\partial A^y}{\partial x} + \frac{\partial A^x}{\partial y} = \frac{\partial A^{y\prime}}{\partial x} - \frac{\partial A^{x\prime}}{\partial y}$$

Pour rapprocher davantage les champs $\vec{El}$ et $\vec{B}$, on modifie leurs indices et on reprend dorénavant ceux du tenseur de Maxwell Faraday. On a par exemple pour El_x et B_z :

$$El_{tx} = El_x = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

$$B_{xy} = -B_z = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$$

On obtient ainsi un champ $\vec{El}$ et un champ $\vec{B}$ qui se construisent identiquement (à l'indice près) à l'aide du quadrivecteur potentiel électromagnétique $\vec{A}^{\mu}$ ($\mu = t, x, y, z$).

IV.1.2 Orientation des champs $\vec{El}$ et $\vec{B}$ en analogie avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$

En mécanique, le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{xy}$ par rapport à un plan spatial x, y est orienté perpendiculairement par rapport à ce plan. On l'oriente donc classiquement suivant z dans un espace à trois dimension x, y, z.

On conserve ici l'idée de traiter le Temps de la même manière que l'Espace. Dans un espace à trois dimensions (2 pour l'Espace et 1 pour le Temps), la dimension t est perpendiculaire au plan spatial x, y. On a donc un vecteur rotation $\Omega_{xy}^{1/t}$ orienté suivant le Temps (et en adéquation avec ses unités qui sont en $rad \times s^{-1}$, d'où ici le $1/t$).

On utilise la même notation pour les champs $B_{xy}^{1/t}$ et $El_{tx}^{1/y}$ qui vont être respectivement associés à une rotation « généralisée » dans un plan spatial x, y et orientée suivant t, à une rotation « généralisée » dans un plan spatiotemporel t, x et orientée suivant y.

On a les notations suivantes qu'on conservera dorénavant :

$$2\Omega_{xy}^{1/t} = \frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y}$$

$$B_{xy}^{1/t} = -B_z = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$$

$$El_{tx}^{1/y} = El_x = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

Suite à ces analogies, une conséquence importante est la *réorientation* du champ électrique $El_{tx}^{1/y} = El_x$. En effet, on considère usuellement que le champ électrique $El_{tx}^{1/y} = El_x$ est orienté suivant x. Pour poursuivre jusqu'au bout l'analogie, il faut le réorienter suivant la dimension y. L'intérêt, c'est de définir le champ $El_{tx}^{1/y}$ tel un véritable vecteur rotation « généralisée » dans un plan spatiotemporel. L'inconvenant, c'est de devoir reprendre la plupart des formules classiques où le champ électrique intervient.

Si le champ électrique est réorienté, ce n'est pas le cas du champ magnétique $B_{xy}^{1/t} = -B_z$ qui conserve son orientation usuelle dans la dimension perpendiculaire à x, y. Que cette dimension soit z dans un espace x, y, z, ou t dans un espace x, y, t, cela reste la dimension perpendiculaire au plan x, y.

Nota 1
Dans un espace à 4 dimensions, le problème se pose à nouveau puisque deux dimensions peuvent être perpendiculaires à un plan. Dans cet essai, on en restera le plus souvent au cas simple de 3 dimensions.

Nota 2
Si le champ électrique est réorienté, on verra que ce ne sera pas le cas de la force électrique, ni des autres forces dites classiques.

IV.1.3 Définition d'un quadrivecteur potentiel vitesse

On a souligné précédemment les ressemblances entre électrostatique et gravitation, entre potentiel électrique A^t et potentiel newtonien V^t.

Sur le modèle du quadrivecteur potentiel électromagnétique $4\vec{A} = \begin{bmatrix} A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{bmatrix}$, on définit un quadrivecteur potentiel vitesse à partir des vitesses linéaires que l'on annule lors d'un changement de référentiels et du potentiel newtonien :

$$4\vec{V} = \begin{bmatrix} V^t \\ V^x \\ V^y \\ V^z \end{bmatrix}$$

Nota
A noter qu'en Relativité restreinte, le quadrivecteur vitesse est défini sous la forme :

$$4\vec{v} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma v^x \\ \gamma v^y \\ \gamma v^z \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ce n'est donc pas la même notion physique.

IV.2 Vecteur rotations généralisées et champs dans des plans spatiaux ou spatiotemporels

On propose de définir les champs $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, $\vec{E}l_{xt}^{1/y}$, $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, $\vec{K}_{xt}^{1/y}$ tels des vecteurs rotations généralisées dans des plans spatiaux et spatiotemporels que l'on annule lors d'un changement de référentiels. On se

place ici dans un espace à trois dimensions orthogonales entre elles (deux dimensions x, y pour l'Espace, et une dimension t pour le Temps).

On distinguera un peu artificiellement la notion de champ dérivant d'un potentiel de celle de vecteur rotation généralisée dans un plan spatial ou spatiotemporel, par le fait que :

- le vecteur rotation généralisée est la quantité physique présente avant le changement de référentiels,
- le champ est la quantité physique obtenue après l'annulation du vecteur rotation « généralisée » lors du changement de référentiels et potentiellement disponible si on effectue le changement de référentiels inverse.

IV.2.1 Champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$

On définit un champ pulsation correspondant au vecteur rotation dans un plan spatial $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$:

$$2\Omega_{xy}^{1/t} = \frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y}$$

Celui-ci est défini à partir d'un potentiel vecteur vitesse (de composantes V^x, V^y), correspondant aux vitesses linéaires annulées lors du changement de référentiels.

IV.2.2 Champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$

On définit un champ magnétique usuel dans le vide, dérivant du potentiel magnétique A^x, A^y :

$$B_{xy}^{1/t} = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}$$

A l'instar du champ pulsation, le champ magnétique apparait comme un vecteur rotation généralisée dans un plan spatial. Les potentiels vitesses V^x, V^y et magnétiques A^x, A^y sont tous deux des composantes définies dans l'Espace.

Nota sur la relation de Larmor

On a souligné les analogies entre potentiel vecteur vitesse V^x, V^y et potentiel vecteur magnétique A^x, A^y. Par contre, les causes profondes qui nécessitent de distinguer ces potentiels vitesse et magnétique resteront ici inexpliquées.

On note qu'en utilisant la relation de Larmor entre $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ à $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, on peut trouver une relation simple entre potentiel vitesse et potentiel magnétique.

On a :

$$\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} = \frac{e}{2m_e}\vec{B}_{xy}^{1/t}$$

avec $-e$ la charge de l'électron et m_e la masse de l'électron.

On a au niveau des potentiels :

$$\frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y} = \frac{e}{m_e}\left(\frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}\right)$$

Si on égalise un à un, on trouve :

$$V^x = \frac{e}{m_e}A^x$$

$$V^y = \frac{e}{m_e} A^y$$

On a les égalités entre impulsions potentielles :

$$m_e V^x = eA^x$$

$$m_e V^y = eA^y$$

IV.2.3 Champ électrique $\vec{El}_{tx}^{1/y}$

De la même manière, on définit un champ électrique $\vec{E}l_{tx}^{1/y}$ dérivant d'un potentiel électriqueA^t et d'un potentiel magnétique A^x :

$$El_{tx}^{1/y} = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

IV.2.4 Champ vecteur d'onde $\vec{K}_{tx}^{1/y}$

Le champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ et le champ électrique $\vec{E}l_{tx}^{1/y}$ dérivent tous deux du quadrivecteur potentiel électromagnétique. Le premier correspond à un vecteur rotation généralisée dans un plan spatial, le second correspond à un vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel.
Le champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ correspond un vecteur rotation dans un plan spatial et dérive du potentiel vecteur vitesse.
On cherche le pendant de $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel et dérivant du quadrivecteur potentiel vitesse.

En théorie des ondes, on a les analogies entre le Temps et l'Espace pour les grandeurs suivantes :

Temps	Espace
Période T en s	Longueur d'onde λ en m
Fréquence $\nu = \frac{1}{T}$en Hz ou s^{-1}	Nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ en m^{-1}
Pulsation $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ en $rad \times s^{-1}$	Vecteur d'onde $k = 2\pi\sigma = \frac{2\pi}{\lambda}$ en $rad \times m^{-1}$

L'analogue dans l'Espace de la pulsation $\omega = 2\pi\nu$, c'est le vecteur d'onde $k = 2\pi\sigma$.

L'idée, c'est de définir un champ vecteur d'onde $\vec{K}_{tx}^{1/y}$ égale à :

$$2c^2 K_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}$$

$2c^2 \vec{K}_{tx}^{1/y}$ est en $m \times s^{-2}$ (comme une accélération).

Nota 1
Le potentiel newtonien V^t doit être en $m^2 \times s^{-2}$ afin que $\frac{\partial V^t}{\partial x}$ soit bien en $m \times s^{-2}$.

Nota 2

On ajoute ici c^2 dans l'expression du champ vecteur d'onde $2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y}$ par soucis d'homogénéité. Dans un milieu autre que le vide (où la vitesse de phase de l'onde v_ϕ n'est plus égale à c), il devrait être possible de généraliser avec :

$$2{v_\phi}^2 K_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}$$

IV.2.5 Champ gravitationnel newtonien et champ gravitationnel einsteinien

On propose de décomposer le champ vecteur d'onde $2c^2 K_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}$ en deux termes.

L'un, le champ gravitationnel newtonien Gr_{tx}^{y} qui apparait comme un cas particulier du champ vecteur d'onde lorsque $\frac{\partial V^x}{\partial t} = 0$, $Gr_{tx}^{y} = -\frac{\partial V^t}{\partial x}$.

L'autre, un champ de type accélération $a_{ein}{}_{xt}^{y} = -\frac{\partial V^x}{\partial t}$ que l'on ajoute lors d'un changement de référentiels implicite. On le qualifie ici d'accélération einsteinienne ou de champ gravitationnel einsteinien en référence au principe proposé par A. Einstein d'équivalence entre accélération et champ gravitationnel. Cette accélération intervient classiquement dans le principe fondamental de la dynamique de Newton :

$$m\vec{a}_{ein} = \Sigma\vec{F}$$

On a la relation entre le champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$, le champ gravitationnel newtonien et le champ gravitationnel einsteinien :

$$2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = \vec{G}r_{tx}^{1/y} - \vec{a}_{ein}{}_{xt}^{y}$$

Nota 1

A vérifier si on peut généraliser sous cette forme dans les milieux à indice de réfraction $n \neq 1$:

$$2{v_\phi}^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = \vec{G}r_{tx}^{1/y} - \vec{a}_{ein}{}_{xt}^{y} ?$$

Nota 2

Observons qu'à l'instar de $\vec{K}_{tx}^{1/y}$, $\vec{G}r_{tx}^{1/y}$ et $\vec{a}_{ein}{}_{xt}^{y}$ peuvent tous deux être considérés comme des vecteurs rotations généralisées dans un plan spatiotemporel t, x et orientés suivant y.

IV.2.6 Tenseur $\bar{\bar{D}}_{\mu\nu}$ des champs vecteur d'onde et pulsation

On rappelle le tenseur de Maxwell Faraday.

$$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{tz}}{c} \\ -\frac{El_{tx}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ -\frac{El_{ty}}{c} & -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ -\frac{El_{tz}}{c} & -B_{xz} & -B_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

Par analogie entre $\vec{K}$ et $\vec{El}$, puis entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{B}$, on définit le tenseur vecteur d'onde pulsation dans les 4 dimensions de l'Espace-Temps :

$$\bar{\bar{D}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & cK_{tx} & cK_{ty} & cK_{tz} \\ -cK_{tx} & 0 & \Omega_{xy} & \Omega_{xz} \\ -cK_{ty} & -\Omega_{xy} & 0 & \Omega_{yz} \\ -cK_{tz} & -\Omega_{xz} & -\Omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

On l'a sous la forme suivante si on divise tous les termes par c :

$$\bar{\bar{D}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_{tx} & K_{ty} & K_{tz} \\ -K_{tx} & 0 & \frac{\Omega_{xy}}{c} & \frac{\Omega_{xz}}{c} \\ -K_{ty} & -\frac{\Omega_{xy}}{c} & 0 & \frac{\Omega_{yz}}{c} \\ -K_{tz} & -\frac{\Omega_{xz}}{c} & -\frac{\Omega_{yz}}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

IV.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a défini des « mouvements généralisés » de type vecteurs rotations généralisée dans un plan spatial ou spatiotemporel, vecteurs rotations qui deviennent des quantités potentielles, c'est-à-dire des champs dérivant de potentiels, lorsqu'on les annule lors d'un changement de référentiels.

L'objectif véritable que l'on va aborder dans le prochain chapitre, c'est de faire correspondre toute annulation d'un mouvement généralisé lors d'un changement de référentiels à une quantité dite d'inertie (de type force, accélération, énergie potentielle, etc.), que l'on ajoute pour conserver l'invariance des principales lois de la Nature. Dans le prochain chapitre, la principale loi de la Nature à conserver sera le principe fondamental de la dynamique de Newton.

Chapitre V Construire toute force sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis et de la force magnétique de Lorentz

Objet du chapitre

On cherche maintenant à construire toute force dite classique (on exclut les interactions nucléaires fortes et faibles) sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis, force que l'on ajoute dans le principe fondamental de la dynamique de Newton lorsqu'on annule le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

On s'aidera pour cela des champs et vecteurs rotations généralisés dans des plans spatiaux et spatiotemporels, que l'on a définis dans le précédent chapitre.

V.1 Objectif et angles d'attaque

V.1.1 Objectif et angle d'attaque de la Relativité générale

Dans la théorie de la Relativité générale, A. Einstein se fixe comme principal objectif le respect du principe de relativité généralisé, c'est-à-dire une invariance des lois de la Nature quel que soit le changement de référentiels.

Pour cela, A. Einstein cherche à conserver l'intervalle d'Espace-Temps $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$ quel que soit le changement de référentiels. Il décrit la notion de champ comme des déformations de l'Espace-Temps et s'inspire de l'équation source potentiel de Poisson gravitation pour proposer l'équation dite d'Einstein de la Relativité générale. On reviendra sur cela dans le dernier mémoire, lorsqu'on évoquera la théorie du Big-bang.

Dans ce chapitre, on reprend l'objectif d'A. Einstein de la Relativité générale, une invariance des lois de la Nature quel que soit le changement de référentiels. Cependant, on se restreint aux changements de référentiels du type annulation d'un vecteur rotation généralisée. De plus, on va utiliser un autre angle d'attaque davantage fondé sur les forces dites classiques, sur l'Electromagnétisme du 19ème siècle et sur l'Electrodynamique quantique du 20ème.

V.1.2 Angle d'attaque, sur le modèle de la force de Coriolis

Dans le 1er mémoire, on a évoqué les raisons poussant à rapprocher toute force « normale » d'une force d'inertie :

- premièrement une difficulté conceptuelle à accepter qu'il existe des référentiels privilégiés dits inertiels ou galiléens. Les référentiels en mouvement de rotation posant notamment problème puisque eux-aussi « fonctionnent » isolément. On songe en particulier au modèle de l'électron de Bohr, où l'électron en rotation et dans un état stationnaire, ne rayonne pas d'énergie,
- deuxièmement une difficulté à accepter l'existence de deux types de forces : forces d'inertie que l'on ajoute lors d'un changement de référentiels et forces « normales » qui seraient en quelque sorte préexistantes.

On a également souligné les analogies entre :

- l'énergie potentielle généralisée électromagnétique que l'on doit ajouter (dans les théories de Jauge locale, dans les dérivées partielles de la fonction d'onde ψ) lors de l'annulation d'une partie de la phase de la fonction d'onde ψ (correspondant à une transformation de Jauge locale),
- les forces d'inertie que l'on doit ajouter (dans le principe fondamental de la dynamique de Newton) lors de l'annulation du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (correspondant à un changement de référentiels),

afin d'avoir un invariant pour les principales lois de la Nature, que ce soit les équations d'onde ou le principe fondamental de la dynamique de Newton.

Dans ce 2ème mémoire, on a souligné les ressemblances entre la force de Coriolis $\vec{F}_{Cor} = m\vec{v}^{y} \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{Lor} = q\vec{v}^{y} \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$, des forces définies à partir d'une impulsion ou d'un courant et d'un champ (champ pulsation ou champ magnétique), et perpendiculaires à ces grandeurs.

On a également souligné les ressemblances entre les champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$, champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ et champ électrique $\vec{El}_{xt}^{1/y}$.

Suite à ces analogies et ressemblances, l'idée, c'est de construire la force électrique, la force magnétique et la force gravitationnelle sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis, reprenant ou élargissant les 3 caractéristiques suivantes :

- une quantité annulée lors d'un changement de référentiels, quantité à rapprocher d'un vecteur rotation généralisée dans un plan spatial ou spatiotemporel. La quantité annulée est $\Omega_{xy}^{1/t}$, $K_{xt}^{1/y}$, $B_{xy}^{1/t}$, $El_{xt}^{1/y}$. Le changement de référentiels s'effectue d'un état de référence R^0 à un référentiel R^{Ω}, R^K, R^B, R^{El} où l'on annule l'un des 4 vecteurs rotations généralisées,
- une quantité conservée lors du changement de référentiels (qui va prendre la forme d'une vitesse, d'une impulsion, d'un courant, d'une charge électrique ou d'une masse),
- une force à ajouter dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, force à la fois perpendiculaire à la quantité conservée et à la quantité annulée.

Nota 1 sur le champ électrique et la force électrique
Usuellement, la force électrique et le champ électrique ont la même direction. Le fait de réorienter le champ électrique $\vec{El}_{xt}^{1/y}$ de x à y (tel un vecteur rotation), permet d'obtenir une force électrique qui est perpendiculaire à la fois à la charge q^t et au champ $\vec{El}_{xt}^{1/y}$. La force électrique ainsi définie conservera la même orientation que l'usuelle. On y reviendra.

Nota 2, restriction avec le produit vectoriel
Sur le modèle de la force de Coriolis, toutes les forces étudiées ici seront construites à partir d'un produit vectoriel, notion proposée par Willard Gibbs à la fin du 19ème siècle.
Le produit vectoriel est défini dans trois dimensions d'un espace, cela oblige à une restriction importante : se placer uniquement dans des espaces à trois dimensions, par exemple un espace avec deux dimensions de l'Espace et une dimension du Temps.

Nota 3 sur les forces de contact
On admettra dans ce mémoire que les forces dites de contacts (frottement, etc.) qui interviennent dans le principe fondamental de la dynamique de Newton peuvent toujours se réduire à des forces gravitationnelles et/ou électriques et que donc l'étude de ces dernières forces est suffisante.

V.2 Quantités conservées et quantités annulées lors de changement de référentiels, vitesse, masse et charge

V.2.1 Constatations sur les quantités conservées et annulées lors d'un changement de référentiels

Lorsqu'on examine une accélération de Coriolis $\vec{a}_{cor\,yt}^{\;x} = 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \wedge \vec{v}_r^{\,y}$, on constate que lors du changement de référentiels de R^0 à R^{Ω}, il y a une quantité annulée le champ $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et une quantité conservée propre au corps étudié : $\vec{v}_r^{\,y}$ la vitesse relative du corps étudié.

Par analogie entre la force de Coriolis et le magnétisme, on propose qu'il peut en être de même pour le la champ électromoteur $\vec{Em}_{yt}^{x} = \vec{v}^{y} \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$. Lors d'un changement de référentiel de R^0 à R^B. Il y a

une quantité annulée le vecteur rotation généralisé $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ et une quantité conservée propre au corps étudié : $\vec{v}^{y}$ la vitesse de la charge électrique.

Si on reprend le tableau énergie impulsion potentielles, chaque énergie et impulsion potentielles peut se décomposer en :

- une quantité conservée (en minuscule) lors d'un changement de référentiels, la charge q^t et la masse m^t,
- une quantité annulée (en majuscule) lors d'un changement de référentiels, les quadrivecteurs potentiels électromagnétiques A^μ et vitesses V^μ (dont dérivent les champs).

	Electromagnétisme	**Gravitation**
Energie potentielle Ep^t	$Ep^t = q^t A^t$	$Ep^t = m^t V^t$
Impulsion potentielle suivant x	$p^x = q^t A^x$	$p^x = m^t V^x$
Impulsion potentielle suivant y	$p^y = q^t A^y$	$p^y = m^t V^y$

On note que les quantités conservées sont propres à la particule et que les quantités annulées lui sont extérieures.

V.2.2 Quantités conservées en physique, théorème de Noether

En 1918, Emilie Noether propose un célèbre théorème qui porte son nom et qui parle de quantités conservées lors de transformations. Disons-en maintenant quelques mots.

Soit un lagrangien L possédant une symétrie. Cela signifie que L n'est pas modifié, quand on lui applique une famille de transformations paramétrée par une variable s, envoyant une position q vers une nouvelle position $q(s)$.

Cela s'exprime par la nullité de la dérivée du Lagrangien par rapport à s :

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

Le théorème de Noether stipule qu'il existe une quantité C conservée lors de la transformation paramétrée par s et qui est égale à :

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(s)} \frac{\partial q(s)}{\partial s} = p \frac{\partial q(s)}{\partial s}$$

A noter que comme pour le lagrangien L, on a pour C :

$$\frac{\partial C}{\partial s} = 0$$

Par exemple, lorsque L est invariant par une translation dans l'Espace $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$, la variable s est alors la position q. On obtient comme quantité conservée :

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial q} = p \frac{\partial q}{\partial q} = p$$

L'impulsion est donc la quantité conservée lorsque le lagrangien est invariant par translation dans l'Espace.

De même, on montre que la quantité conservée est :

- l'énergie (c'est-à-dire le hamiltonien H) lorsque le lagrangien est invariant par translation dans le Temps,
- le moment cinétique lorsque le lagrangien est invariant par rotation,
- un quadrivecteur densité de charge courants lorsque le Lagrangien est invariant par changement de phase de la fonction d'onde, c'est-à-dire par transformation de Jauge globale.

Etudions ce dernier point dans le prochain paragraphe.

V.2.3 Application du théorème de Noether : conservation du quadrivecteur densité de charge courants lorsque le Lagrangien est invariant par transformation de Jauge globale

Prenons l'exemple simple d'une transformation de Jauge globale qui s'applique à la fonction d'onde :

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$$

α peut prendre n'importe quelle valeur réelle,
x désigne ici une variable locale, c'est-à-dire un instant ou une position.

Nota
On différencie transformation de Jauge globale et transformation de Jauge locale avec α indépendant des variables d'instant ou de position pour la première et $\alpha(x)$ fonction d'une variable d'instant ou de position pour la seconde.

On a le lagrangien d'un électron libre décrit par la fonction d'onde ψ :

$$L = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi$$

On note que ce lagrangien est invariant par $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$.

Suivant le théorème de Noether, il existe une quantité conservée lors de le la transformation.

On a pour la densité de charge :

$$j^t = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}(\alpha)}\frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}$$

Pour le courant :

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial\left(\vec{\nabla}\psi(\alpha)\right)}\frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha}$$

$$(\mu = x, y, z)$$

En développant ces deux équations, on obtient le quadrivecteur densité de charge courants défini en Electrodynamique quantique relativiste :

$$\mathrm{j}^\mu = -\mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$(\mu = t, x, y, z)$$

V.3 Accélération d'inertie de Coriolis et champ électromoteur induit, tous deux obtenus à partir de l'annulation d'un vecteur rotation généralisée dans un plan spatial

V.3.1 Qu'est-ce qui distingue une accélération d'inertie d'une force d'inertie ?

Lors d'un changement de référentiels, on annule (ou on modifie) un mouvement. Dans ce cas, on s'interroge pourquoi on ajoute dans le principe fondamental dynamique une force d'inertie et non pas une accélération d'inertie, accélération qui s'apparente en effet beaucoup plus à un mouvement ?

La notion de force est très usitée en physique. Elle est étrange, moins intuitive que la notion d'accélération. Dans le principe fondamental de la dynamique, ce ne sont pas des grandeurs de mouvements qui interviennent de part et d'autre de la relation. D'un côté (à droite), on a une somme vectorielle de forces. De l'autre côté (à gauche), on a une variation de mouvement (ou accélération) fois une masse (dont on ne peut comprendre intuitivement la présence).

Les notions d'accélération et d'accélération d'inertie sont beaucoup plus intuitives. Lorsqu'un corps est en mouvement rectiligne, il peut avoir une accélération tangentielle. Lorsque ce corps entre en rotation, il acquiert une accélération normale en plus de l'accélération tangentielle. Si on se place dans le référentiel R^{Ω} où on annule le vecteur rotation $\vec{\Omega}$, il faut ajouter une accélération d'inertie centrifuge qui est justement l'accélération normale. Tout cela se démontre très bien mathématiquement et peut intuitivement se comprendre.
A contrario, la notion de force d'inertie (à cause de la prise en compte de la masse) ne se démontre pas mathématiquement.

Pour expliquer ce qui distingue la notion d'accélération d'inertie de la notion de force d'inertie, on propose l'idée suivante.
Et si *l'accélération d'inertie* était ajoutée dans toutes lois générales de la Nature invariantes par changement de référentiels, lorsqu'on annule lors d'un changement de référentiels *un vecteur rotation généralisée* dans un plan *spatial* ?
Et si *la force d'inertie* était ajoutée dans toutes lois générales de la Nature invariantes par changement de référentiels, lorsqu'on annule lors d'un changement de référentiels *un vecteur rotation généralisée* dans un plan *spatiotemporel* ?

L'accélération d'inertie de Coriolis est perpendiculaire à une vitesse $\vec{v}_r$ et à un vecteur rotation (le premier terme conservé et le second terme annulé lors du changement de référentiels). Pour une force, ce serait presque la même chose. Néanmoins, la force se distinguerait d'une accélération d'inertie par l'annulation non pas d'un vecteur rotation généralisée dans un plan *spatial*, mais dans un plan *spatiotemporel*.
Ainsi, la force serait perpendiculaire à quelque chose d'analogue à la vitesse $\vec{v}_r$ et à un vecteur rotation généralisée dans un plan *spatiotemporel*.

C'est cette idée que nous allons évaluer dans les prochains paragraphes.

V.3.2 Vecteurs rotations généralisées dans un plan spatial

Soit les champs pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ tous deux correspondent à un vecteur rotation généralisée dans un plan spatial x, y :

$$2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} = (\frac{\partial V^y}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial y})_{xy}^{1/t}$$

$$\vec{B}_{xy}^{1/t} = (\frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y})_{xy}^{1/t}$$

V.3.3 Accélération d'inertie de Coriolis

En annulant le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, c'est-à-dire en passant de R^0 à R^Ω :

- on ajoute l'accélération d'inertie centrifuge (avec la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e^y = \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \wedge \vec{x}$ qui est également annulée lors du changement de référentiels) :

$$\vec{a}_{Cent}{}_{ty}^{x} = -\vec{v}_e^y \wedge \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} = -(\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$$

- on ajoute l'accélération d'inertie de Coriolis avec la vitesse relative $\vec{v}_r^y$ comme quantité conservée :

$$\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} = -\vec{v}_r^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$$

Nota
x tient ici le rôle de la coordonnée normale (ou radiale) et y le rôle de la coordonnée tangentielle.

On a la figure suivante pour l'accélération d'inertie de Coriolis :

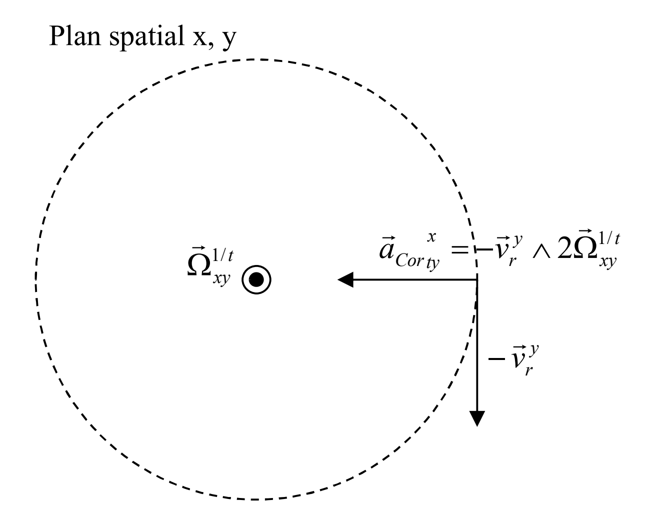


Figure 2 : accélération d'inertie de Coriolis

Nota
On a dans R^0, la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a^y = \vec{v}_e^y + \vec{v}_r^y$$

V.3.4 Champ électromoteur induit

Le champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ correspond à une rotation généralisée dans un plan spatial. Suivant notre idée initiale, si on annule le vecteur rotation généralisée $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ lors d'un changement de référentiels de R^0 à R^B, on s'attend à obtenir quelque chose à ajouter qui s'apparente davantage à une accélération qu'à une force.

C'est précisément ce qu'on constate, puisqu'on obtient un champ électromoteur induit $\vec{E}m$ lors du passage de R^0 à R^B:

$$\vec{E}m_{ty}^{x} = \vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$$

avec $\vec{v}^y$ la vitesse des charge électriques, quantité conservée lors du passage de R^0 à R^B

On a la figure suivante :

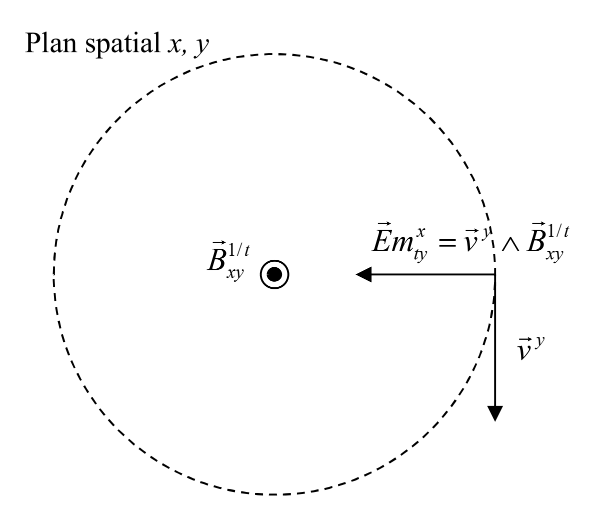


Figure 3 : champ électromoteur induit

Nota 1
$\vec{E}m_{ty}^{x}$ possède usuellement la même direction que le champ électrique $El_{tx}^{y} = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$. Cependant, ici, puisqu'on réoriente le champ électrique El_{tx}^{y}, ils n'ont plus la même direction.

Nota 2
Puisqu'on réoriente le champ électrique El_{tx}^{y}, on ne peut plus utiliser telle quelle l'équation de Maxwell Faraday :

$$r\vec{o}t\vec{E}l = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Par contre, puisque le champ électromoteur Em n'est pas orienté, on peut l'utiliser dans l'équation de Maxwell Faraday :

$$r\vec{o}t\vec{E}m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On peut également lui appliquer la loi de Lenz Faraday. On a donc une force électromotrice d'induction :

$$e = \int \vec{E}m.d\vec{l} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

Φ_c désigne le flux magnétique total coupé par le circuit électrique lors de son déplacement. On reviendra sur ces phénomènes d'induction dans le prochain mémoire.

V.4 Forces obtenues à partir de l'annulation d'un vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel

V.4.1 Vecteurs rotations généralisées et champs dans un plan spatiotemporel

On a le champ électrique :

$$\vec{E}l_{tx}^{1/y} = \frac{\partial A^x}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial x}$$

On a le champ vecteur d'onde :

$$2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}$$

V.4.2 Force électrique et force électrostatique de Coulomb

Pour la force électrique, la quantité conservée lors du changement de référentiel de R^0 à R^{El} est la charge électrique q^t.
Comme on veut construire les forces (classiques) sur le modèle de l'accélération d'inertie de Coriolis, il faut une charge électrique de type vecteur. C'est-à-dire en plus de sa norme, il lui faut une direction et un sens. En physique (quantique, relativiste, etc.), on définit fréquemment la densité de charge comme la composante temporelle d'un quadrivecteur densité de charge courants. Cela permet d'orienter la densité de charge électrique dans le Temps.

On construit une force électrique sur le modèle de la force de Coriolis, q^t la quantité conservée, $\vec{El}_{tx}^{1/y}$ le vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel annulé lors du passage de R^0 à R^{El}. On obtient :

$$\vec{F}_{El_{ty}}^{\ x} = \vec{q}^t \wedge \vec{El}_{tx}^{1/y}$$

On a la figure suivante :

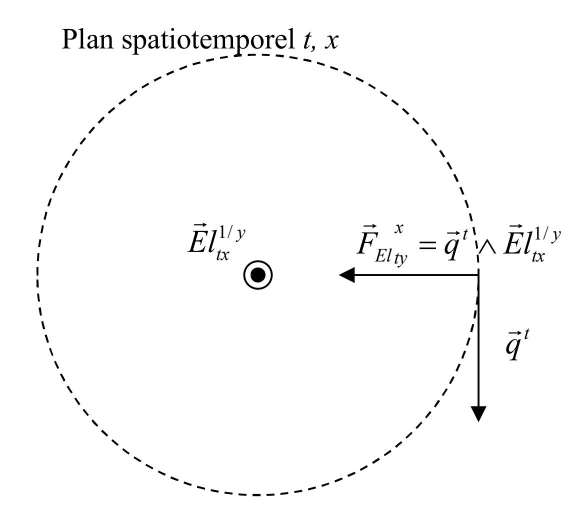


Figure 4 : force électrique

Nota 1
On note que la force électrique ainsi obtenue possède la même direction que la force électrique telle qu'on la définit usuellement.

Nota 2
Pour une onde électromagnétique, on parle de polarisation horizontale ou verticale lorsque le champ électrique est horizontal ou vertical. On utilise alors une antenne verticale ou horizontale pour émettre ou recevoir ce type d'ondes.
Dans le cas d'une réorientation du champ électrique (qui possède alors la même direction que le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde électromagnétique), la polarisation de l'onde électromagnétique correspond à la direction de la force électrique et non plus à celle du champ électrique.

Nota 3

On utilise assez peu fréquemment le terme de force électrique, puisque toujours couplée avec la force magnétique (sauf dans le cas de la force électrostatique), elle donne la force électromagnétique.

Lorsque $\frac{\partial A^x}{\partial t} = 0$, les phénomènes magnétiques sont absents, et on a simplement le champ électrostatique :

$$\vec{Es}_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial A^t}{\partial x}$$

On obtient de même la force électrostatique de Coulomb (cas particulier de la force électrique) :

$$\vec{F}_{Coul_{ty}}^{\ x} = \vec{q}^t \wedge \vec{Es}_{tx}^{1/y}$$

Nota, analogie intuitive

Dans un mouvement circulaire uniforme, on a la relation entre la vitesse angulaire de rotation $\Omega^{1/t}$ et la vitesse linéaire de rotation V^θ : $V^\theta = r\Omega^{1/t}$ (V^θ étant considéré ici comme un potentiel vitesse).

Pour trouver $\Omega^{1/t}$, on peut dériver V^θ par rapport à r.

$$\Omega^{1/t} = \frac{\partial V^\theta}{\partial r} = \frac{\partial r\Omega^{1/t}}{\partial r} = \Omega^{1/t}$$

En électrostatique, on a :

$$Es_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial A^t}{\partial x}$$

Si on poursuit l'analogie, le potentiel électrique A^t joue le rôle d'une « vitesse linéaire de rotation généralisée » dans un plan spatiotemporel annulée lorsqu'on passe de R^0 à R^{El}.

V.4.3 Force gravitationnelle

On a vu que le champ vecteur d'onde $\vec{K}_{tx}^{1/y}$ correspondant au vecteur rotation « généralisée » dans un plan spatiotemporel, est le pendant du champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ correspondant au vecteur rotation dans un plan spatial.

Suivant une stricte analogie avec la force électrique, l'idée c'est de construire une force gravitationnelle avec :

- un champ vecteur d'onde $\vec{K}_{tx}^{1/y}$, dont le vecteur rotation « généralisée » correspondant s'annule lors du changement de référentiels de R^0 à R^K,
- une quantité conservée qui ne va plus être une charge électrique $\vec{q}^t$ mais une masse dirigée dans le Temps $\vec{m}^t$.

Une difficulté consiste donc à accepter la vectorisation de la masse $\vec{m}^t$ dans le Temps. Il est vrai que la masse est très rarement vectorisée en mécanique classique. En physique relativiste, on distingue parfois les notions de masse longitudinale et de masse transversale.

Suivant une stricte analogie avec la force électrique, on a la force gravitationnelle (qui inclut les gravitations dites newtonienne et einsteinienne) :

$$\vec{F}_{K_{ty}}^{\ x} = \vec{m}^t \wedge 2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y}$$

avec *:*

$$2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}$$

On a :

$$2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = \vec{G}r_{tx}^{1/y} - \vec{a}_{Ein}{}_{xt}^{y}$$

avec :

$$a_{ein}{}_{xt}^{y} = -\frac{\partial V^x}{\partial t}$$

$$Gr_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial V^t}{\partial x}$$

On a la figure suivante :

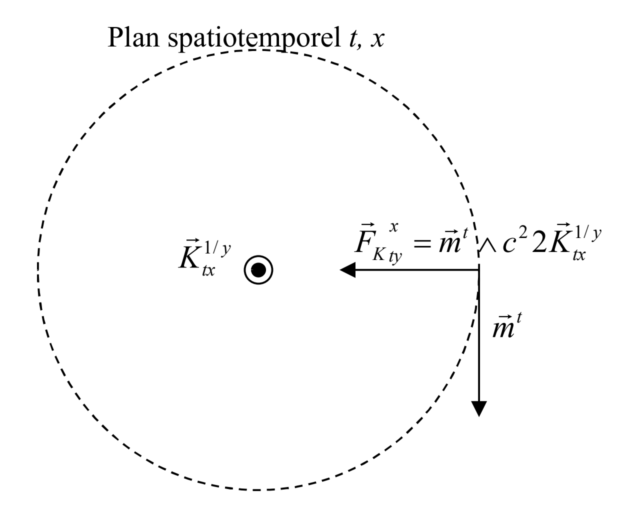


Figure 5 : force gravitationnelle

Dans le cas de la gravitation newtonienne, on a :

$$\vec{G}r_{tx}^{1/y} = 2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = (-\frac{\partial V^t}{\partial x})_{tx}^{y}$$

avec :

$$\frac{\partial V^x}{\partial t} = 0$$

On a la force gravitationnelle newtonienne classique qui s'ajoute dans le référentiel R^{Gr} où on annule $\vec{G}r_{tx}^{1/y}$:

$$\vec{F}_{Gr}{}_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge \vec{G}r_{tx}^{1/y} = -\vec{m}^t \wedge (\frac{\partial V^t}{\partial x})_{tx}^{y}$$

Dans le cas de la gravitation einsteinienne, on a :

$$\vec{a}_{Ein}{}_{xt}^{y} = -2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y} = (-\frac{\partial V^x}{\partial t})_{xt}^{y}$$

avec :

$$\frac{\partial V^t}{\partial x} = 0$$

On a la force gravitationnelle einsteinienne qui s'ajoute dans le référentiel R^a où on annule $\vec{a}_{ein}{}_{xt}^{y}$:

$$\vec{F}_{Ein}{}_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge \vec{a}_{Ein}{}_{xt}^{y} = -\vec{m}^t \wedge (\frac{\partial V^x}{\partial t})_{xt}^{y}$$

On souligne que la force gravitationnelle einsteinienne $\vec{F}_{Ein}{}_{ty}^{x}$ est orientée dans la même direction x que la vitesse $\vec{v}^x$.

Nota 1, longueur d'onde infinie

Dans le cas où on a :

$$m\vec{a}_{Ein}{}_{xt}^{y} = m\vec{G}r_{tx}^{1/y}$$

On obtient :

$$-\frac{\partial V^x}{\partial t} = -\frac{\partial V^t}{\partial x}$$

$$2c^2 K_{tx}^{1/y} = \frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x} = 0$$

La longueur d'onde $\lambda^y = \frac{2\pi}{K_{tx}^{1/y}}$ est donc infinie.

Nota 2, analogue de la relation de Larmor pour des vecteurs rotations généralisées dans un plan spatiotemporel

On rappelle la relation de Larmor qui traduit des effets identiques d'un champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ (c'est-à-dire 2 champs dans un plan spatial), lorsque les valeurs de la masse et de la charge sont correctement choisies (ici m_e masse de l'électron et $-e$ charge de l'électron) :

$$2m_e\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} = e\vec{B}_{xy}^{1/t}$$

On cherche une relation analogue pour des vecteurs rotations dans un plan spatiotemporel.

On applique le principe fondamental de la dynamique de Newton pour un électron à la fois dans un champ gravitationnel newtonien et dans un champ électrique :

$$m_e\vec{a}_{Ein}{}_{xt}^{y} = m_e\vec{G}r_{tx}^{1/y} - e\vec{E}l_{tx}^{1/y}$$

$$m_e\vec{a}_{Ein}{}_{xt}^{y} - m_e\vec{G}r_{tx}^{1/y} = -e\vec{E}l_{tx}^{1/y}$$

En passant aux potentiels vitesses :

$$m_e(-\frac{\partial V^x}{\partial t} + \frac{\partial V^t}{\partial x}) = -e\vec{E}l_{tx}^{1/y}$$

$$m_e(\frac{\partial V^x}{\partial t} - \frac{\partial V^t}{\partial x}) = e\vec{E}l_{tx}^{1/y}$$

On obtient :

$$2m_e c^2 \vec{K}_{tx}^{1/y} = e\vec{E}l_{tx}^{1/y}$$

On trouve une relation analogue à la relation de Larmor pour des vecteurs rotations généralisées dans un plan spatiotemporel. $2m_e c^2 \vec{K}_{tx}^{1/y}$ et $e\vec{E}l_{tx}^{1/y}$ ont ici les mêmes effets qui peuvent se compenser.

V.4.4 Qu'est-ce qui distingue une accélération d'inertie d'une force d'inertie ?

Une accélération d'inertie (de type centrifuge ou de Coriolis) se distingue d'une force d'inertie par le fait que :

- lorsqu'une accélération d'inertie doit être ajoutée lors d'un changement de référentiels, ce qui est annulé, c'est un vecteur rotation « généralisée » dans un *plan spatial* (vecteur rotation associé à un champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$),
- lorsqu'une force d'inertie doit être ajoutée lors d'un changement de référentiels, ce qui est annulé, c'est un vecteur rotation « généralisée » dans un *plan spatiotemporel* (vecteur rotation associé à un champ électrique $\vec{E}l_{xt}^{1/y}$ ou à un champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$).

Une force est orientée dans l'Espace et une accélération dans le Temps. Une accélération d'inertie est en quelque sorte l'analogue, dans le Temps, de la force d'inertie dans l'Espace.

V.4.5 Définitions force de type électrique et force de type gravitationnel

On appelle force de type électrique, toute force dont la quantité conservée lors du changement de référentiels est une charge électrique $\vec{q}^t$.
La quantité annulée lors du changement de référentiels étant un vecteur rotation généralisées dans un plan spatiotemporel (correspondant au champ $\vec{E}l_{xt}^{1/y}$), on a une force électrique $\vec{F}_{El}{}_{ty}^{x} = \vec{q}^t \wedge \vec{E}l_{tx}^{1/y}$ orientée dans l'Espace (par exemple suivant x).

On appelle force de type gravitationnel, toute force dont la quantité conservée lors du changement de référentiels est une masse $\vec{m}^t$.
La quantité annulée lors du changement de référentiels étant un vecteur rotation généralisées dans un plan spatiotemporel (correspondant au champ $\vec{K}_{tx}^{1/y}$), on a une force gravitationnelle $\vec{F}_{K}{}_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge c^2 2\vec{K}_{tx}^{1/y}$ orientée dans l'Espace (par exemple suivant x).

V.5 Passage de l'accélération d'inertie de Coriolis et du champ électromoteur aux forces

Dans les paragraphes précédents, on a proposé :

- d'une part qu'une accélération d'inertie ou un champ électromoteur s'ajoutent lorsqu'on annule une rotation généralisée dans un plan spatial,
- d'autre part qu'une force s'ajoute lorsqu'on annule une rotation généralisée dans un plan spatiotemporel.

L'objectif maintenant, c'est de voir comment passer d'une accélération d'inertie (ou d'un champ électromoteur) à une force de type gravitationnel ou électrique.

V.5.1 Passage des accélérations centrifuge, de Coriolis, einsteinienne aux force d'inertie centrifuge, de Coriolis et de gravitation einsteinienne

Le champ gravitationnel einsteinien $(\vec{a}_{Ein})_{xt}^{y} = (-\frac{\partial V^x}{\partial t})_{xt}^{y}$ est de type accélération comme les accélérations d'inertie centrifuge $(\vec{a}_{Cent})_{ty}^{x}$ et de Coriolis $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x}$.
De plus, $(\vec{a}_{Ein})_{xt}^{y}$, $(\vec{a}_{Cent})_{ty}^{x}$, $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x}$ sont de type rotation généralisée dans un plan spatiotemporel t, y ou t, x.

Donc, d'après ces 2 points, on peut s'attendre, lorsqu'on annule l'une de ces 3 accélérations lors d'un changement de référentiels (et qu'on conserve une masse $\vec{m}^t$), à devoir ajouter une force d'inertie de type gravitationnel.

C'est exactement ce que prévoit la mécanique newtonienne, puisque lorsqu'on annule l'une de ces accélérations, il faut ajouter une force d'inertie centrifuge $(\vec{F}_{Cent})_{tx}^{y}$, une force d'inertie de Coriolis $(\vec{F}_{Cor})_{tx}^{y}$ ou une force gravitationnelle einsteinienne $(\vec{F}_{Ein})_{ty}^{x}$.

Passage d'une l'accélération d'inertie de Coriolis à une force d'inertie de Coriolis
Soit l'accélération d'inertie de Coriolis $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x}$ avec $\vec{v}^y$ la quantité conservée lors du changement du référentiels, et $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ le vecteur rotation annulée :

$$(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x} = -\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$$

Soulignons que l'accélération de Coriolis $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x}$ peut être considérée comme un vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel (on va toutefois devoir réorienter cette accélération pour obtenir ce qu'on souhaite).

Si on annule $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x}$ lors d'un changement de référentiels, et que la quantité conservée est une masse $\vec{m}^t$, on obtient la force gravitationnelle d'inertie de Coriolis orientée suivant x (toujours construite sur le même modèle) :

$$(\vec{F}_{Cor})_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge (\frac{\partial V^x}{\partial t})_{tx}^{y}$$

Même si la raison précise reste à éclaircir, on note que l'accélération de Coriolis doit être réorientée afin de devenir le vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel $(\frac{\partial V^x}{\partial t})_{tx}^{y}$, qui est annulé lors du changement de référentiels.
On a le passage de l'accélération de Coriolis (suivant x) au vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel t, x :

$$(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x} \rightarrow (\frac{\partial V^x}{\partial t})_{tx}^{y}$$

On a les deux expressions équivalentes pour obtenir la force d'inertie de Coriolis (de type force gravitationnelle) :

$$(\vec{F}_{Cor})_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge (\frac{\partial V^x}{\partial t})_{tx}^{y}$$

$$(\vec{F}_{Cor})_{ty}^{x} = m^t \ (\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{ty}^{x} = -m^t \ (\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x}$$

Dans la première, $(\frac{\partial V^x}{\partial t})_{tx}^{y}$ est un vecteur rotation généralisé dans un plan spatiotemporel. Dans la deuxième, $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^{x} = (\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{yt}^{x}$ est une accélération d'inertie.

Nota
Observons que le produit vectoriel ne s'applique qu'une fois, soit dans l'expression de l'accélération de Coriolis, soit dans l'expression de la force de Coriolis.

V.5.2 Du champ électromoteur $\vec{Em}_{ty}^{x}$ à la force magnétique de Lorentz $(\vec{F}_{Lor})_{ty}^{x}$

Passage d'un champ électromoteur à une force magnétique de Lorentz

Lors d'un changement de référentiels qui annule le champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ et qui conserve $\vec{v}^y$ (la vitesse du circuit électrique), on doit ajouter un champ électromoteur du type :

$$\vec{E}m_{ty}^x = \vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$$

Notons que le champ électromoteur $\vec{E}m_{ty}^x$ se construit de la même manière que l'accélération de Coriolis $(\vec{a}_{Cor})_{ty}^x$. L'analogie va d'ailleurs se poursuivre lorsqu'on passe du champ électromoteur à la force magnétique de Lorentz.

Si on annule $\vec{E}m_{ty}^x$ lors d'un changement de référentiels, et que la quantité conservée est une charge $\vec{q}^t$, on obtient une force électrique orientée suivant x (toujours construite sur le même modèle) :

$$(\vec{F}_{Lor})_{ty}^x = \vec{q}^t \ \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})_{tx}^y$$

Même si la raison précise reste à éclaircir, on note que le champ électromoteur doit être réorienté afin de devenir le vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel correspondant au champ électrique induit $\vec{E}i_{tx}^y = (\frac{\partial A^x}{\partial t})_{tx}^y$, qui est annulé lors du changement de référentiels.

On a le passage d'un champ électromoteur $\vec{E}m_{ty}^x$ à un vecteur rotation généralisée dans un plan spatiotemporel correspondant au champ électrique induit $\vec{E}i_{tx}^y$:

$$\vec{E}m_{ty}^x \rightarrow \vec{E}i_{tx}^y = (\frac{\partial A^x}{\partial t})_{tx}^y$$

On a les deux expressions équivalentes pour obtenir la force magnétique de Lorentz (de type électrique) :

$$(\vec{F}_{Lor})_{ty}^x = \vec{q}^t \ \wedge \vec{E}i_{tx}^y = \vec{q}^t \ \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})_{tx}^y$$

$$(\vec{F}_{Lor})_{ty}^x = (q^t \ \vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t})_{ty}^x = q^t \ (\vec{E}m)_{ty}^x$$

Dans la première, $\vec{E}i_{tx}^y = (\frac{\partial A^x}{\partial t})_{tx}^y$ est un vecteur rotation dans un plan spatiotemporel. Dans la deuxième, $\vec{E}m_{ty}^x = \vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$ est un champ électromoteur.

Le champ électromoteur $\vec{E}m_{ty}^x$ a la même orientation que la force magnétique de Lorentz $(\vec{F}_{Lor})_{ty}^x$. Comme pour la gravitation, le produit vectoriel ne s'applique qu'une fois.

Nota sur l'accélération et le champ électromoteur
D'après ce qui précède, on peut mieux comprendre pourquoi dans un champ gravitationnel newtonien l'accélération d'un corps ne dépend pas de sa masse, alors que dans un champ électrostatique l'accélération d'un corps dépend de sa charge massique.

En effet, l'analogue de la gravitation, pour l'électricité, ce n'est pas un vecteur spatiotemporel du genre accélération, mais un vecteur spatiotemporel du genre champ induit.
Ainsi, l'analogue de : dans un champ gravitationnel newtonien, l'accélération d'un corps ne dépend pas de sa masse, c'est : dans un champ électrostatique, le champ induit d'un corps ne dépend pas de sa charge électrique.

V.5.3 Vecteurs axiaux (ou pseudo-vecteurs) et vecteur vrais (ou vecteurs polaires)

Lorsqu'une grandeur est complétement définie par une intensité, un axe et un sens de rotation autour de cet axe, comme dans le cas d'un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, on dit que cette grandeur est un vecteur axial ou un pseudo-vecteur. On l'écrit parfois surmontée d'une flèche curviligne : $\overset{\curvearrowright}{\Omega}$, indiquant que cette grandeur nécessite la connaissance d'un sens de rotation.

Suivant les idées développées ici, la notion de vecteur rotation généralisée dans un plan spatial est identique à celle de vecteur axial. La notation $\vec{\Omega}^{1/t}$ ou $\vec{B}^{1/t}$ est donc ici équivalente à $\overset{\curvearrowright}{\Omega}$ ou $\overset{\curvearrowright}{B}$.

Pour les vecteurs « classiques », du type une vitesse $\vec{v}$ ou une force $\vec{F}$, on parle parfois de vecteurs vrais ou de vecteurs polaires.
Les composantes d'un vecteur axial se transforment par changement de repères, comme celles d'un vecteur polaire. Néanmoins, lorsqu'on passe d'un repère direct à un repère inverse, les composantes d'un vecteur axial ne changent pas de signe, contrairement à celles d'un vecteur polaire.

Vecteur vrai (ou polaire)
Un vecteur vrai $\vec{v}$ de composantes (v^x, v^y, v^z) dans le repère (O, $\vec{e}^x$, $\vec{e}^y$, $\vec{e}^z$) est représenté dans le repère inverse (O, $-\vec{e}^x$, $-\vec{e}^y$, $-\vec{e}^z$) par un vecteur de composantes $(-v^x, -v^y, -v^z)$.
Le vecteur vitesse $\vec{v}$, le vecteur impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$, le vecteur force $\vec{F}$ sont des exemples de vecteurs vrais. Ils sont tous dans le plan de rotation, d'où le qualificatif de polaire.

Vecteur axial d'une rotation généralisée dans un plan spatial
Un vecteur axial $\vec{A}^{1/t}$ ou pseudo-vecteur de composantes (a^x, a^y, a^z) dans le repère (O, $\vec{e}^x$, $\vec{e}^y$, $\vec{e}^z$) est représenté dans le repère inverse (O, $-\vec{e}^x$, $-\vec{e}^y$, $-\vec{e}^z$) par les mêmes composantes (a^x, a^y, a^z).
Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, le champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, le moment cinétique en un point O : $\vec{L}_{Oxy}^{1/t} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, le moment d'une force en un point O : $\vec{M}_{Oxy}^{1/t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ sont des exemples de vecteurs axiaux. Ils sont tous perpendiculaires au plan spatial de rotation, d'où le qualificatif d'axial.

On peut remarquer :

- que le produit vectoriel de deux vecteurs vrais se comporte comme un vecteur axial, par exemple $\vec{L}_{Oxy}^{1/t} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$,
- que le produit vectoriel d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial se comporte comme un vecteur axial, par exemple $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$.

Vecteur axial d'une rotation généralisée dans un plan spatiotemporel
Usuellement, le champ électrique $\vec{El}$ est présenté comme un vecteur vrai. On propose dans ce mémoire de l'interpréter comme un vecteur axial d'une rotation généralisée dans un plan spatiotemporel. On a ainsi la force électrique, vecteur vrai, produit vectoriel d'un vecteur vrai $\vec{q}^t$ et d'un vecteur axial $\vec{El}_{xt}^{1/y}$:

$$\vec{F}^x = \vec{q}^t \wedge \vec{El}_{xt}^{1/y}$$

Comme le champ électrique, le champ vecteur d'onde $\vec{K}_{tx}^{1/y}$ est aussi un vecteur axial d'une rotation généralisée dans un plan spatiotemporel.

Un vecteur accélération $\vec{a}^x$, un vecteur force $\vec{F}^x$, un vecteur champ électromoteur $\vec{Em}^x$ sont tous 3 des vecteurs vrais, produits vectoriels d'un vecteur vrai et d'un vecteur axial d'une rotation généralisée.

V.6 Tableau récapitulatif (quantités annulées et conservées lors d'un changement de référentiels)

Pour terminer le chapitre, on récapitule dans le tableau ci-dessous, ce qui vient d'être énoncé :

	Quantité conservée : vitesse	**Quantité conservée : vitesse**
Quantité annulée : vecteur rotation dans un *plan spatial*	***Coriolis*** Quantité annulée $\Omega_{xy}^{1/t}$ Quantité conservée $\vec{v}^{y}$ (vitesse relative) Il faut ajouter une accélération d'inertie de Coriolis $\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} = -\vec{v}^{y} \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$	***Electromoteur*** Quantité annulée $B_{xy}^{1/t}$ Quantité conservée $\vec{v}^{y}$ (vitesse du circuit électrique). Il faut ajouter un champ électromoteur $\vec{E}m_{ty}^{x} = \vec{v}^{y} \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$
	Quantité conservée : masse	**Quantité conservée : charge électrique**
Quantité annulée : vecteur rotation dans un *plan spatiotemporel*	***Gravitation*** Quantité annulée $K_{tx}^{1/y}$ Quantité conservée $\vec{m}^{t}$ Il faut ajouter une force de type gravitationnel : $\vec{F}_{K}{}_{ty}^{x} = \vec{m}^{t} \wedge 2c^{2}\vec{K}_{tx}^{1/y}$	***Electromagnétisme*** Quantité annulée $El_{tx}^{1/y}$ Quantité conservée $\vec{q}^{t}$ Il faut ajouter une force de type électrique : $\vec{F}_{El}{}_{ty}^{x} = \vec{q}^{t} \wedge \vec{E}l_{tx}^{1/y}$

Chapitre VI Réflexions sur R^0 et nouvelle interprétation pour la masse ?

Objet du chapitre

Pour terminer ce mémoire, on mène quelques dernières réflexions sur le référentiel R^0 , ainsi que sur une nouvelle interprétation physique à donner à la masse, au vue de ce qui a été proposé dans les chapitres précédents.

VI.1 Quelques réflexions sur le référentiel R^0

VI.1.1 Sur une définition générale pour R^0

Si on reprend la définition d'un référentiel galiléen, comme un référentiel dans lequel le principe fondamental de la dynamique de Newton s'applique, sans avoir de forces d'inertie à ajouter, on peut élargir cette définition à R^0 et définir ce dernier, comme un référentiel dans lequel le principe fondamental de la dynamique de Newton s'applique, sans avoir de forces à ajouter, puisque toutes les forces sont des forces d'inertie :

$$\left[\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}_{inertie} = 0\right]_{R^0}$$

Ainsi, R^0 est le référentiel dans lequel s'effectuent tous les mouvements de rotations spatiales et spatiotemporelles et dans lequel aucune force (d'inertie) n'existe. Aucune rotation généralisée n'a été annulée dans ce référentiel R^0 .

Une nouvelle fois, la définition est un peu circulaire et reste théorique. Quel est le véritable sens de R^0 ? A quoi correspond-il physiquement ?

Nota, sur le référentiel galiléen

On peut interpréter le référentiel galiléen comme un référentiel intermédiaire où les vecteurs rotations généralisées $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, $\vec{E}l_{tx}^{1/y}$, $\vec{G}r_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial v^t}{\partial x}$ ont été annulés (et où on a ajouté les champs correspondants $\vec{B}_{xy}^{1/t}$, $\vec{E}l_{tx}^{1/y}$, $\vec{G}r_{tx}^{1/y}$, ainsi que leurs forces correspondantes dans le principe fondamental de la dynamique de Newton) et où les vecteurs rotations généralisées $\Omega_{xy}^{1/t}$, $\frac{\partial v^x}{\partial t}$ n'ont pas été annulés.

VI.1.2 Sur le pendule de Foucault et le principe de Mach

Prenons à nouveau le cas de la force de Coriolis et arrêtons-nous sur l'expérience du pendule de Foucault.

La rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault permet de prouver que la Terre tourne sur elle-même. Cette rotation du plan d'oscillation s'explique par la force de Coriolis. Ce qui reste difficile à appréhender, c'est la compréhension physique de ce référentiel R^0 par rapport auquel la Terre tourne ?

Selon le principe de Mach, ce référentiel R^0 pourrait être représenté par l'ensemble des masses, ainsi que des mouvements de l'Univers. C'est une idée satisfaisante pour l'esprit, mais le principe de Mach reste une conjecture difficilement démontrable.

Quoiqu'il en soit, en généralisant le cas de la force de Coriolis à toutes les forces, on a d'un côté aggravé la question de la signification physique du référentiel R^0 , puisque celui-ci se pose maintenant à toutes les forces.

D'un autre côté, on peut aussi y voir une simplification. En effet, lorsque la question du référentiel R^0 sera résolue pour la force de Coriolis, il le sera également pour toutes les forces.

VI.1.3 Quelle serait la vitesse de rotation du Soleil sur lui-même selon un pendule de Foucault placé à sa surface ?

Pour la Terre, le vecteur rotation Ω qui est utilisé dans la force de Coriolis ou dans le calcul de la période d'oscillation du pendule de Foucault, se confond avec la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même par rapport au Soleil (la période correspondante $T = \frac{1}{\Omega}$ est appelée le jour sidéral).

A priori, il s'agit seulement d'une (bonne) approximation, car la notion de Ω utilisée dans la force de Coriolis et nécessitant un référentiel galiléen se distingue de la notion de vitesse de rotation de la Terre sur elle-même et prenant comme référence le Soleil (référentiel non galiléen à priori).

Une expérience intéressante serait de mesurer la période d'oscillation d'un pendule de Foucault aux environs du Soleil et de voir quelle vitesse de rotation sur lui-même serait obtenue pour le Soleil ? Quelle serait alors la référence pour le Soleil ?

Nota sur la non-équivalence des référentiels
Suivant le pendule de Foucault, Terre et Soleil ne sont pas des référentiels équivalents dans la quête de R^0 . Le Soleil semble une bien meilleure approximation de R^0 que la Terre, mais évidemment le Soleil n'est pas R^0 . La question non résolue est : qu'est-ce que R^0 ?

VI.1.4 Comprendre ce qu'est R^0 , même question pour la force de Coriolis ou pour le poids

La Terre tourne sur elle-même suivant Ω, mais par rapport à quoi ? C'est-à-dire par rapport à quel référentiel R^0 , la Terre tourne ? Le Soleil est déjà est une bonne approximation de R^0 , mais on l'a vu, ce n'est qu'une approximation.
Dans le référentiel R^{Ω}, où on a annulé la rotation de la Terre, lorsqu'un corps conserve un mouvement $\vec{v}^y$, il faut ajouter une accélération d'inertie de Coriolis du type $\vec{a}_{Cor_{ty}}^{\ x} = -\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$.

De même, dans un champ gravitationnel $\vec{Gr}_{tx}^{1/y}$, on a comme une « rotation » dans un plan spatiotemporel, mais par rapport à quoi s'effectue cette « rotation spatiotemporelle » ? C'est-à-dire par rapport à quel référentiel R^0 , nous « tournons » dans le plan spatiotemporel. La question n'est pas non plus résolue.
Dans le référentiel R^{Gr}, où on a annulé la « rotation spatiotemporelle » $\vec{Gr}_{tx}^{1/y}$, lorsqu'un corps conserve une masse $\vec{m}^t$, il faut ajouter une force d'inertie du type $\vec{P}_{ty}^x = \vec{m}^t \wedge \vec{Gr}_{tx}^{1/y}$, qu'on appelle plus communément le poids du corps.

En conclusion, la question de la compréhension de la nature R^0 , se pose aussi bien pour la force de Coriolis que pour le poids.

VI.2 Une nouvelle interprétation pour la masse $\vec{m}^t$?

Certains voient le vieillissement comme l'analogue dans le Temps de la vitesse *v* dans l'Espace. On va proposer dans ce paragraphe que cet analogue, pour la physique, ce n'est pas le vieillissement, mais la masse $\vec{m}^t$.

VI.2.1 Un analogue dans le Temps de la vitesse *v* dans l'Espace ?

Dans les chapitres précédents, on a proposé le parallèle entre :

- l'accélération de Coriolis $\vec{a}_{Cor_{ty}}^{\ x} = -\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ dans l'Espace,
- le poids $\vec{P}_{ty}^x = \vec{m}^t \wedge \vec{Gr}_{tx}^{1/y}$ (ou plus généralement $\vec{F}_{K_{ty}}^{\ x} = \vec{m}^t \wedge 2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y}$) dans le Temps.

Dans le cas de l'accélération de Coriolis, $\vec{v}^y$ est la quantité conservée lorsqu'on effectue un changement de référentiels annulant le vecteur rotation dans un plan spatial : $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$.
Dans le cas du poids, la masse $\vec{m}^t$ (et par extension la matière) apparait comme l'analogue dans le Temps de la vitesse $\vec{v}^y$ dans l'Espace. En effet, $\vec{m}^t$ est la quantité conservée lorsqu'on effectue un changement de référentiels annulant le vecteur rotation « généralisée » dans un plan spatiotemporel : $\vec{G}r_{tx}^{1/y}$.

En physique, on définit des vitesses $\vec{v}^{x,y,z}$ dans l'Espace, mais pas des « vitesses dans le Temps ». La masse $\vec{m}^t$ s'interpréterait-elle justement comme cette « vitesse » dans le Temps ?
Si oui, la masse $\vec{m}^t$ d'un corps serait la mesure de sa « vitesse » dans le Temps. Par extension, tout ce qui est matière et doté d'une masse $\vec{m}^t$ aurait une « vitesse » dans le Temps.

Nota 1 sur le potentiel gravitationnel
A l'instar de la masse $\vec{m}^t$, le potentiel gravitationnel V^t est aussi l'analogue dans le Temps d'une vitesse dans l'Espace. Par contre, il s'agit de la vitesse $V^{x,y,z}$ qui est annulée lors du changement de référentiels (et pas de celle qui est conservée).

Nota 2 sur l'énergie de masse (énergie au repos dans l'Espace)
L'énergie de masse $E^t = m^t c^2$, qui un concept physique similaire à la masse, s'interpréterait également comme une « vitesse » dans le Temps.

Nota 3 sur l'analogue de m^t
D'après ce qui précède, l'analogue dans l'Espace de $\vec{m}^t$ dans le Temps, ce n'est pas l'impulsion $\vec{p}^{x,y,z}$, mais bien la vitesse $\vec{v}^{x,y,z}$. Si on multiplie fréquemment $\vec{v}$ par m^t , c'est pour obtenir $\vec{p}$, une quantité physique que l'on peut confronter notamment à l'énergie E^t dans les équations.

De même, l'analogue dans l'Espace de la force gravitationnelle dans le Temps, ce n'est pas la force d'inertie de Coriolis, mais bien l'accélération d'inertie de Coriolis. Si on multiplie fréquemment une accélération d'inertie par m^t , c'est pour obtenir une force d'inertie et donc une quantité physique que l'on peut confronter à d'autres forces dans les équations.

Nota 4 sur extensivité et intensivité dans l'Espace et le Temps
La masse ∂m^t d'un volume ∂Vol est une grandeur dite extensive dans l'Espace : cette masse ∂m^t peut s'additionner dans l'Espace.
La distance parcourue ∂x par un système durant une durée ∂t est une grandeur dite intensive dans l'Espace : cette distance parcourue ∂x est la même en tout point de l'Espace du système isolé étudié.

Si on intervertit Espace et Temps, ∂m^t et ∂x, on obtient :
La distance parcourue ∂x par un système durant une durée ∂t est une grandeur dite extensive dans le Temps : cette distance parcourue ∂x peut s'additionner dans le Temps.
La masse ∂m^t d'un volume ∂Vol est une grandeur dite intensive dans le Temps : cette masse ∂m^t est la même en tout instant du Temps du système isolé étudié.

Nota 5 sur densité volumique de masse comme l'analogue dans le Temps de la vitesse dans l'Espace
On peut aussi voir la densité volumique de masse (ou masse volumique) $\rho^t = \frac{\partial m^t}{\partial Vol}$ comme l'analogue dans le Temps de la vitesse $v^x = \frac{\partial x}{\partial t}$ dans l'Espace. Toutes deux sont d'ailleurs des grandeurs intensives dans l'Espace, définies localement.

Nota 6 sur la charge électrique

La charge électrique $\vec{q}^t$ est aussi proche de la notion de « vitesse » dans le Temps. On a les parallèles :

$$\vec{E}m_{ty}^{x} = \vec{v}^{y} \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$$
$$\vec{F}_{El_{ty}}^{\ \ x} = \vec{q}^{t} \wedge \vec{E}l_{tx}^{1/y}$$

Ce constat s'inscrit d'ailleurs dans une question plus large : qu'est-ce qui rapproche, mais finalement distingue une masse d'une charge électrique ?

VI.2.2 Une cinématique dans l'Espace-Temps ?

Suivant une approche relativiste des mouvements, un corps de masse $\vec{m}^t$ non nulle aurait une « vitesse » dans le Temps différente de l'observateur qui en mesure la masse. De même, un corps de masse $\vec{m}^t$ nulle aurait une « vitesse » dans le Temps identique à l'observateur.

Plus généralement, matière et mouvements pourraient être décrits par une cinématique élargie à l'Espace-Temps. Tous deux s'interpréteraient comme des mouvements dans l'Espace-Temps.

Beaucoup de livres universitaires sur la mécanique du point, des fluides ou du solide sont composés :
- d'un premier chapitre cinématique qui décrit les mouvements dans l'Espace,
- d'un deuxième chapitre cinétique qui introduit les notions de masse et d'impulsion.

On propose ici, en quelque sorte, de regrouper ces deux chapitres en un seul chapitre cinématique qui décrirait les mouvements dans l'Espace-Temps.

Nota 1 sur l'énigme de l'absence de masse négative
A l'inverse des charges électriques (et autres charges comme nucléaires fortes, faibles…), il n'existe pas de masse négative. Cela reste une énigme et a pour conséquence que la force gravitationnelle est toujours attractive.
En l'absence de masse négative, il n'y a pas à priori pour la « vitesse » dans le Temps de notion de sens comme pour la vitesse dans l'Espace.
Remarquons néanmoins que l'intervalle d'étude $[-c, +c]$ d'une vitesse $\vec{v}^{x,y,z}$ dans l'Espace est restreint comme celui $[0, +\infty[$ d'une masse $\vec{m}^t$.
Cette différence de restriction dans les deux intervalles d'étude :$[-c, +c]$ et $[0, +\infty[$, pourrait-elle être simplement due à une différence de points de vue dans la manière de mesurer la vitesse et la masse ?

Certains physiciens comme John Wheeler ou Richard Feynman ont aussi proposé d'interpréter les signes des charges électriques, comme des avancées dans un sens du Temps ou dans l'autre sens. On y reviendra dans le 6ème mémoire.

Nota 2 sur la masse relativiste γm^t
Dans la Relativité restreinte, on introduit la notion de masse relativiste γm^t , avec :
- m^t la masse au repos d'un corps par rapport à un observateur,
- γm^t sa masse lorsque ce corps possède une vitesse *v* par rapport à l'observateur.

Par exemple, les photons, s'ils étaient au repos dans l'Espace par rapport à un observateur, auraient une masse m^t nulle, et donc une « vitesse » nulle dans le Temps.

Nota 3 sur le « Temps Lumière »
Dans le mémoire 6 davantage spéculatif que les précédents, on proposera la notion de Temps Lumière, avec comme premier sens : un Temps Lumière qui serait celui de la Lumière et des photons, et avec comme deuxième sens : un Temps Lumière qui serait aussi le nôtre, êtres humains, qui mesurerons une masse nulle $m^t = 0$, c'est-à-dire une « vitesse » nulle dans le Temps de la Lumière, si celle-ci était au repos dans l'Espace par rapport à nous.

VI.3 Conclusion du mémoire, sur le choix d'un référentiel de référence

Dans ce 2ème mémoire, on a repris le principe initial fixé par A. Einstein dans la théorie de la Relativité générale : une invariance des lois de la Nature quel que soit le changement de référentiels.
Néanmoins, on a présenté une approche différente de celle proposée par A. Einstein dans la Relativité générale, où ce dernier s'appuie sur une conservation de l'intervalle d'Espace-Temps :

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

quel que soit le changement de référentiels.
Ici, on s'est focalisé sur les forces classiques. On a voulu gommer les différences entre force « normale » et force d'inertie en construisant toute force classique sur le modèle de la force d'inertie de Coriolis.

L'idée principale était la suivante : au choix d'un référentiel de référence décrivant un corps :

- en mouvement de rotation généralisée dans un plan spatial et/ou spatiotemporel,
- soumis à aucune force, accélération d'inertie ou champ électromoteurs,

on a le possible changement dans un référentiel décrivant le corps :

- immobile dans l'Espace-Temps, excepté sa vitesse propre $\vec{v}^x$ et sa masse propre $\vec{m}^t$, les vecteurs rotations généralisées dans les plan spatiaux ou spatiotemporels ayant été annulés lors du changement de référentiels,
- soumis à des forces, accélérations d'inertie et/ou champs électromoteurs.

Dans le prochain mémoire, on proposera à l'aide des champs $K_{tx}^{1/y}$ et $\Omega_{xy}^{1/t}$ définis dans ce mémoire, des équations sources champs analogues aux équations de Maxwell et qui s'appliquent à la gravitation.

Bibliographie du mémoire 2

Sur la gravitation newtonienne et la force de Coriolis

[1] H. Lumbroso, Problèmes résolus de mécanique du point et des systèmes de points. Dunod, Paris, 1984.

Sur l'électrostatique

[2] H. Lumbroso, Problèmes résolus d'électrostatique et dynamique des particules chargées. Dunod, Paris, 1984.

Sur le magnétisme

[3] A. Einstein, L. Infeld, L'évolution des idées en physique. Flammarion, Paris, 1983 pour l'édition en livre de poche), 1938 pour l'édition originale

[4] H. Lumbroso, Electromagnétisme, problèmes résolus. McGraw-Hill, Paris, 1985.

Sur l'Electrodynamique quantique relativiste

[5] R. Feynman, The principle of least action in Quantum Mechanics, thèse, Princeton University, 1942

[6] Wikipedia, Electromagnetic tensor

[7] Wikipedia, Tenseur électromagnétique

[8] Wikipedia, Lagrangien

[9] Wikipedia, Lagrangian

[10] Wikipedia, Equation de Maxwell

[11] Wikipedia, Maxwell's equations

Sur la mécanique des fluides et la mécanique des milieux continus

[12] H. Lumbroso, Problèmes résolus mécanique des fluides. Dunod, Paris, 1989.

[13] Jean-François Sini, Mécanique des fluides. Centrale Nantes, 2008.

Sur la mécanique des solides

[14] C. Grossetête et P. Olive, Mécanique des systèmes et du solide. Ellipses, Paris, 1999.

Table des matières

vecteur unitaire perpendiculaire à la surface Mémoire 3 Des équations sources champs de Maxwell à celles de la gravitation

Résumé du mémoire
Dans ce 3ème mémoire, on s'intéresse aux équations sources champs de Maxwell, équations faisant intervenir les champs magnétiques et électriques, la charge et les courants électriques, et s'appliquant à l'électromagnétisme. Suivant une analogie électricité gravitation, on va proposer des équations sources champs faisant intervenir les champs pulsation et vecteur d'onde, la masse et l'impulsion, et s'appliquant à la gravitation. A la fin du mémoire, on va également proposer pour la gravitation l'analogue de l'équation homogène de Maxwell Faraday.

Ce mémoire est également l'occasion d'évoquer quelques découvertes importantes de la physique. On revient sur les travaux d'André-Marie Ampère, en particulier l'observation qu'un aimant et une boucle de courant produisent des effets identiques (travaux effectués à partir de 1820), puis sur les équations de Maxwell proposées par James Clerk Maxwell en 1865 et retranscrits à l'aide de dérivées partielles en 1884 par Oliver Heaviside et Willard Gibbs. On parle également de l'idée de Louis de Broglie (1924) d'un électron à la fois onde et particule. Au passage, on traite d'un peu de mécanique newtonienne (les *Principia* d'Isaac Newton publié en 1687), de mécanique hamiltonienne (William Rowan Hamilton vers 1833), de mécanique einsteinienne (avec $E = mc^2$ énoncé par Albert Einstein en 1905 dans le cadre de la Relativité restreinte). On évoque aussi la diffusion Compton (1922). On aborde également les ondes gravitationnelles suggérées par A. Einstein en 1916 dans le cadre de la Relativité Générale et confirmées expérimentalement en 2015 par les chercheurs du LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

Chapitre I Idée originelle du mémoire, vitesse de la charge électrique et rappels historiques

Objet du chapitre
On évoque l'idée originelle du présent mémoire : une vitesse de la charge électrique assimilable à une vitesse de groupe. On effectue ensuite un rappel historique sur les équations de Maxwell, puis sur les ondes gravitationnelles.

I.1 Idée originelle du mémoire, une vitesse de la charge électrique assimilable à une vitesse de groupe ?

En 1924, L. De Broglie soutient une thèse où il propose que le corpuscule électron s'apparente également à une onde électron. Selon lui, la vitesse du corpuscule électron en orbite autour du noyau de l'atome (dans le modèle de l'électron de Bohr), correspond à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$ de l'onde électron. Ainsi, avec beaucoup d'audace pour son époque, il associe la notion de vitesse développée en mécanique newtonienne à celle de vitesse de groupe développée en mécanique ondulatoire.

Dans ce mémoire, on va voir qu'en effectuant le rapport des deux équations de Maxwell sources champs (celle de Gauss et celle d'Ampère), on peut retrouver une quantité physique, rapport de la densité volumique de courant : $j = \rho v$ (unité :$\frac{A}{m^2}$ ou $\frac{C}{m^2 \times s}$) et de la densité volumique de charge : ρ (unité : $\frac{C}{m^3}$), faisant intervenir les champs magnétique B et électrique El :

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{j}{\rho} = \mu_0 \varepsilon_0 v = \frac{\partial B}{\partial El}$$

Cette dernière équation s'apparente formellement à celle de la vitesse de groupe, surtout si on rapproche le champ magnétique B d'un champ pulsation Ω, et le champ électrique El d'un champ vecteur d'onde K.

Partant de ces constatations, l'idée développée dans les prochains chapitres, c'est qu'à l'instar des équations sources champs de Maxwell faisant intervenir les champs B et El, et s'appliquant à l'électromagnétisme, il existe des équations sources champs faisant intervenir le champ pulsation Ω et le champ vecteur d'onde K, et s'appliquant à la gravitation.
Les sources de ces équations ne seront plus les densités volumiques de charge ρ et de courants électriques j, mais des densités volumiques de masse ρ (unité : $\frac{Kg}{m^3}$), ainsi que des masses m et des impulsions p. En faisant le rapport de ces équations sources champs appliquées à la gravitation, il devra être possible de retrouver la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$ de l'onde d'une particule massique.

L'une des interrogations, sera de déterminer les constantes qui interviennent dans les équations sources champs de la gravitation. Dans les équations sources champs de Maxwell, on utilise les constantes μ_0 et ε_0, liées par la relation :

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

On note que ces constantes apparaissent dans $\mu_0 \varepsilon_0 v = \frac{\partial B}{\partial El}$, alors qu'il n'existe pas de constante pour la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$. Au minimum, on s'attend à retrouver dans les équations sources champs de la gravitation la constante gravitationnelle *G*.

I.2 Rappels historiques, équations de Maxwell sources champs

Au cours des années 1860, J. C. Maxwell fait paraitre un volumineux traité de plus de 1 000 pages sur l'électricité et le magnétisme. Dans ce traité intitulé *D'électricité et de magnétisme*, le physicien s'inspire des travaux de Michael Faraday sur le champ magnétique, ainsi que de ceux de William Thomson (lord Kelvin) ou d'André-Marie Ampère. Il propose la mathématisation de ces travaux, inspiré par les outils de la mécanique des fluides.
J. C. Maxwell s'oppose à la conception newtonienne de forces avec une action à distance. Il reprend la conception de M. Faraday d'un milieu continu support des transformations d'un champ à travers l'Espace, transformations d'un champ qui permet ainsi de propager la force.

Dans son traité, J. C. Maxwell propose huit équations qu'on regroupe aujourd'hui sous le nom d'équations de Maxwell. En 1884, ces huit équations sont retranscrites par O. Heaviside et W. Gibbs en quatre équations et réécrites à l'aide de dérivées partielles.

On s'intéresse ici aux deux premières, celles qu'on appelle sources champs et désignées par Maxwell Gauss :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\vec{E}l$$

et Maxwell Ampère :

$$\mu_0\vec{J} = rot\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l}{\partial t}$$

Comme leur nom l'indique, ces deux équations relient les champs électriques et magnétiques aux sources densité de charge et de courants électriques. Elles se différentient des équations homogènes de Maxwell Thomson :

$$div\vec{B} = 0$$

et Maxwell Faraday :

$$rot\vec{E}l = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

qui elles ne font intervenir que les champs électriques et magnétiques.

Avant le traité de J. C. Maxwell, les équations de Maxwell Gauss et de Maxwell Ampère avaient déjà été proposées sous différentes formes. La principale innovation de J. C. Maxwell est d'ajouter dans l'équation de Maxwell Ampère un courant de déplacement :

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l}{\partial t}$$

qui sur le modèle de la conservation de la masse, permet la conservation de la charge électrique.

Les principes de conservation de la masse ou de la charge, se traduisent ainsi par la même équation :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

avec ρ la densité volumique de masse ou de charge électrique et $\vec{v}$ la vitesse des particules de masse ou de charge électrique.

I.3 S'inspirer des ondes gravitationnelles

En 1916, dans le cadre de la Relativité générale, A. Einstein propose la notion d'ondes gravitationnelles qu'il interprète comme une oscillation de la courbure de l'Espace-Temps. Il s'appuie également sur une analogie avec les ondes électromagnétiques.

Selon le principe de l'antenne émettrice, une charge électrique en mouvement accéléré dans une antenne (par exemple un courant électrique alternatif sinusoïdal dans une antenne) rayonne une onde électromagnétique se propageant à la vitesse de la lumière dans le vide. De même, une masse accélérée pourrait rayonner une onde gravitationnelle se propageant à la vitesse de la lumière dans le vide.
Selon le principe de l'antenne réceptrice, une onde électromagnétique génère une accélération des charges électriques présentes dans une antenne (par exemple un courant alternatif). De même, une onde gravitationnelle génèrerait une accélération des masses présentes dans une antenne.

Etudions le cas d'une antenne radioélectrique dite demi-onde de longueur $l = \frac{\lambda}{2}$ parcourue par un courant électrique sinusoïdal :

$$I(z,t) = I_0 e^{i\omega t}$$

L'antenne rayonne un champ électromagnétique. On donne ci-dessous la partie champ électrique en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\vec{E}l_\theta(M,t) \approx \frac{iI_0}{2\pi\varepsilon_0 cr} \frac{cos(\frac{\pi}{2} cos\,\theta)}{sin\,\theta} e^{i(\omega t - k\ )} \vec{u}_\theta$$

L'antenne demi-onde et le champ électrique peuvent être symbolisés par la figure suivante :

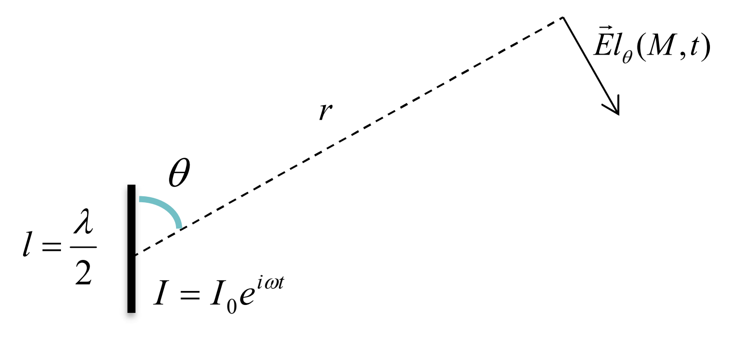


Figure 1 : antenne radioélectrique demi-onde

Le principe de l'antenne émettrice et réceptrice découle en particulier de l'équation source champ de Maxwell Ampère :

$$\mu_0 \vec{J} = rot\vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}l}{\partial t}$$

Cette équation traduit qu'un courant (une charge électrique en mouvement) produit un champ magnétique $\vec{B}$ et un champ électrique $\vec{E}l$. Inversement, ces deux champs se comportent dans le vide comme une onde électromagnétique, qui génère un courant dans une antenne.

Nota, passage des équations de Maxwell aux équations d'onde d'Alembert
A partir de Maxwell Faraday, compte tenu de Maxwell Gauss et de Maxwell Ampère, on trouve

$$\Delta\vec{E}l - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}l = \vec{\nabla}(\frac{\rho}{\varepsilon_0})$$

avec

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

Dans le vide, on obtient :

$$\Delta \vec{E}l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}l}{\partial t^2} = 0$$

A partir de Maxwell Ampère, compte tenu de Maxwell Thomson et de Maxwell Faraday, on trouve :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\mu_0 \vec{J})$$

Dans le vide, on obtient :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Ces 2 équations traduisent que les champs électriques et magnétiques suivent l'équation d'onde d'Alembert dans le vide.

En 2015, l'hypothèse d'A. Einstein d'une onde gravitationnelle apparait comme confirmée. Des détecteurs appelés LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), l'un situé en Louisiane, l'autre dans l'état de Washington enregistrent les signaux attendus. Sans entrer ici dans le détail du fonctionnement complexe de ces détecteurs, ils reposent sur un principe d'antennes réceptrices, avec des masses mises en mouvement accélérée lors de la présence d'ondes gravitationnelles.

Puisqu'il existe en électromagnétisme des équations sources champs (Maxwell Ampère et Maxwell Gauss) décrivant le lien entre les antennes (c'est-à-dire la source : charge en mouvement accéléré) et l'onde électromagnétique (c'est-à-dire les champs $\vec{E}l$ et $\vec{B}$ se propageant à la vitesse c dans le vide), on conjecture pour la gravitation des équations sources champs analogues, décrivant le lien entre les antennes (c'est-à-dire la source : masse en mouvement accéléré) et l'onde gravitationnelle.

Dans le 2ème mémoire, on a souligné les analogies entre les champs $\vec{B}$, $\vec{E}l$, $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}$. On souhaiterait donc des équations sources champs s'appliquant à la gravitation et faisant intervenir les champs $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}$. Ce sont ces équations sources champs que nous allons rechercher et proposer dans ce 3ème mémoire.

Nota

On conjecture ici des ondes gravitationnelles construites à partir des champs $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}$ plutôt qu'à partir simplement du champ gravitationnel newtonien $Gr = -\frac{\partial V^t}{\partial r}$ comme le fait la Relativité générale. On reviendra sur ce point délicat à la fin de ce mémoire, et également dans le 6ème mémoire lorsqu'on évoquera l'équation source potentiel de Poisson :

$$4\pi G \rho_{mas} = \Delta V^t$$

une équation sur laquelle se fonde la Relativité générale.

I.4 Conclusion du chapitre

Suivant une analogie gravitation électromagnétisme, on conjecture l'existence d'équation sources champs s'appliquant à la gravitation, et faisant intervenir les champs $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}$.

Cette conjecture provient en particulier d'une vitesse de la charge électrique assimilable à une vitesse de groupe et obtenue à partir des équations sources champs de Maxwell. Elle s'inspire également des ondes gravitationnelles.
Dans le prochain chapitre, on va revenir sur les notions de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

Chapitre II Rappels vitesse de phase, vitesse de groupe, prolongements de la mécanique relativiste et de la mécanique newtonienne vers la mécanique ondulatoire, éléments de Relativité restreinte

Objet du chapitre

L'approche onde particule de L. de Broglie avait été d'abord justifiée parce qu'elle permettait d'expliquer intuitivement certains aspects de la mécanique relativiste. Pourtant, comme un paradoxe, les idées de L. de Broglie ont d'abord conduit à l'équation d'onde de Schrödinger qui n'a rien de relativiste.

Dans ce chapitre, on va expliciter les notions de vitesse de phase et vitesse de groupe qui sont au cœur de l'approche « ondulatoire » de L. de Broglie. On verra aussi comment les idées « ondulatoires » de L. de Broglie peuvent éclairer intuitivement certains points de la mécanique relativiste, ainsi que de la mécanique newtonienne.

II.1 Rappels vitesse de phase et de groupe

II.1.1 Vitesse de phase

La vitesse de phase $v_\phi = \frac{dx}{dt}$ d'une onde progressive est la vitesse à laquelle la phase de l'onde $\phi = \omega t - kx$ se propage dans l'Espace.

Soit une onde monochromatique progressive définie par la fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \, cos(\, \omega t - kx)$$

Le plan de phase constitue l'ensemble des points ayant la même la valeur de phase ϕ. Le plan de phase est localisé en x à l'instant t, et en $x + dx$ à l'instant $t + dt$.

On a donc :

$$\phi = \omega t - kx$$

$$\phi = \omega(t + dt) - k(x + dx)$$

Par soustraction, on obtient :

$$0 = \omega dt - kdx$$

On a donc une vitesse de phase rapport de la pulsation ω et du vecteur d'onde k :

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Nota

Dans un milieu réfringent (milieu où on observe une réfraction de la lumière, c'est-à-dire une déviation du rayon lumineux), on a la relation (avec n l'indice de réfraction du milieu) :

$$n = \frac{c}{v_\phi} < 1$$

II.1.2 Vitesse de groupe

Dans les années 1880, afin de mieux comprendre les phénomènes ondulatoires, les physiciens Louis Georges Gouy et John William Rayleigh proposent de distinguer une vitesse de phase et une vitesse de

groupe. La vitesse de groupe est considérée comme la vitesse d'un paquet d'ondes de pulsations (ou de périodes) très voisines, ainsi que de vecteur d'onde (ou de longueurs d'ondes) très voisins.

Prenons le cas simple d'un paquet d'ondes constitué de la superposition de deux ondes de pulsations voisines ω_1 et ω_2, de vecteurs d'onde voisins k_1 et k_2, d'amplitude unité :

$$\psi(x,t) = cos(\omega_1 t - k_1 x) + cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\psi(x,t) = 2\,cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x)\,cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t - \frac{k_2-k_1}{2}x)$$

Le paquet d'ondes obtenu est le produit de 2 termes :

- le premier est une onde monochromatique de vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}$ correspondant à une moyenne pondérée des pulsations des deux ondes par leurs vecteurs d'onde respectifs,
- le second est une onde monochromatique de vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$. Il intervient comme modulateur d'amplitude du premier terme.

Il se produit un phénomène de battement. Une sinusoïde haute fréquence de caractéristiques proches de celles des deux pulsations $\omega_1 + \omega_2$ est modulée en amplitude par une sinusoïde de pulsation inférieure $\omega_2 - \omega_1$. Celle-ci, de faible fréquence, forme une sorte d'enveloppe autour de l'autre.

Pour des valeurs voisines des deux pulsations et des deux vecteurs d'onde, la vitesse de groupe du paquet d'ondes est approximativement égale à la vitesse de l'onde $v_\phi = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$. En faisant tendre $\omega_2 - \omega_1$ et $k_2 - k_1$ vers 0, on obtient la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Nota
Pour une onde électromagnétique, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont liées par la relation (valable pour les basses fréquences seulement) :

$$v_g v_\phi = \frac{c^2}{n^2}$$

II.2 Prolongements de la mécanique relativiste et de la mécanique newtonienne vers la mécanique ondulatoire

II.2.1 Généralités sur la mécanique relativiste

La mécanique relativiste s'est développée au début du 20ème siècle, notamment grâce aux travaux d'A. Einstein dans la théorie de la Relativité. Par bien des aspects, elle ressemble à la mécanique classique newtonienne dont elle est souvent considérée comme une généralisation. On retrouve par exemple les notions d'énergie et d'impulsion. Elle s'en distingue néanmoins singulièrement sur certains points.

Par exemple, un coefficient $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ marque des déformations des durées et des distances s'introduit en mécanique relativiste.
Ainsi, en mécanique classique, on a l'impulsion : $p = mv$ et en mécanique relativiste, l'impulsion : $p = \gamma mv$.
De même, en mécanique classique, on a la relation énergie impulsion :

$$E = \frac{p^2}{2m} + Ep$$

et en mécanique relativiste, la relation énergie impulsion :

$$E = \frac{c^2}{v} p = \gamma m c^2$$

Il est parfois difficile comprendre les raisons de ces différences. On va voir maintenant que l'approche ondulatoire de L. de Broglie permet de comprendre intuitivement certaines équations de la mécanique relativiste.

II.2.2 Idées de L. de Broglie pour comprendre intuitivement la transformée de Lorentz

On rappelle ici les idées de L. de Broglie développées au début de sa thèse (1924), qui permettent de comprendre intuitivement la transformée de Lorentz. Comme un paradoxe, ces idées imprégnées de relativisme conduisent quelques années plus tard à l'équation de Schrödinger qui n'a rien de relativiste (mais qui a tout d'ondulatoire).

Soit une onde stationnaire de fonction d'onde :

$$\psi = cos\, \omega_0\, t'$$

Dans sa thèse, L. de Broglie schématise cette fonction d'onde par une horloge.

Soit un observateur B immobile par rapport à cette fonction d'onde et soit un observateur A mobile par rapport à B, avançant à la vitesse rectiligne uniforme v_g (il s'agit ici d'une vitesse de type mécanique newtonienne au sens décrivant des corps ponctuels, mais on écrit v_g car L. de Broglie la fait ensuite correspondre à une vitesse de groupe).

La question posée par L. de Broglie, c'est savoir comment A verra l'onde (ou l'horloge) ?

Selon L. de Broglie, A la voit comme une onde progressive (et non plus stationnaire) se propageant à la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ et de fonction d'onde :

$$\psi = cos\, \omega\, (t - \frac{x}{v_\phi})$$

Suivant les idées relativistes d'A. Einstein, on a la relation entre l'énergie E d'un corps relativiste en mouvement à la vitesse v_g et l'énergie E_0 du même corps s'il est considéré immobile :

$$E = \gamma E_0 \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}}} > 1$$

On a $E = \hbar\omega$ avec ω la pulsation de l'onde progressive, $E_0 = \hbar\omega_0$ avec ω_0 la pulsation de l'onde stationnaire.

On obtient :

$$\omega = \gamma\omega_0$$

avec $\gamma > 1$. L'onde progressive a donc une pulsation et une fréquence supérieure à l'onde stationnaire.

On a pour la fonction d'onde de l'onde progressive :

$$\psi = cos\, \gamma\, \omega_0 (t - \frac{x}{v_\phi})$$

On a la relation entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase :

$$v_g v_\phi = c^2$$

avec $n = 1$ puisqu'on est dans le vide.

Si on remplace v_φ par v_g dans la fonction d'onde, on obtient :

$$\psi = cos\,\gamma\,\omega_0(t - \frac{v_g}{c^2}x)$$

Si on égalise les phases des deux fonctions d'onde stationnaire et progressive, on obtient :

$$\phi = \omega_0 t' = \gamma\omega_0(t - \frac{v_g}{c^2}x)$$

En éliminant de part et d'autre la pulsation ω_0, on retrouve la transformée de Lorentz entre les instants t' de l'observateur B et t de l'observateur A :

$$t' = \gamma(t - \frac{v_g}{c^2}x)$$

Suivant les idées de L. de Broglie, l'effet relativiste est interprété comme la variation de la période T (et de la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$) d'une onde en fonction de la vitesse de phase de l'onde $v_\phi = \frac{c^2}{v_g}$, vitesse mesurée par rapport à un observateur. Autrement dit, lorsqu'une onde stationnaire se met en mouvement par rapport à un observateur et devient progressive avec une vitesse de phase $v_\phi = \frac{c^2}{v_g}$, l'observateur mesure une variation de la période T et de la fréquence f de l'onde par rapport à la période T_0 et la fréquence f_0 de l'onde stationnaire.

Nota 1
Par analogie entre l'Espace et le Temps, en substituant ct par x, on a la transformée de Lorentz pour les positions :

$$x' = \gamma(x - v_g t)$$

Nota 2
Ce qui n'est pas expliqué intuitivement ici, c'est pourquoi on a la relation entre les énergies :
$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_g{}^2}{c^2}}}E_0$, c'est-à-dire l'origine de $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_g{}^2}{c^2}}}$?

On étudiera cela dans un prochain paragraphe.

En résumé, L. de Broglie s'interroge sur les variations de fréquence d'une onde, ou plus généralement sur les variations de fréquence de tout phénomène périodique, lorsque celui-ci devient mobile.
Soit un phénomène périodique, immobile par rapport à un observateur, avec une pulsation ω_0. Lorsque ce phénomène périodique devient mobile, avec une vitesse rectiligne uniforme v_g par rapport à l'observateur, est-ce que ce phénomène conserve la même pulsation ω_0 pour l'observateur ?
La Relativité restreinte répond que non. Lorsqu'un phénomène périodique de pulsation initiale ω_0 devient mobile, avec une vitesse rectiligne uniforme v_g par rapport à l'observateur, l'observateur mesure pour le phénomène périodique une nouvelle pulsation ω toujours supérieur à ω_0 et égale à :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_g{}^2}{c^2}}}\omega_0$$

Nota sur la masse
Suivant les relations $E = \hbar\omega = mc^2 = \gamma E_0 = \gamma\hbar\omega_0 = \gamma m_0 c^2$, on note que plus un corps se déplace rapidement, plus sa masse $m = \gamma m_0$ augmente.

II.2.3 Phénomène de dilatation des durée (ou de ralentissement des horloges)

Le terme dilatation du Temps désigne un effet de la Relativité restreinte, selon lequel l'intervalle de Temps entre deux événements mesuré dans un référentiel galiléen (ou inertiel) R quelconque est toujours supérieur à l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel galiléen R^0 (en mouvement relatif par rapport à R), où ces deux événements ont la même position spatiale (mais n'ont pas lieu au même instant).

Dans la Relativité restreinte, le Temps n'est pas le même suivant le référentiel. Pour caractériser ces différences, on utilise des horloges chacune étant propre à un référentiel. Pour un observateur, l'horloge d'un référentiel en mouvement semble ralentie par rapport à l'horloge d'un référentiel immobile. On parle de ralentissement des horloges.

Pour retrouver le phénomène de dilatation des durées, on peut utiliser la transformée de Lorentz :

$$t' = \gamma(t - \frac{v_g}{c^2}x)$$

On a l'intervalle de Temps entre 2 évènements :

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v_g}{c^2}\Delta x)$$

Dans le cas d'un corps fixe dans R^0, avec les 2 évènements Δt_0 ayant la même position spatiale, on a : $\Delta x_0 = 0$. On obtient :

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}}}\Delta t_0$$

$$\Delta t \geq \Delta t_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}}} \geq 1$$

Nota, contactions des longueurs
On a le phénomène analogue (et inverse dans le résultat) pour les longueurs. Suivant la transformée de Lorentz :

$$\Delta l' = \gamma(\Delta l - v_g \Delta t)$$

Lorsque les 2 mesures permettant d'obtenir Δl_0 sont faites dans R^0 au même instant, on a : $\Delta t_0 = 0$. On obtient :

$$\Delta l = 1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}\Delta l_0$$

$$\Delta l \leq \Delta l_0$$

II.2.4 Vitesse de groupe, vérifier que γ fonctionne

On cherche maintenant la relation entre la vitesse de groupe v_g et γ.
La vitesse de groupe de l'onde particule doit vérifier :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial \frac{E v_g}{c^2}}$$

On obtient :

$$\frac{c}{v_g} = \frac{\partial E \frac{v_g}{c}}{\partial E}$$

L'énergie E est proportionnelle à γ et à une constante (dans la Relativité restreinte, on prend l'énergie d'une masse immobile $E_0 = m_0 c^2$, et on a $E = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0 = \gamma \hbar \omega_0$).

On a donc l'équation différentielle à résoudre pour trouver la relation entre v_g et γ :

$$\frac{c}{v_g} = \frac{\partial \frac{v_g}{c} \gamma \hbar \omega_0}{\partial \gamma \hbar \omega_0} = \frac{\partial \frac{v_g}{c} \gamma}{\partial \gamma}$$

On note que si on pose :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_g{}^2}{c^2}}}$$

C'est-à-dire si v_g et γ vérifient la relation :

$$(\gamma)^2 - (\gamma \frac{v_g}{c})^2 = 1$$

$$(\gamma \frac{v_g}{c})^2 = (\gamma)^2 - 1$$

L'équation différentielle est bien résolue :

$$\frac{\partial \frac{v_g}{c} \gamma}{c \partial \gamma} = \frac{\partial \sqrt{(\gamma)^2 - 1}}{c \partial \gamma} = \frac{2\gamma}{2c\sqrt{(\gamma)^2 - 1}} = \frac{1}{v_g}$$

La valeur γ (de dilation des durées) est donc imposée par la vitesse de phase, la vitesse de groupe, la relation $v_g v_\phi = c^2$, les relations $E_0 = \hbar \omega_0 = m_0 c^2$ et $p = \hbar k$.

Nota 1
Si on pose $E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$, à partir de la relation $(\gamma)^2 - (\gamma \frac{v_g}{c})^2 = 1$, en multipliant par $m_0{}^2 c^4$, on retrouve :

$$(\gamma)^2 m_0{}^2 c^4 - (\gamma \frac{v_g}{c})^2 m_0{}^2 c^4 = m_0{}^2 c^4$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0{}^2 c^4$$

Nota 2
Dans la théorie de la Relativité, on définit le quadrivecteur énergie impulsion par :

$$4p^\mu = (p^t c = \gamma m_0 c^2, p^x = \gamma m_0 v^x, p^y = \gamma m_0 v^y, p^z = \gamma m_0 v^z)$$

$$4p_0^\mu = (p_0^t c = m_0 c^2, p_0^x = m_0 v^x, p_0^x = m_0 v^y, p_0^x = m_0 v^z) \text{ avec } \gamma = 1$$

On a :

$$E = p^t c = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}}}$$

Si on développe en série à la limite $\frac{v_g}{c} << 1$, on obtient :

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Si $v = 0$, on retrouve $E_0 = m_0 c^2$.
$\frac{1}{2} m_0 v^2$ correspond à l'énergie cinétique.
Le terme $\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}$, ainsi que les suivants, peuvent être regardés comme une correction relativiste à l'énergie cinétique.

On définit fréquemment une masse relativiste m avec :

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}}}$$

II.2.5 Relation de dispersion dans le cas de la mécanique classique newtonienne

Dans le cadre de l'équation de Schrödinger, on a vu dans le mémoire 1 que la mécanique ondulatoire pouvait également être envisagée comme un prolongement (ou même une généralisation) de la mécanique classique newtonienne. On fait ici quelques rappels sur les vitesses de groupe et de phase en mécanique appliquées à la mécanique newtonienne.

Vitesse de groupe

On a l'énergie de la mécanique classique newtonienne (non relativiste) :

$$E = \hbar\Omega = \frac{p^2}{2m} + Ep$$

avec Ep une énergie potentielle.

On obtient l'impulsion de la mécanique classique newtonienne :

$$p = mv = \sqrt{2m(\hbar\Omega - Ep)}$$

D'après de Broglie, on a :

$$p = \hbar K$$

On obtient :

$$\frac{\partial \hbar K}{\partial \hbar\Omega} = \frac{\partial \sqrt{2m(\hbar\Omega - Ep)}}{\partial \hbar\Omega} = \frac{m}{\sqrt{2m(\hbar\Omega - Ep)}} = \frac{m}{p} = \frac{1}{v_g}$$

On retrouve la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K}$$

Vitesse de phase

Pour la vitesse de phase, on a la relation de dispersion de la mécanique ondulatoire newtonienne :

$$v_\phi = \frac{\Omega}{K} = \frac{E}{p} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - Ep)}}$$

On peut définir un indice de réfraction n avec v_ϕ^0 la vitesse de phase de l'onde en absence de potentiel :

$$\frac{v_\phi}{n} = v_\phi^0 = \frac{E}{\sqrt{2mE}}$$

On obtient pour l'indice n en éliminant v_ϕ dans les deux dernières expressions :

$$n^2 = 1 - \frac{Ep}{E}$$

On obtient pour la vitesse de phase :

$$v_\phi = \sqrt{1 - \frac{Ep}{E}} \frac{E}{\sqrt{2mE}} = n \frac{E}{\sqrt{2mE}}$$

Lorsque n tend vers 1 (Ep tend vers 0), on retrouve la relation de dispersion entre l'impulsion et l'énergie pour une onde dans le vide :

$$v_\phi = v_\phi^0 = v_g^0 = \frac{E}{\sqrt{2mE}} = \frac{E}{p}$$

II.2.6 Vitesse de phase, retrouver la relation de dispersion entre l'énergie et l'impulsion dans le cas de la mécanique relativiste

Pour un photon, on a une vitesse de phase égale à :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \text{ avec } v_\phi = v_g = c$$

Si on pose $E = \hbar\omega$ $p = \hbar k$, on a la relation de dispersion :

$$v_\phi = \frac{E}{p}$$

$$E = pv_\phi = pc$$

Pour une onde particule quelconque, on a toujours la relation de dispersion :

$$E = pv_\phi \text{ (par contre } v_\phi \neq v_g \neq c\text{)}$$

On a :

$$v_g v_\phi = c^2$$

Nota : dans les théories non relativistes, on n'utilise pas $v_g v_\phi = c^2$ pour avoir la relation entre impulsion et énergie.

On obtient la relation de dispersion entre l'impulsion et l'énergie de la mécanique relativiste :

$$E = \frac{c^2}{v_g} p$$

Lorsque v_g tend vers c, on retrouve la relation de dispersion d'une onde dans le vide :

$$E = pc$$

Nota 1

Dans la Relativité restreinte, on a : $E^2 = \frac{c^2}{v_g} p = p^2 c^2 + {m_0}^2 c^4$. On retrouve aussi la relation de dispersion d'une onde dans le vide : $E = pc$, lorsque la masse de la particule tend vers 0.

Nota 2

La relation de dispersion $E = p v_\phi^0 = pc$ est un cas limite :

- en mécanique relativiste, lorsque la masse de la particule tend vers 0,
- en mécanique classique newtonienne, lorsque l'énergie potentielle (de la particule dans un champ) tend vers 0.

II.3 Quelques rappels sur l'effet Doppler-Fizeau relativiste

II.3.1 Interprétation de l'effet Doppler-Fizeau relativiste

L'interprétation de l'effet relativiste peut rappeler l'effet Doppler-Fizeau. En effet, pour ces deux effets, on a une variation de la fréquence en fonction de la vitesse v_g entre le corps émettant le signal et celui le recevant. On va rappeler dans ce paragraphe et le prochain que le cumul de l'effet Doppler-Fizeau et de l'effet dilatation des durées correspond exactement à l'effet relativiste (transformée de Lorentz).

Considérons d'abord le cas d'un émetteur qui se déplace à la vitesse v_g et d'un récepteur qui est fixe. Suivant l'effet Doppler « classique », on a la relation entre la fréquence f_{rec} reçue par le récepteur fixe et la fréquence f_{em} émise par l'émetteur mobile :

$$f_{rec} = \frac{1}{1 + \frac{v_g}{c}} f_{em}$$

Suivant l'effet dilatation des durées, les durées de l'émetteur mobile mesurées par le récepteur fixe sont augmentées d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}$. Les fréquences de l'émetteur mobile mesurées par le récepteur fixe sont donc diminuées d'un facteur $\sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}}$. On a donc :

$$f_{rec0} = \sqrt{1 - \frac{{v_g}^2}{c^2}} f_{em}$$

En cumulant les 2 effets, on a l'effet Doppler-Fizeau relativiste :

$$f_{rec0} = \frac{1}{1+\frac{v_g}{c}} \times \sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}} f_{em} = \frac{\sqrt{(1-\frac{v_g}{c})(1+\frac{v_g}{c})}}{1+\frac{v_g}{c}} f_{em}$$

$$f_{rec0} = \sqrt{\frac{1-\frac{v_g}{c}}{1+\frac{v_g}{c}}} f_{em}$$

Considérons ensuite le cas d'un récepteur qui se déplace à la vitesse v_g et d'un émetteur qui est fixe. Suivant l'effet Doppler, on a la relation entre la fréquence f_{rec} reçue par le récepteur mobile et la fréquence f_{em} émise par l'émetteur fixe :

$$f_{rec} = \left(1-\frac{v_g}{c}\right) f_{em}$$

Suivant l'effet dilatation des durées, les durées de l'émetteur fixe mesurées par le récepteur mobile sont diminuées d'un facteur $\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}$. Les fréquences de l'émetteur mobile mesurées par le récepteur fixe sont donc augmentées d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}$. On a donc :

$$f_{rec} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}} f_{em0}$$

En cumulant les 2 effets, on a l'effet Doppler-Fizeau relativiste :

$$f_{rec} = \frac{(1-\frac{v_g}{c})}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}} f_{em0} = \frac{(1-\frac{v_g}{c})}{\sqrt{(1-\frac{v_g}{c})(1+\frac{v_g}{c})}} f_{em}$$

$$f_{rec} = \sqrt{\frac{1-\frac{v_g}{c}}{1+\frac{v_g}{c}}} f_{em0}$$

On obtient la même formule que précédemment. L'effet Doppler-Fizeau relativiste est parfaitement symétrique et ne dépend que de la vitesse relative entre émetteur et récepteur.

II.3.2 Effet Doppler relativiste via la transformée de Lorentz

On peut également retrouver l'effet Doppler relativiste à partir de la transformée de Lorentz.

Soit une source monochromatique, fixe dans un référentiel *R* associé à un repère *Oxyzt*, et qui émet une onde lumineuse plane, de fréquence *f*, dans la direction *Ou* du plan *xy*, telle que *(Ox,Ou)* = θ. Un observateur A est lié à un référentiel *R'*, ce dernier associé à un repère *Ox'y'z't'* et en translation rectiligne uniforme de vitesse v_g^x suivant *x* par rapport au référentiel *R*. Le signal émis (c'est-dire l'onde lumineuse plane) fait un angle θ dans *R* et un angle θ' dans *R'*.
Le schéma ci-dessous synthétise cet énoncé :

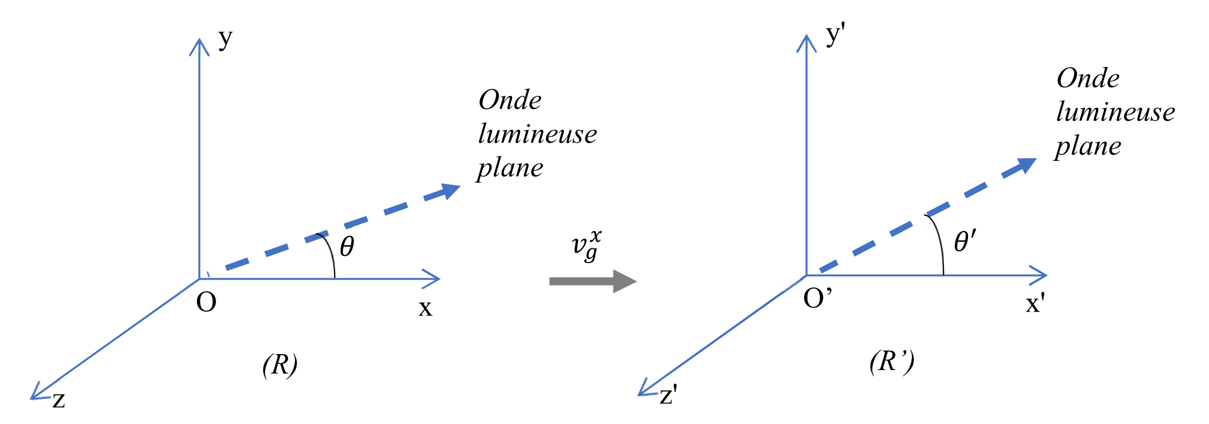


Figure 2 : Onde lumineuse plane

On a les 4 composantes du quadrivecteur d'onde dans *R :*

$$k_x = \frac{2\pi f}{c}cos\theta$$
$$k_y = \frac{2\pi f}{c}sin\theta$$
$$k_z = 0$$
$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$$

On a les 4 composantes du quadrivecteur d'onde dans *R'* :

$$k'_x = \frac{2\pi f'}{c}cos\theta'$$
$$k'_y = \frac{2\pi f'}{c}sin\theta'$$
$$k'_z = 0 = k_z$$
$$\frac{\omega'}{c} = \frac{2\pi f'}{c}$$

On a la transformé de Lorentz pour la composante temporelle :

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_g{}^2}{c^2}}}\left(\frac{\omega}{c} - \frac{v_g}{c}k_x\right)$$
$$\frac{2\pi f'}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_g{}^2}{c^2}}}\left(\frac{2\pi f}{c} - \frac{v_g}{c}\frac{2\pi f}{c}cos\theta\right)$$

On en déduit la relation entre la fréquence fem émise dans R et la fréquence $frec'$ reçue par l'observateur A immobile dans *R'* :

$$f' = \gamma\left(1 - \frac{v_g}{c}cos\theta\right)f$$
$$frec' = \gamma\left(1 - \frac{v_g}{c}cos\theta\right)fem$$

On a la transformée de Lorentz de la composante suivant *x* :

$$k'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_g{}^2}{c^2}}}\left(k_x - \frac{v_g}{c}\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\frac{2\pi f'}{c}cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}(\frac{2\pi f}{c}cos\theta - \frac{v_g}{c}\frac{2\pi f}{c})$$

$$cos\theta' = \frac{f}{f'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}(cos\theta - \frac{v_g}{c})$$

$$cos\theta' = \frac{cos\theta - \frac{v_g}{c}}{1-\frac{v_g}{c}cos\theta}$$

On a la transformée de Lorentz de la composante suivant *y* :

$$k'_y = k_y$$

$$\frac{2\pi f'}{c}sin\theta' = \frac{2\pi f}{c}sin\theta$$

Pour l'observateur A en mouvement de vitesse v_g^x par rapport à la source, il y a en général modification de la fréquence (et donc de la longueur d'onde) et de la direction de l'onde.

Lorsque $cos\theta = 1$, c'est-à-dire lorsque l'onde lumineuse est émise suivant *x* et a la même direction que v_g^x, on retrouve :

$$f_{rec}' = \frac{(1-\frac{v_g}{c})}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}f_{em} = \frac{(1-\frac{v_g}{c})}{\sqrt{(1-\frac{v_g}{c})(1+\frac{v_g}{c})}}f_{em}$$

$$f_{rec}' = \sqrt{\frac{1-\frac{v_g}{c}}{1+\frac{v_g}{c}}}f_{em}$$

L'effet relativiste est donc bien la combinaison de l'effet Doppler classique et du phénomène de ralentissement des horloges de la Relativité restreinte.

Lorsque $cos\theta = \frac{\pi}{2}$, l'onde se propage suivant *y* perpendiculaire à v_g^x, on a :

$$f_{rec}' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_g}^2}{c^2}}}f_{em}$$

II.4 Quelques rappels d'électromagnétisme relativiste restreint

II.4.1 Invariance des équations de Maxwell par la transformée de Lorentz

On rappelle que les équations de Maxwell sont invariantes par transformée de Lorentz et donc par changement de référentiels galiléens dans le cadre de la Relativité restreinte. On a dans *R* et *R*', 2 référentiels en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre :

Maxwell Gauss : $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\vec{E}l$ dans *R* et $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\vec{E}l'$ dans *R'*

Maxwell Ampère : $\mu_0\vec{J} = rot\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l}{\partial t}$ dans *R* et $\mu_0\vec{J'} = rot\overrightarrow{B'} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l'}{\partial t}$ dans *R'*

Maxwell Thomson : $div\vec{B} = 0$ dans *R* et $div\overrightarrow{B'} = 0$ dans *R'*

Maxwell Faraday : $rot\vec{E}l = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ dans *R* et $rot\vec{E}l' = -\frac{\partial\vec{B'}}{\partial t}$ dans *R'*

Nota sur Maxwell Ampère

Maxwell Ampère est invariante par la transformée de Lorentz si Maxwell Gauss est vérifiée.

Nota sur la masse m_0 et la charge électrique q
Dans la Relativité restreinte, on postule que masse m_0 et charge électrique q (ainsi que la densité de charge électrique ρ) sont des invariants relativistes.

II.4.2 Quadrivecteur champ électromagnétisme ?

Rappelons que les quantités $\overrightarrow{El}.\vec{B} = \overrightarrow{El'}.\overrightarrow{B'}$ et $\frac{1}{c^2}\overrightarrow{El}.\overrightarrow{El} - \vec{B}.\vec{B} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{El'}.\overrightarrow{El'} - \overrightarrow{B'}.\overrightarrow{B'}$ sont invariantes par transformée de Lorentz. On pourrait donc imaginer un quadrivecteur champ électromagnétique du type :

$$\left(\frac{\overrightarrow{El}}{c}, B\right)$$

Néanmoins, la nature de B, ici scalaire, reste floue et en Relativité restreinte on définit plutôt un tenseur champ électromagnétique ou tenseur de Maxwell Faraday $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$.

II.4.3 Transformation des champs électromagnétiques lors d'un passage de *R* à *R'*

Soit un changement de référentiels galiléens de *R* à *R*', avec *R*' animé d'une vitesse rectiligne uniforme v_g^x suivant *x*. On rappelle les transformées du champ électromagnétique permettant de passer du référentiel *R* à *R*' :

$$El_x{}' = El_x$$
$$El_y{}' = \gamma(El_y - v_g^x B_z)$$
$$El_z{}' = \gamma(El_z + v_g^x B_y)$$
$$B_x{}' = B_x$$
$$B_y{}' = \gamma(B_y + \frac{v_g^x}{c^2} El_z)$$
$$B_z{}' = \gamma(B_z - \frac{v_g^x}{c^2} El_y)$$

Nota 1
Notons qu'il ne s'agit pas ici de quadrivecteurs, car la transformation n'est pas exactement celle de Lorentz.

Nota 2
On retrouve ces transformées, via la transformée de Lorentz de la force de Lorentz. Pour *El*, on se place dans le cas particulier où la charge q est immobile dans *R*. Pour *B*, on de place dans le cas particulier où la charge q se déplace suivant *z*.

II.4.4 Transformation de Lorentz des champs *K* et *Ω*

Dans un espace *xy t=z* (onde lumineuse plane émise dans un plan *xy*), on a les transformées de Lorentz pour la pulsation et vecteur d'onde, ici pour les champs *K* et Ω :

$$K_{zt}^{y}{}' = K_{zt}^{y}$$
$$K_{yt}^{x}{}' = \gamma(K_{yt}^{x} - \frac{u}{c^2}\Omega_{xy}^{z})$$
$$\Omega_{xy}^{z}{}' = \gamma(\Omega_{yx}^{z} - uK_{yt}^{x})$$

Avec réorientation du champ électromagnétique, on obtient les valeurs du champ électromagnétique :

$$El_{zt}^{y}{}' = El_{zt}^{y}$$
$$El_{yt}^{x}{}' = \gamma(El_{yt}^{x} - uB_{xy}^{z})$$

$$B_{xy}^{z}{}' = \gamma(B_{yx}^{z} - \frac{u}{c^2} El_{yt}^{x})$$

On obtient des formes analogues pour les champs pulsation vecteur d'onde et pour le champ électromagnétique réorienté. Lorsqu'on réoriente le champ électromagnétique, celui-ci se transforme par transformée de Lorentz et peut alors être considéré comme un quadrivecteur.

II.5 Conclusion du chapitre

On a explicité les notions de vitesse de groupe et de vitesse de phase, qui suivant les idées de L. de Broglie permettent d'interpréter la mécanique ondulatoire comme un prolongement (ou même une généralisation) à la fois de la mécanique classique newtonienne et de la mécanique relativiste.

Après avoir étudié les vitesses de phase et de groupe de la mécanique ondulatoire, on va s'intéresser aux liens possibles entre vitesse de phase, vitesse de groupe et équations sources champs de Maxwell.

Chapitre III Equations de Maxwell sources champs et vitesse de groupe

Objet du chapitre

Plusieurs fois, on a évoqué l'idée de L. de Broglie de rapprocher la vitesse d'une particule électron en mouvement autour du noyau (vitesse utilisée par exemple dans le modèle de l'électron de Bohr) de la vitesse de groupe d'une onde électron.

L'objet de ce chapitre, c'est de regarder si on peut également rapprocher la vitesse d'une charge électrique en mouvement (c'est-à-dire un courant électrique) de la vitesse de groupe d'une onde.

En utilisant les équations sources champs de Maxwell Ampère et de Maxwell Gauss (faisant intervenir charge et courants électriques), on va voir qu'il est possible de retrouver une équation faisant intervenir la vitesse d'une charge électrique et ressemblant formellement à celle de la vitesse de groupe.

III.1 Rappel équations de Maxwell sources champs

Maxwell Ampère

L'équation de Maxwell Ampère décrit le champ magnétique et le champ électrique générés par une densité de courants électriques (charges électriques en mouvement).

On rappelle Maxwell Ampère sous forme intégrale :

$$\mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} - \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}l}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

On rappelle Maxwell Ampère sous forme locale :

$$\mu_0 \vec{J} = r\vec{o}t\vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}l}{\partial t}$$

$$\mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D) = rot\vec{B}$$

avec $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}l}{\partial t}$ le courant de déplacement introduit par J. C. Maxwell.

Maxwell Gauss

L'équation de Maxwell Gauss décrit le champ électrique généré par une densité de charges électriques.

On rappelle Maxwell Gauss sous forme intégrale :

$$\frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_V \rho d\tau = \oiint_S \vec{E}l \cdot d\vec{S}$$

avec ρ la densité volumique de charge électrique.

On rappelle Maxwell Gauss sous forme locale :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\vec{E}l$$

Gauss gravitation

Il existe de fortes analogies entre Maxwell Gauss et Gauss gravitation, donnant le champ gravitationnel généré par une densité de masse. On rappelle ici Gauss gravitation sous forme intégrale :

$$-4\pi G(\Sigma M) = -4\pi G \iint_V \rho_m d\tau = \oiint_S \vec{G}r \cdot d\vec{S}$$

Avec ρ_m la densité volumique de masse.

On rappelle Gauss gravitation sous forme locale :

$$-4\pi G\rho_m = div\vec{G}r$$

III.2 Réécriture des équations de Maxwell sources champs dans un Espace-Temps à 3 dimensions

On se place dans un espace orienté à trois dimensions x, y, t.

III.2.1 Maxwell Ampère

On a Maxwell Ampère sous forme locale :

$$\mu_0\vec{J} = r\vec{o}t\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l}{\partial t}$$

En passant aux dérivées partielles, on a avec un courant électrique suivant y :

$$\mu_0 j_{xt}^{y} = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial El_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

$$\mu_0 j_{xt}^{y} = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x} - \frac{\partial El_{ty}^{1/x}}{c^2\partial t}$$

Nota
On a réorienté le champ électrique $El_y = El_{ty}^{1/x}$ à la manière du champ magnétique (c'est-à-dire à la manière d'un vecteur rotation généralisée), ce qui permet d'avoir dans l'expression de Maxwell Ampère un même formalisme pour le champ électrique et le champ magnétique.

Cela donne avec un courant électrique suivant x :

$$\mu_0 j_{yt}^{x} = \frac{\partial B_{yx}^{1/t}}{\partial y} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial El_{tx}^{1/y}}{\partial t}$$

$$\mu_0 j_{yt}^{x} = \frac{\partial B_{yx}^{1/t}}{\partial y} - \frac{\partial El_{tx}^{1/y}}{c^2\partial t}$$

III.2.2 Maxwell Gauss

On rappelle Maxwell Gauss sous forme locale :

$$div\vec{E}l = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Le champ électrique est réorienté à la manière du champ magnétique, on transforme Maxwell Gauss en un analogue de Maxwell Ampère.

On a avec une densité volumique de charge électrique ρ_{xy}^{t} suivant t :

$$\frac{\rho_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial El_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial El_{yt}^{1/x}}{\partial y}$$

Nota
Dans le précédent mémoire, lors de l'étude du tenseur de Maxwell Faraday $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ et de la réécriture des équations sources champs de Maxwell avec ce tenseur, on a déjà vu qu'on pouvait construire ces équations sous un même mode.

III.3 Des équations de Maxwell à la vitesse de groupe d'une onde particule

III.3.1 Equations de Maxwell sources champs

Cherchons maintenant, à partir des équations de Maxwell Gauss et de Maxwell Ampère, à retrouver l'équation de la vitesse de groupe.

On se place dans le cas où :
- le champ électrique El est permanent dans le Temps et ne dépend que d'une seule variable de l'espace x. Il ne dépend donc ni de t, ni de y.
- le champ magnétique B ne dépend que de x (pas de courant électrique suivant x).

D'après **Maxwell Ampère**, on a :

$$\mu_0 j_{xt}^{y} = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial El_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

(pas de courant suivant x)
Le champ $El_{ty}^{1/x}$ est permanent.

On a donc :

$$\mu_0 j_{xt}^{y} = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

D'après **Maxwell Gauss**, on a :

$$\frac{\rho_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial El_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial El_{yt}^{1/x}}{\partial y}$$

Le champ El ne dépend pas de y.

On a donc :

$$\frac{\rho_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial El_{xt}^{1/y}}{\partial x}$$

III.3.2 Lien vitesse de groupe, équation de Maxwell sources champs

En divisant **Maxwell Ampère** par **Maxwell Gauss**, on trouve :

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{j_{xt}^{y}}{\rho_{xy}^{t}} = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

On a :

$$j_{xt}^{y} = \rho_{xy}^{t} v^{y}$$

avec v^y la vitesse de la charge électrique.

On a alors :

$$\mu_0 \varepsilon_0 v^y = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

Avec $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, on obtient :

$$v^y = c^2 \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

On retrouve une relation qui ressemble à celle de la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$$

D'après la relation de Larmor (qui contient deux vecteurs rotations généralisées dans un plan spatial), on a :

$$B_{xy}^{1/t} = \frac{2m_{élec}}{e} \Omega_{xy}^{1/t}$$

A partir du principe fondamental de la dynamique de Newton, on a vu qu'on avait une relation semblable qui contient deux vecteurs rotations généralisées dans un plan spatiotemporel :

$$El_{xt}^{1/y} = \frac{2m_{élec}c^2}{e} K_{xt}^{1/y}$$

Nota, vérification dans le vide
Vérifions la relation suivante dans le vide :

$$\frac{B}{El} = \frac{\Omega}{c^2 K}$$

Dans le vide, on a :

$$c = \frac{\Omega}{K}$$

A partir de $\frac{B}{El} = \frac{\Omega}{c^2 K}$, on obtient :

$$\frac{B}{El} = \frac{1}{c}$$

Cela vérifie bien la relation entre les normes des champs $\vec{B}$ et $\vec{El}$ dans le vide.

En substituant les champs magnétique et électriques par les champs pulsation et vecteur d'onde, on obtient :

$$v^y = c^2 \frac{\partial \frac{2m_{élec}}{e} \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial \frac{2m_{élec}c^2}{e} K_{xt}^{1/y}}$$

$$v^y = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$$

On obtient une vitesse de la charge électrique identique à l'expression d'une vitesse de groupe.

III.4 Conclusion du chapitre

A partir des équations sources champs de Maxwell, il est possible de trouver une vitesse de la charge électrique $v^y = c^2 \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$ semblable à une vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$.

Suite à cette constatation :

- puisqu'il existe des équations sources champs associant les champs B et El, équations qui permettent de retrouver une vitesse de groupe,
- de plus, puisque les champs Ω et K interviennent dans la définition de la vitesse de groupe,

voyons s'il est possible d'obtenir des équations sources champs appliquées à la gravitation, faisant intervenir les champs Ω et K, et permettant de retrouver une vitesse de groupe.

Chapitre IV Théorèmes d'Ampère et de Gauss, équations sources champs pour la gravitation

Objet du chapitre
On propose dans ce chapitre des analogues pour la gravitation, des équations sources champs de Maxwell pour l'électromagnétisme.
On donne d'abord une représentation graphique du théorème d'Ampère. Cela permet d'éclairer les équations sources champs de Maxwell, puis de proposer différentes équations sources champs s'appliquant à la gravitation.

On se place ici dans un espace x, y, t orienté.

IV.1 Sources orientées dans l'Espace : densité de courant électrique, équations de Maxwell Ampère

IV.1.1 Champ magnétique

On a d'après le théorème d'Ampère (partie magnétique) dans un espace à 3 dimensions x, y, l :

$$\mu_0 \iint_{S_{xl}} \vec{J}^y \cdot d\vec{S}_{xl}^y = \oint_{\Gamma^l} \vec{B}^{1/l}(M) \cdot d\vec{l}$$

S_{xl} est une surface dans le plan spatial x, l
$\vec{S}_{xl}^y$ perpendiculaire à la surface S_{xl}
Γ^l est un contour suivant l
$\vec{J}^y$ la densité volumique de courant orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{xl}

Nota sur les densités de courant électrique
La densité volumique de courant $\vec{J}$ s'exprime en Ampère par mètre carré : $\frac{A}{m^2}$.
On définit également une densité surfacique de courant $\vec{J}_S$, qui s'exprime en $\frac{A}{m}$
Le courant *I*, densité linéique, s'exprime en A.

Dans le cas de symétries spatiales, on a les relations d'équivalences pour les densités de courant :

$$\vec{J}^x dVol = \vec{J_S}^x dS^x = \vec{I}^x dx$$

Dans le cas du magnétisme, pour la 3ème dimension perpendiculaire au plan de rotation x, y, on suppose pouvoir raisonner pareillement sur une dimension spatiale l ou sur une dimension temporelle *t*.

On prend donc $\vec{B}^{1/t} = \vec{B}^{1/l}$ dirigé suivant le Temps.
On prend également Γ^t suivant le Temps.
Enfin, on peut avoir : $d\vec{l} = cd\vec{t}$.

On a d'après le théorème d'Ampère (partie magnétique) dans un espace à 3 dimensions x, y, t :

$$\mu_0 \iint_{S_{xt}} \vec{J}_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = \oint_{\Gamma^t} \vec{B}_{xy}^{1/t}(M) \cdot cd\vec{t}$$

S_{xt} est une surface dans le plan spatiotemporel x, t
$\vec{S}_{xt}^y$ est perpendiculaire à la surface spatiotemporelle S_{xt}
Γ^t est un contour suivant le Temps, inclus dans la surface S_{xt}
$\vec{J}^y$ la densité volumique de courant orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{xt}

Graphiquement, le théorème d'Ampère se traduit par :

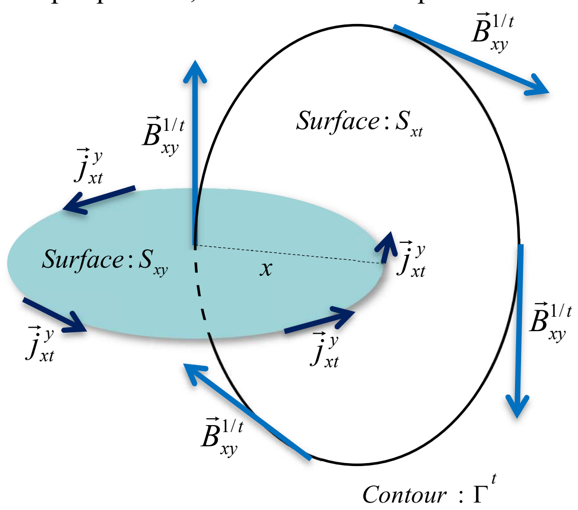


Figure 3 : Maxwell Ampère, champ magnétique $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ et densité volumique de courants $\vec{J}_{xt}^{y}$

En appliquant le théorème de Stockes à :

$$\mu_0 \iint_{S_{xt}} \vec{J}_{xt}^{y} \cdot d\vec{S}_{xt}^{y} = \oint_{\Gamma^t} \vec{B}_{xy}^{1/t}(M) \cdot cd\vec{t}$$

On a :

$$\mu_0 \iint_{S_{xt}} \vec{J}_{xt}^{y} \cdot d\vec{S}_{xt}^{y} = -\iint_{S_{xt}} \frac{\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x} d\vec{S}_{xt}^{y}$$

On obtient la forme locale à intégrer sur une surface S_{xt} :

$$\mu_0 \vec{J}_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

Nota
On prend *l* comme 3ème dimension de l'Espace, mais on peut tout aussi bien choisir z comme notation. On retrouve le champ magnétique orienté suivant z tel qu'on le définit classiquement : $\vec{B}^{1/z}$.

IV.1.2 Champ électrique (courant de déplacement)

On a d'après le théorème d'Ampère (partie courant de déplacement) :

$$\mu_0 \iint_{S_{tx}} \vec{J}_{xt}^{y} \cdot d\vec{S}_{tx}^{y} = -\mu_0 \varepsilon_0 \oint_{\Gamma^x} \vec{E}l_{ty}^{1/x} \cdot d\vec{x}$$

S_{tx} est une surface dans le plan spatiotemporel x, t
$\vec{S}_{tx}^{y}$ perpendiculaire à la surface spatiotemporelle S_{tx}
Γ^x contour suivant x, inclus dans la surface S_{tx}
$\vec{J}^{y}$ la densité volumique de courant orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{tx}

On a graphiquement :

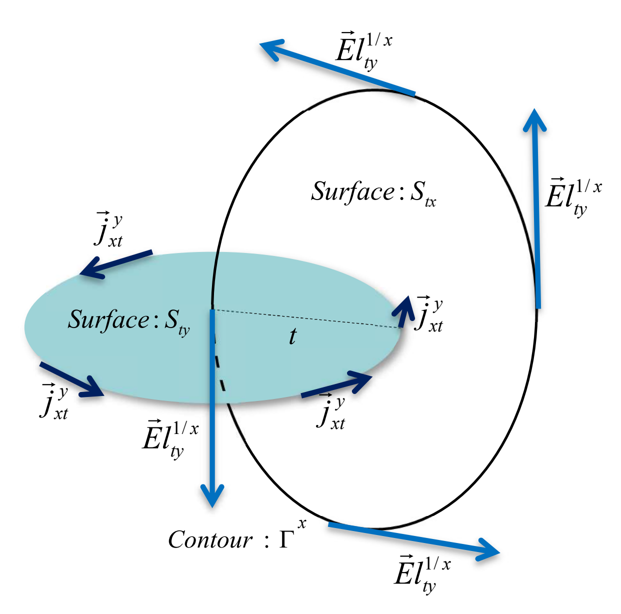


Figure 4 : Maxwell courants de déplacement, champ $\vec{E}l_{ty}^{1/x}$ et densité volumique de courants $\vec{j}_{xt}^{y}$

Sous forme locale, on a :

$$\mu_0 \vec{j}_{xt}^{y} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}l_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

Si on associe les deux équations de Maxwell Ampère, on a :

$$\mu_0 \vec{j}_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}l_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

IV.2 Sources orientées dans le Temps : densité de charge électrique, équation de Maxwell Gauss

IV.2.1 Champ électrique 1

On a d'après les théorèmes d'Ampère et de Gauss :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^y} \vec{E}l_{xt}^{1/y} \cdot d\vec{y}$$

S_{xy} est une surface dans le plan spatial x, y
$\vec{S}_{xy}^{t}$ perpendiculaire à la surface S_{xy}
Γ^{y} contour suivant y, inclus dans la surface S_{xy}
$\vec{\rho}_{xy}^{t}$ la densité volumique de charge électrique orientée suivant *t* et à intégrer sur une surface S_{xy}

Nota 1 sur les densités de charge électrique
La densité volumique de charge électrique ρ^{t} s'exprime en Coulomb par mètre cube : $\frac{C}{m^3}$.
On définit également une densité surfacique de charge qui s'exprime en $\frac{C}{m^2}$, et une densité linéique de charge en $\frac{C}{m}$.
La charge électrique *q* s'exprime en C.

Dans le cas de symétries spatiales, on a les relations d'équivalences pour les densités de courant et de charge électrique :

$$\vec{j}^x dVol = \vec{j_S}^x dS = \vec{I}^x dx$$
$$\vec{\rho}^t dVol = \vec{\sigma}^t dS = \vec{\lambda}^t dl = d\vec{q}^t$$

Nota 2 sur les théorèmes d'Ampère et de Gauss
Suite à la réorientation du champ électrique sur le modèle du champ magnétique, la relation usuelle de Maxwell Gauss se transforme en un analogue du théorème d'Ampère.
Ainsi, on peut voir le théorème utilisé ci-dessus comme un théorème de Gauss, analogue d'Ampère par une permutation de *t* par *y*.
Dans la suite de ce mémoire, on parlera plutôt de Gauss pour des sources orientées dans le Temps et d'Ampère pour des sources orientées dans l'Espace, en sachant que toutes les équations sources champs proposées ici reposent fondamentalement sur un même théorème d'Ampère.

On a graphiquement :

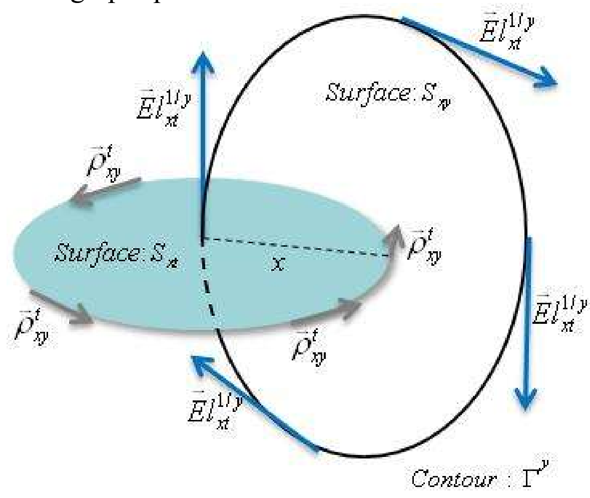


Figure 5 : Maxwell Gauss 1, champ $\vec{E}l_{xt}^{1/y}$ *et densité de charge électrique* $\vec{\rho}_{xy}^t$

Sous forme locale, on a :

$$\frac{\vec{\rho}_{xy}^t}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x}$$

IV.2.2 Champ électrique 2

On a d'après les théorèmes d'Ampère et de Gauss :

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S_{yx}} \vec{\rho}_{xy}^t \cdot d\vec{S}_{yx}^t = -\oint_{\Gamma^x} \vec{E}l_{yt}^{1/x} \cdot d\vec{x}$$

S_{yx} est une surface dans le plan spatial x, y
$\vec{S}_{xy}^t$ perpendiculaire à la surface spatial S_{yx}
Γ^x contour suivant x, inclus dans la surface S_{yx}
$\vec{\rho}_{xy}^t$ la densité volumique de charge électrique orientée suivant *t* et à intégrer sur une surface S_{xy}

On a graphiquement :

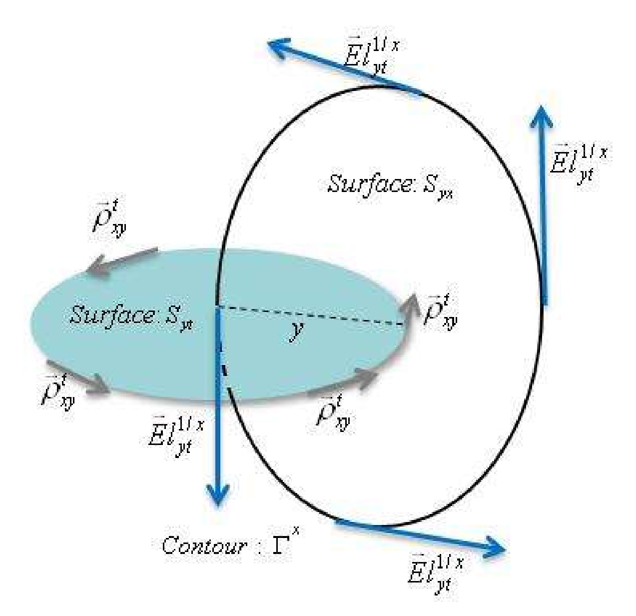


Figure 6 : Maxwell Gauss 2, champ $\vec{E}l_{yt}^{1/x}$ et densité de charge électrique $\vec{\rho}_{xy}^{t}$

Sous forme locale, on a :

$$\frac{\vec{\rho}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial \vec{E}l_{yt}^{1/x}}{\partial y}$$

Si on associe les deux équations de Maxwell Gauss, on a :

$$\frac{\vec{\rho}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}l_{yt}^{1/x}}{\partial y}$$

IV.3 Analogies électromagnétisme et gravitation, sources de type impulsion orientées dans l'Espace, théorème d'Ampère

IV.3.1 Analogues des densités de charge, courant et constante

En analogie aux équations sources champs précédentes, on veut construire des équations sources champs pour les champs $\vec{\Omega}$ et $\vec{K}$.

Deux problèmes se posent :

- quels sont les analogues aux densités volumiques de charge électrique et densités volumiques de courants électriques ?
- quelles constantes utilisées pour les équations sources champs de la gravitation. Est-ce les mêmes (permittivités ε_0 et perméabilités μ_0 de l'électromagnétisme, constante G de la gravitation) ou faut-il en trouver d'autres ?

IV.3.2 Densité de courant et densité d'impulsion

En électromagnétisme, on intègre la densité volumique de courant électrique $\vec{J}_{xt}^{y} = \vec{J}_{xl}^{y}$ sur un plan spatial x, l, avec l'idée que la dimension temporelle t et la dimension spatiale l peuvent correspondre : $l = ct$.

Pour la gravitation, dimension temporelle et dimension spatiale ne peuvent à priori correspondre. L'analogue de la densité volumique de courant électrique $\vec{J}_{xt}^{y}$ doit s'intégrer sur un plan spatiotemporel x, t. L'analogue de $\vec{J}_{xt}^{y}$ n'est donc pas simplement une densité volumique d'impulsion $\vec{p}$.

On propose ici que l'analogue de la densité linéique de courant électrique $\vec{I}_{xt}^{y}$ (qu'on appelle usuellement le courant électrique *I*) soit pour la gravitation, une densité linéique d'impulsion qu'il faudra intégrer sur *t*. Elle correspond alors à la dérivée par rapport au Temps de l'impulsion $\vec{p}$, c'est-à-dire à $(\frac{d\vec{p}}{dt})_{tx}^{y}$ ou à $\vec{\dot{p}}_{tx}^{y}$ pour reprendre la notation d'I. Newton (ou à $(\sum \vec{F})_{xt}^{y}$ si on applique le principe fondamental de la dynamique de Newton).

Pour passer ensuite des densités linéiques aux densités volumiques, on utilise la même méthode que ce soit pour le courant *I* ou pour $\vec{p}$: on divise par m².

Pour différencier respectivement densité linéique et densité volumique d'impulsion, on utilise les notations $\vec{\dot{p}}^{y}$ et $\vec{\dot{\mathbf{p}}}^{y}$. On obtient le tableau suivant, avec indication des unités pour chaque notion utilisée :

	Densité linéique	**Densité volumique**
Courant de charge électrique	$\vec{I}^{y}dy$	$\vec{J}^{y}dVol$
Unité des densités de courant de charge électrique	A	$\frac{A}{m^2}$
Courants de masse (dérivée de l'impulsion)	$\vec{\dot{p}}^{y}dy$	$\vec{\dot{\mathbf{p}}}^{y}dVol$
Unité des densités de courant de masse	$\frac{Kg.m}{s^2}$	$\frac{Kg}{m.s^2}$

On définit Vol, un volume sur 2 dimensions d'Espace et 1 de Temps.

En cas de symétrie de 2 dimensions de l'Espace-Temps, on a les relations d'équivalence pour les densités de courant électrique et de densité d'impulsion :

$$\vec{J}^{y}dVol = \vec{I}^{y}dy$$
$$\vec{\dot{\mathbf{p}}}^{y}dVol = \vec{\dot{p}}^{y}dy$$

$\vec{\dot{p}}^{y}d\vec{y}$ correspond à la notion de travail élémentaire δW.

On termine ce paragraphe par le tableau synthétique suivant :

	Densité linéique d'impulsion, c'est-à-dire dérivée de l'impulsion sur t	**Densité volumique d'impulsion sur x, y,t**
Courant de masse (dérivée de l'impulsion)	$(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{tx}^{y} = \vec{\dot{p}}_{tx}^{y}$	$(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^{x}}{dt})_{tx}^{y} = \vec{\dot{\mathbf{p}}}_{tx}^{y}$
Travail élémentaire δW	$(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{tx}^{y}dy = \vec{\dot{p}}_{tx}^{y}d\vec{y}$	$(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^{x}}{dt})_{tx}^{y}dVol = \vec{\dot{\mathbf{p}}}_{tx}^{y}dVol$

IV.3.3 La constante à utiliser

Dans les paragraphes qui suivent, on va voir que si on introduit la constante de Planck $\hbar$ (ou plutôt $-\hbar$), les 4 équations sources champs obtenues à partir de sources orientées dans l'Espace, correspondent à 3 équations déjà connues. Quant à la 4ème, à priori inconnue, elle permettra de retrouver la longueur d'onde de Compton :

$$\lambda_c = 2\pi\frac{\hbar}{mc}$$

IV.3.4 Source : densité linéique d'impulsion et champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$

On a d'après le théorème d'Ampère dans un espace x, y, t, avec k une constante en $\frac{Kg}{s}$ à déterminer :

$$\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} k\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot dc\vec{t}$$

$\frac{Kg}{m.s^2}.m^2$	$\frac{Kg}{s}.\frac{m}{s}$

S_{xt} est une surface dans le plan spatiotemporel x, t
$\vec{S}_{xt}^y$ perpendiculaire à la surface spatiotemporelle S_{xt}
Γ^t contour suivant *t*, inclus dans la surface S_{xt}
$(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y$ la densité volumique d'impulsion orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{xt}

En appliquant le théorème de Stockes à :

$$\frac{1}{k}\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot d\vec{t}$$

On a :

$$\frac{1}{k}\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\iint_{S_{xt}} \frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x} d\vec{S}_{xt}^y$$

On obtient la forme locale à intégrer sur une surface S_{xt} :

$$(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y = -\frac{\partial k\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

On obtient une équation très proche du principe fondamental de la dynamique de Newton, si on remplace :

- d'une part la densité volumique d'impulsion $(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y$ par la densité linéique d'impulsion $(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y$
- d'autre part la constante k par la constante de Planck $\hbar$.

On a alors :

$$(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y = -\frac{\partial\hbar\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

Si on remonte cette dernière équation, on a dans la 1ère colonne du tableau ci-dessous :

$\frac{1}{\hbar}\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\iint_{S_{xt}} \frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x} d\vec{S}_{xt}^y$	$\frac{1}{k}\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\iint_{S_{xt}} \frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x} d\vec{S}_{xt}^y$
$\frac{1}{\hbar}\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot d\vec{t}$	$\frac{1}{k}\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot d\vec{t}$
$\frac{1}{\hbar}\iint_{S_{xt}} \vec{p}_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot d\vec{t}$	$\frac{1}{k}\iint_{S_{xt}} \vec{\mathbf{p}}_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} \vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot d\vec{t}$

On cherche la valeur de la constante *k* en fonction de *ħ* qui permet de passer de l'une à l'autre des 2 équations ci-dessus :

$$\frac{1}{k}\vec{\mathbf{p}}_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y$$
$$\frac{1}{k}\vec{\mathbf{p}}_{xt}^y dxdct = \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{xt}^y dxdct$$

Or, dans le cas d'une symétrie de 2 dimensions de l'Espace-Temps, on a l'équivalence :

$$\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} dVol = \vec{p}_{xt}^{y} dy$$
$$\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} dxdydct = \vec{p}_{xt}^{y} dy$$

On reprend l'équation :

$$\frac{1}{k}\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} dxdct = \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{xt}^{y} dxdct$$

On multiplie chaque terme par dy :

$$\frac{1}{k}\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} dxdydct = \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{xt}^{y} dxdydct$$

On remplace $\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} dxdydct$ par $\vec{p}_{xt}^{y} dy$:

$$\frac{1}{k}\vec{p}_{xt}^{y} dy = \frac{1}{\hbar}\vec{p}_{xt}^{y} dydxdct$$

On obtient la relation entre $\hbar$ et k :

	$\hbar = k \times dxdct$	$\hbar dy = k \times dVol$
Unité	$\frac{Kg.m^2}{s} = \frac{Kg}{s} \cdot m^2$	$\frac{Kg.m^2}{s} \cdot m = \frac{Kg}{s} \cdot m^3$

En choisissant convenablement la constante k, on retrouve d'une part le théorème d'Ampère appliqué à la densité linéique d'impulsion $\vec{p}_{tx}^{y}$ et au champ pulsation $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$, et d'autre part le principe fondamental de la dynamique de Newton :

$$\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{xt}^{y} \cdot d\vec{S}_{xt}^{y} = -\oint_{\Gamma^t} \hbar\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot dc\vec{t}$$

$\frac{Kg.m}{s^2}.m^2$	$\frac{Kg.m^2}{s}.\frac{m}{s}$

On a graphiquement :

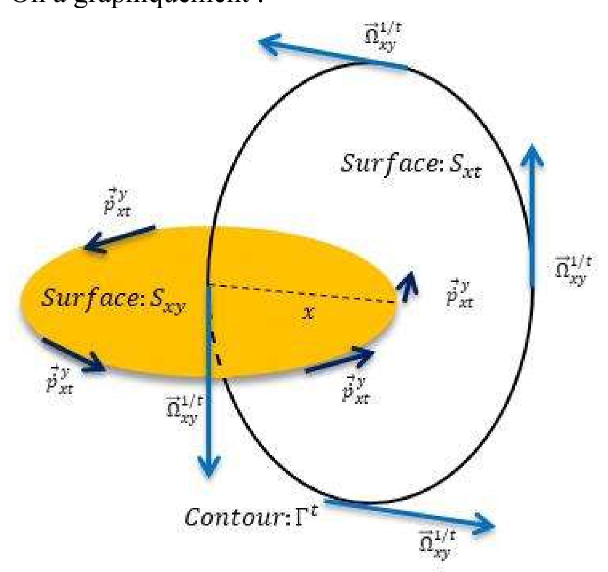


Figure 7 : source $\vec{p}_{xt}^{y}$ et champ $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$

Pourquoi on retrouve bien le principe fondamental de la dynamique de Newton :
En utilisant la relation de Max Planck et d'A. Einstein entre une énergie et une pulsation $E = \hbar\Omega$ ($E = h\nu$), on obtient :

$$(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\hbar\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial x}$$

On retrouve le principe fondamental de la dynamique de Newton avec des forces qui dérivent par rapport à l'Espace d'une énergie (potentielle).

Il s'agit également de la 2ème équation canonique de William Rowan Hamilton :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

avec le hamiltonien H qui se confond avec l'énergie $E = \hbar\Omega$.

On appellera

$$(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\hbar\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$

l'équation source champ de **Newton**.

Nota 1, sur la Relativité restreinte
L'équation source champ de Newton est ici vérifiée dans le cadre de la mécanique einsteinienne restreinte (invariance par la transformée de Lorentz). On a avec m_0 la masse au repos et $\overrightarrow{\Omega_0}^{1/t}_{xy}$ le champ pulsation au repos la relation :

$$(\frac{d\gamma m_0\vec{v}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\hbar\gamma\overrightarrow{\Omega_0}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$

On obtient :

$$(\frac{dm_0\vec{v}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\hbar\overrightarrow{\Omega_0}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$

On retrouve ci-dessus le principe fondamental de la dynamique vérifié dans le cadre de la mécanique newtonienne restreinte (invariance par la transformée de Galilée).

Nota 2, sur la rotation Ω
Dans la relation $E = \hbar\Omega$ ($E = h\nu$), on remplace la notion de pulsation ω par la notion de rotation Ω, sous-entendu on peut ramener la fréquence ou le phénomène ondulatoire de la particule à une rotation et à un champ pulsation Ω. Le mystère subsiste pour comprendre ce que serait exactement cette rotation : qu'est-ce qui tourne et autour de quoi ?

Nota 3, sur les forces de frottement
Pour retrouver le principe fondamental de la dynamique Newton, on admet ici que toute force dérive d'une énergie potentielle. Il nous faut donc ne pas tenir compte par exemple des forces de frottement qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

On peut proposer un analogue de la loi de Biot et Savart, dans le cadre de la « pulsatiostatique » avec $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$ indépendant du Temps :

	Magnétostatique	**« Pulsatiostatique »**
Loi de Biot et Savart	$\vec{B}^{1/t}_{xy} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I^y_{xt}d\vec{y}\wedge\vec{x}}{x^3}$	$\vec{\Omega}^{1/t}_{xy} = \frac{-1}{4\pi\hbar}\int_C \frac{(\frac{dp^x}{dt})^y_{xt}d\vec{y}\wedge\vec{x}}{x^3}$

On peut aussi proposer un analogue du théorème d'Ampère sous forme locale :

	Magnétostatique	**« Pulsatiostatique »**
Théorème d'Ampère sous forme locale	$\mu_0\vec{j} = rot\vec{B}$	$\frac{1}{\hbar}\vec{p} = rot\vec{\Omega}$

Nota sur le tenseur de densité du flux d'impulsion

Pour ceux qui sont familiers avec la dynamique des fluides ou la Relativité générale, $\hbar\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ possède une signification physique très similaire à celle du tenseur de densité du flux d'impulsion, noté ici Π_{ik}.

Dans un volume *V*, on a la relation entre la densité d'impulsion et le tenseur de densité du flux d'impulsion :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho v_i \, dV = -\iiint \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho v_i \, dV = -\oiint \vec{\Pi}_{ik}.d\vec{S}$$

Sur une surface *S*, on a également :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint \rho v_i dS = -\iint \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dS$$

D'après le théorème de Stockes, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint \rho v_i dS = -\oint \vec{\Pi}_{ik}.d\vec{l}$$

A rapprocher de :

$$\iint_{S_{xt}} (\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{xt}^y = -\oint_{\Gamma^t} \hbar\vec{\Omega}_{xy}^{1/t} \cdot dc\vec{t}$$

IV.3.5 Source : densité linéique d'impulsion et champ vecteur d'onde $\vec{K}_{ty}^{1/x}$

On a d'après le théorème d'Ampère dans un espace x, y, t, avec comme source la densité linéique d'impulsion $(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y$ et comme champ $\vec{K}_{ty}^{1/x}$:

$$\frac{1}{\hbar}\iint_{S_{tx}} (\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y \cdot d\vec{S}_{tx}^y = \oint_{\Gamma^x} \vec{K}_{ty}^{1/x} \cdot d\vec{x}$$

S_{tx} est une surface dans le plan spatiotemporel x, t
$\vec{S}_{tx}^y$ perpendiculaire à la surface spatiotemporelle S_{tx}
Γ^x contour suivant x, inclus dans la surface S_{tx}
$(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y$ la densité linéique d'impulsion orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{tx}

Nota

Les remarques faites dans le paragraphe précédent pour les densités volumiques et linéiques d'impulsion tiennent aussi ici. On suppose qu'on a toujours une symétrie sur deux dimensions de l'Espace-Temps. On propose donc directement le théorème d'Ampère à partir de la densité linéique d'impulsion $(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{tx}^y$ et de la constante $\hbar$.

On a graphiquement :

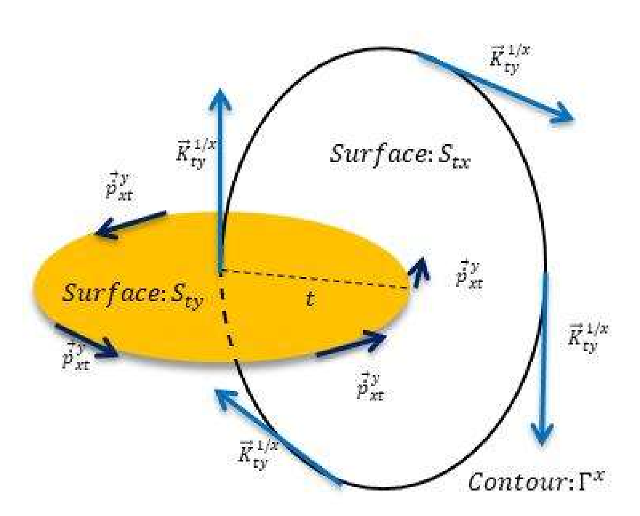


Figure 8: source $\vec{p}_{xt}^{y}$ et champ $\vec{K}_{ty}^{1/x}$

En appliquant le théorème de Stockes à :

$$\frac{1}{\hbar}\iint_{S_{tx}} (\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{xt}^{y} \cdot d\vec{S}_{tx}^{y} = \oint_{\Gamma^{x}} \vec{K}_{ty}^{1/x} \cdot d\vec{x}$$

On obtient :

$$\frac{1}{\hbar}\iint_{S_{tx}} (\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{xt}^{y} \cdot d\vec{S}_{tx}^{y} = \iint_{S_{tx}} \frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_{tx}^{y}$$

On a la forme locale à intégrer sur une surface S_{tx} :

$$\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

Si la dérivée par rapport au Temps est égale à la dérivée partielle par rapport au Temps, on retrouve la relation d'Einstein et de Broglie reliant la quantité de mouvement à la longueur d'onde :

$$\vec{p}_{ty}^{x} = \hbar \vec{K}_{ty}^{1/x}$$

c'est-à-dire :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\gamma m_0 v = \frac{h}{\lambda}$$

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et v la vitesse du corps étudié.

On appellera :

$$\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

l'équation source champ de **Broglie** (le nom d'Einstein sera utilisé pour une prochaine équation source champ où intervient la célèbre équation $E_0 = mc^2$).

Si on associe les deux équations sources champs faisant intervenir l'impulsion, on a :

$$-\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$$

Nota
Suivant les idées proposées ici, on va voir que la constante $\hbar$ n'est pas directement liée à l'électromagnétisme mais à la gravitation.

Remarque historique
La relation $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ a d'abord été proposée par A. Einstein pour donner l'impulsion d'un photon à partir de sa longueur d'onde. On a les relations pour un photon de masse nulle : $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ et $E = pc$. On retrouve ainsi $p = \frac{h}{\lambda}$.
En 1924, L. de Broglie a proposé d'étendre cette relation $p = \frac{h}{\lambda}$ à toutes les particules, notamment les particules massiques comme l'électron. Selon l'hypothèse de L. de Broglie, les particules sont associées à des ondes. L'association entre l'impulsion d'une particule p et la longueur d'onde λ de l'onde se fait justement via la relation $p = \frac{h}{\lambda}$.

IV.4 Analogies électromagnétisme et gravitation, sources de type masse orientées dans l'Espace, théorème d'Ampère

On propose dans ce paragraphe une analogie, qui contrairement à celle du paragraphe précédent, ne correspond pas exactement aux équations de Maxwell. Cette analogie semble néanmoins présenter un intérêt puisqu'on y retrouve des équations connues de la physique quantique.

IV.4.1 Un deuxième analogue pour la gravitation à la densité linéique de courant électrique ?

Précédemment, on a souligné qu'on pouvait passer des équations d'Ampère à Gauss en permutant instant et position.
On note que si on permute *x* et *t* dans la densité linéique d'impulsion $(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt}$, on trouve une quantité également orientée dans l'Espace et qui de plus, inclut un terme de masse avec le remplacement de $\vec{p}^x$ par $\vec{m}^t$. On obtient :

$$(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}$$

Dans les paragraphes qui suivent, on se propose de construire et tester des équations sources champs créées à partir de densités d'impulsion et de masse orientées dans l'Espace, comme le sont les densités de courant dans le cas du théorème d'Ampère.

On récapitule dans le tableau ci-dessous, les sources orientées dans l'Espace que l'on va tester :

	Impulsion	**Masse**
Densités linéiques d'impulsion ou de masse, tous deux orientées dans l'Espace	$(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \vec{p}^y_{tx}$	$(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}$
Unité	$\frac{Kg.m}{s^2}$	$\frac{Kg}{m}$

IV.4.2 Source : densité linéique de masse et champ pulsation $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$

On a d'après le théorème d'Ampère dans un espace x, y, t :

$$\frac{c^2}{\hbar}\iint_{S_{xt}}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}\cdot d\vec{S}^y_{xt} = \oint_{\Gamma^t}\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}\cdot d\vec{t}$$

S_{xt} est une surface dans le plan spatiotemporel x, t
$\vec{S}^y_{xt}$ perpendiculaire à la surface spatiotemporelle S_{xt}
Γ^t contour suivant t, inclus dans la surface S_{xt}
$(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}$ la densité linéique de masse orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{xt}

On a graphiquement :

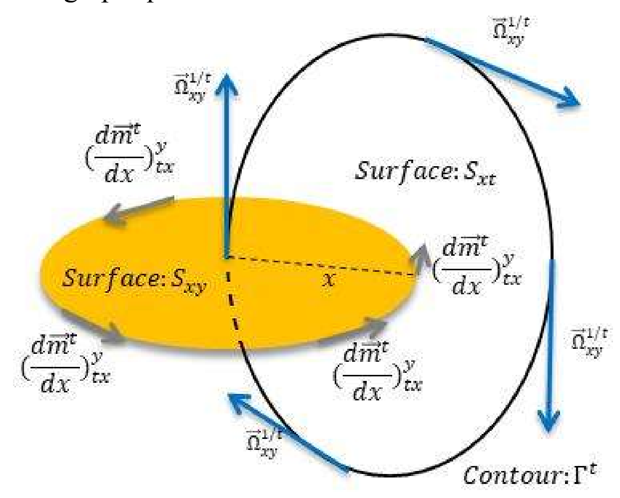


Figure 9 : source $(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}$ *et champ* $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$

En appliquant le théorème de Stockes à :

$$\frac{c^2}{\hbar}\iint_{S_{xt}}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}\cdot d\vec{S}^y_{xt} = \oint_{\Gamma^t}\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}\cdot d\vec{t}$$

On a :

$$\frac{c^2}{\hbar}\iint_{S_{xt}}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}\cdot d\vec{S}^y_{xt} = \iint_{S_{xt}}\frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}\cdot d\vec{S}^y_{xt}$$

On obtient la forme locale à intégrer sur une surface S_{xt} :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx} = \frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$

En considérant que la dérivée par rapport à x est égale à la dérivée partielle par rapport à x, on a :

$$\vec{m}^t c^2 = \hbar\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$$

On retrouve les célèbres relations d'A. Einstein et de M. Planck donnant l'énergie massique E_0 d'une particule immobile de masse m_0 et l'énergie d'un corps considéré comme une onde stationnaire de fréquence ν_0 :

$$E_0 = m_0c^2 = h\nu_0$$

Si la particule devient mobile avec une vitesse v, elle a alors une masse relative :

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} m_0 = \gamma m_0$$

De même, si l'onde n'est plus stationnaire et devient progressive, elle a alors une fréquence :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \nu_0 = \gamma \nu_0$$

On a alors pour l'énergie *E* de la particule mobile ou de l'onde progressive :

$$E = \gamma E_0 = \gamma m_0 \mathrm{c}^2 = mc^2 = h\gamma \mathrm{v}_0 = h\,\nu = \sqrt{p^2 c^4 - {m_0}^2 \mathrm{c}^4}$$

On a :

$$mc^2 = h\,\nu$$
$$mc^2 = \hbar\,\omega$$

On appellera :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx} = \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$

l'équation source champ d'**Einstein**.

Nota
L'équation source champ d'Einstein est ici vérifiée dans le cadre de la mécanique einsteinienne restreinte (invariance par la transformée de Lorentz). On a avec m_0 la masse au repos et $\overrightarrow{\Omega_0}^{1/t}_{xy}$ le champ pulsation au repos la relation :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\gamma \overrightarrow{m_0}^t}{dx})^y_{tx} = \frac{\partial \gamma \overrightarrow{\Omega_0}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$
$$m_0 \mathrm{c}^2 = \hbar\,\omega_0 = E_0$$

IV.4.3 Source : densité linéique de masse et champ vecteur d'onde $\vec{K}^{1/x}_{ty}$

On a d'après le théorème d'Ampère dans un espace x, y, t :

$$\frac{c^2}{\hbar}\iint_{S_{tx}}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx} \cdot d\vec{S}^y_{tx} = -\oint_{\Gamma^x} \vec{K}^{1/x}_{ty} \cdot d\vec{x}$$

S_{tx} est une surface dans le plan spatiotemporel x, t
$\vec{S}^y_{tx}$ perpendiculaire à la surface spatiotemporelle S_{tx}
Γ^x contour suivant x, inclus dans la surface S_{tx}
$(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}$ la densité linéique de masse orientée suivant *y* et à intégrer sur une surface S_{tx}

On a graphiquement :

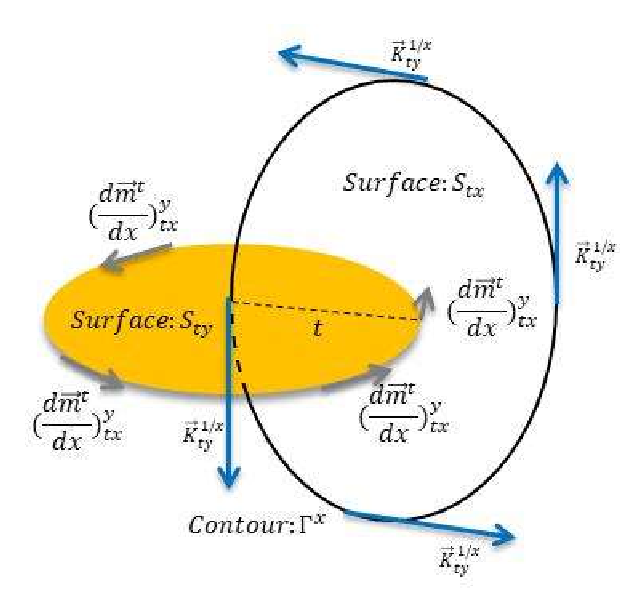


Figure 10 : source $(\frac{d\vec{m}^t}{dx})_{tx}^y$ *et champ* $\vec{K}_{ty}^{1/x}$

En appliquant le théorème de Stockes à :

$$\frac{c^2}{\hbar}\iint_{S_{tx}}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})_{tx}^y \cdot d\vec{S}_{tx}^y = -\oint_{\Gamma^x}\vec{K}_{ty}^{1/x} \cdot d\vec{x}$$

On obtient :

$$\frac{c^2}{\hbar}\iint_{S_{tx}}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})_{tx}^y \cdot d\vec{S}_{tx}^y = -\iint_{S_{tx}}\frac{\partial\vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_{tx}^y$$

On a la forme locale à intégrer sur une surface S_{tx} :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})_{tx}^y = -\frac{\partial\vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

Qu'on peut écrire de manière plus simple :

$$\frac{dmc^2}{dx} = -\frac{\partial\hbar K^x}{\partial t}$$

Si on assimile dérivée partielle et dérivée, on a :

$$\frac{c^2}{\hbar}\frac{dm}{dx} = \frac{dK}{dt}$$

$$c^2dm = \frac{dx}{dt}d\hbar K$$

On pose :

$$\frac{dx}{dt} = c$$

$$cdm = d\hbar K$$

En intégrant à une constante près, on a :

$$cm = \hbar K$$

On retrouve la longueur d'onde de Compton :

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{K} = 2\pi\frac{\hbar}{mc} = \frac{h}{mc}$$

On appellera :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx} = -\frac{\partial\vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$$

l'équation source champ de **Compton**.

On a également :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\gamma\vec{m}^t_0}{dx})^y_{tx} = -\frac{\partial\vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$$

avec $\vec{m}^t_0$ la masse de la particule si elle était immobile,

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et v la vitesse du corps étudié,

et à partir du moment où l'on a : $\vec{K}^{1/x}_{ty}$, l'onde est progressive selon $p = \frac{h}{\lambda}$.

Si on associe les deux équations sources champs faisant intervenir la masse, on a :

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx} = \frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial\vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$$

Nota 1, sur les équations sources champs utilisées par la mécanique newtonienne et la mécanique relativiste

La mécanique classique newtonienne et son prolongement à la mécanique ondulatoire (non relativiste) de Bohr, de Broglie et de Schrödinger utilisent les équations sources champs de Broglie : $p = \hbar k$ et de Newton : $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\hbar\Omega}{\partial r} = -\frac{\partial E}{\partial r}$.

La Relativité restreinte et son prolongement la mécanique ondulatoire relativiste de Dirac (Electrodynamique quantique relativiste) utilisent les équations sources champs de Broglie $p = \hbar k$ et d'Einstein $E_0 = mc^2 = \hbar\Omega_0$.

Nota 2, Newton et Compton, Einstein et de Broglie, analogie Espace et Temps

Il existe une analogie formelle entre :

- l'équation source champ de Newton $(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\hbar\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$ et celle de Compton $(\frac{d\vec{m}^t c^2}{dx})^y_{tx} = -\frac{\partial\hbar\vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$,
- l'équation source champ de Broglie $\vec{p}^x = \hbar\vec{K}^{1/x}_{ty}$ et celle d'Einstein $\vec{m}^t c^2 = \hbar\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$.

En effet, on passe des unes aux autres en intervertissant x et ct, c'est-à-dire l'Espace et le Temps. Par exemple, en intervertissant x et ct, l'impulsion $\vec{p}^x$ devient de l'énergie massique $E^t_0 = \vec{p}^t c = \vec{m}^t c^2$ (avec ici $\gamma = 1$).

IV.5 Rappels sur la longueur d'onde de Compton

IV.5.1 Diffusion Compton

En 1923, Arthur Compton observe ce qu'on appelle aujourd'hui l'effet Compton ou la diffusion Compton. C'est une confirmation expérimentale de la lumière considérée comme particulaire, c'est-à-dire formée de photons.

Lors de la diffusion Compton, un photon incident heurte une particule libre (par exemple un électron ou un proton). Un photon diffusé est émis avec une longueur d'onde un peu plus élevée que celle du photon incident (c'est-à-dire une énergie un peu plus faible).

La différence de longueur d'onde entre le photon incident et le photon diffusé, est proportionnelle à une valeur constante λ_c portant le nom de longueur d'onde de Compton. On a la relation suivante :

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\text{avec } \lambda_c = \frac{h}{mc}$$

où :
$\Delta\lambda$ est le décalage entre les longueurs d'onde du photon incident et du photon diffusé,
λ_c est la longueur d'onde de Compton,
θ est l'angle de diffusion du photon diffusé,
m masse de la particule libre (par exemple l'électron ou le proton).

On peut comparer la constante λ_c à un quantum de longueur d'onde. Contrairement à la longueur d'onde de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$, la longueur d'onde de Compton ne correspond pas à une longueur d'onde observable dans une propagation, elle n'est qu'un auxiliaire de calcul.

IV.5.2 Schéma d'une diffusion

On schématise une diffusion Compton entre un photon et un électron initialement au repos. L'électron et le photon sont diffusés respectivement avec des angles φ et θ.

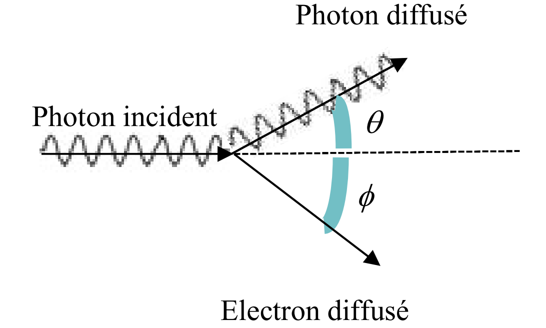


Figure 11 : diffusion Compton

Dans le tableau ci-dessous, on indique la longueur d'onde de Compton de l'électron, du proton et du neutron. On note que λ_c est très proche pour le proton et le neutron, ces 2 particules ont donc des masses très proches.

Particule	Symbole	Valeur
Electron	$\lambda_{c,e}$	$\approx 2{,}426 \times 10^{-12} m$
Proton	$\lambda_{c,p}$	$\approx 1{,}321 \times 10^{-15} m$
Neutron	$\lambda_{c,n}$	$\approx 1{,}320 \times 10^{-15} m$

Nota sur l'étude de l'infiniment petit
Dans les collisionneurs de particules, on a coutume de dire que plus on accroit l'énergie, plus on sonde de petites distances.

Cela peut se comprendre intuitivement via une approche ondulatoire. Plus on augmente l'énergie $E = h\nu$ et donc la fréquence ν, plus on diminue la longueur d'onde λ et plus on sonde de petites distances.

Cela peut aussi se comprendre via la relation $E = mc^2 = c\hbar K$. Plus on augmente l'énergie $E = mc^2$, plus on augmente K inverse d'une distance et plus on sonde de petites distances.

IV.6 Rappels de mécanique hamiltonienne

IV.6.1 Equations canoniques de Hamilton

En 1833, William Rowan Hamilton s'inspire des travaux de Joseph-Louis Lagrange et propose une reformulation de la mécanique classique newtonienne. A la place du principe fondamental de la dynamique, il imagine 2 équations de forme identique et aux dérivées premières.
On rappelle ici quelques principes de mécanique hamiltonienne, qui a d'ailleurs été fréquemment utilisée par les pionniers de la mécanique quantique et ondulatoire comme L. de Broglie, E. Schrödinger ou W. Heisenberg.

Soient q une variable de position, p une quantité de mouvement (appelée moment conjugué ou encore impulsion généralisée) et H l'énergie du système étudié (appelée aussi hamiltonien). On a les deux équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

IV.6.2 Lien avec les équations sources champs de la gravitation

On a déjà souligné que la **2ème équation canonique** $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ correspond à l'équation source champ de Newton avec $H = \hbar\Omega$

Nota
On a coutume de dire que l'hamiltonien H représente l'énergie. Néanmoins, c'est une énergie « ondulatoire » $H = \hbar\Omega$ de type champ, à priori possiblement distincte de l'énergie massique $E_0 = p_0^t = m_0^t c^2$ de type source.

Pour trouver la **1ere équation canonique** $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, il faut utiliser la définition de la vitesse de groupe et l'équation source champ de Broglie.

On a :

$$v_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K} = \frac{\partial \hbar\Omega}{\partial \hbar K}$$

On a par définition :

$$H = \hbar\Omega$$

D'après L. de Broglie :

$$p = \hbar K$$

De plus :

$$v_g = \dot{q}$$

On retrouve :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Par exemple, si on a une énergie mécanique non relativiste de la forme :

$$H = \hbar\Omega = \frac{p^2}{2m} + Ep(q)$$

En utilisant la 1ère équation canonique de Hamilton (c'est-à-dire l'équation source champ de Broglie et la définition de la vitesse de groupe), on retrouve la définition usuelle de la quantité de mouvement :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$p = m\dot{q}$$

IV.7 Analogies électromagnétisme et gravitation, sources orientées dans le Temps, théorème de Gauss

IV.7.1 Maxwell Gauss électrostatique et Gauss gravitation

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser aux analogies entre les équations sources champs Maxwell Gauss et Gauss gravitation (ou la Loi de la gravitation universelle de Newton). Ces analogies ont déjà été longuement évoquées dans cet essai. Elles ont fait aussi, depuis leurs découvertes, l'objet de nombreuses études de la part des physiciens. On rappelle ici brièvement les principales analogies entre l'électrostatique coulombienne et la gravitation newtonienne.

	Electrostatique coulombienne	**Gravitation newtonienne**
Densité de charge, masse	ρ^t	ρ^t
Constante	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	$-4\pi G$
Champ (champs non réorientés)	$Es = -\frac{\partial A^t}{\partial r}$ $\vec{E}s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}_r$	$Gr = -\frac{\partial V^t}{\partial r}$ $\vec{G}r = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_r$
Gauss (champs non réorientés)	$div\vec{E}s = \frac{\rho_{éléc}}{\varepsilon_0}$	$div\vec{G}r = -4\pi G\rho_{masse}$
Rotationnel (champs non réorientés)	$r\vec{o}t\vec{E}s = \vec{0}$	$r\vec{o}t\vec{G}r = \vec{0}$

IV.7.2 Gauss gravitation 1

Suivant une stricte analogie avec l'équation de Maxwell Gauss proposée précédemment pour l'électromagnétisme et le champ électrique, on a pour la gravitation et le champ $\vec{K}_{xt}^{1/y}$:

$$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^y} 2c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y} \cdot d\vec{y}$$

S_{xy} est une surface dans le plan spatial x, y
$\vec{S}_{xy}^{t}$ perpendiculaire à la surface S_{xy}
Γ^{y} contour suivant y, inclus dans la surface S_{xy}
$\vec{\rho}_{xy}^{t}$ la densité volumique de masse orientée suivant *t* et à intégrer sur une surface S_{xy}

Nota sur unités pour les densités de masse
La densité volumique de masse ρ^{t} s'exprime en kilogramme par mètre cube : $\frac{Kg}{m^3}$.
On définit également une densité surfacique de masse qui s'exprime en $\frac{Kg}{m^2}$, et une densité linéique de masse en $\frac{Kg}{m}$.
La masse m s'exprime en Kg.

Dans le cas de symétries spatiales, on a les relations d'équivalences pour les densités de masse :
$$\vec{\rho}^{t} dVol = \vec{\sigma}^{t} dS = \vec{\lambda}^{t} dl = d\vec{m}^{t}$$

On a la relation entre le champ vecteur d'onde et le champ gravitationnel :
$$2c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y} = \frac{\partial V^t}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial t}$$
$$2c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y} = \vec{G}r_{xt}^{1/y} - \frac{\partial V^x}{\partial t}$$

Nota
Suivant les notations utilisées dans ce mémoire, on a :
$$\vec{G}r_{xt}^{1/y} = \frac{\partial V^t}{\partial x}$$
$$\vec{G}r_{tx}^{1/y} = -\frac{\partial V^t}{\partial x}$$

On obtient la relation source champ avec le champ gravitationnel :

$$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^y} (\vec{G}r_{xt}^{1/y} - \frac{\partial V^x}{\partial t}) \cdot d\vec{y}$$

On rappelle l'équation Gauss gravitation qui devrait être obtenue à partir de la relation « usuelle » :
$$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^y} \vec{G}r_{xt}^{1/y} \cdot d\vec{y}$$

On note que dans Gauss gravitation « usuelle », il n'y a pas le terme $-\frac{\partial V^x}{\partial t}$, correspondant à l'accélération $-\frac{\partial V^x}{\partial t}$ annulée lors du changement de référentiels de R^0 à R^K (accélération annulée qu'on a qualifié d'accélération einsteinienne dans les précédents mémoires).

Pour Gauss gravitation « usuelle », on parlera de « gravitostatique », par analogie avec l'électrostatique, même s'il ne faut peut-être pas y voir une signification identique. On propose ici 3 hypothèses à cette différence entre l'équation Gauss gravitation « usuelle » et l'équation Gauss gravitation proposée ici, 3 hypothèses qui sont d'ailleurs compatibles entre elles.

Premier hypothèse
La gravitostatique peut correspondre comme l'électrostatique au cas où il n'y a pas terme $-\frac{\partial V^x}{\partial t}$ ou $-\frac{\partial A^x}{\partial t}$, c'est-à-dire le cas où il n'y a pas d'accélération annulée lors du changement de référentiels.

On a alors :

$$2c^2\vec{K}_{xt}^{1/y} = \vec{G}r_{xt}^{1/y} - \frac{\partial V^x}{\partial t} = \vec{G}r_{xt}^{1/y} - 0$$
$$\vec{E}l_{xt}^{1/y} = \vec{E}s_{xt}^{1/y} - \frac{\partial A^x}{\partial t} = \vec{E}s_{xt}^{1/y} - 0$$

Deuxième hypothèse
L'accélération annulée n'apparait pas dans Gauss gravitation « usuelle », car elle est implicitement présente dans l'accélération utilisée. Par exemple, lorsqu'on applique le principe fondamental de la dynamique de Newton, on peut avoir :

$$m\vec{a} = m\vec{G}r + \Sigma\vec{F}$$
$$m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = m\vec{G}r + \Sigma\vec{F}$$

avec $\vec{a}_2$ que l'on fait correspondre à $\frac{\partial V^x}{\partial t}$,
avec $\vec{G}r$ que l'on fait correspondre à $\vec{G}r_{xt}^{1/y}$,
et avec $\Sigma\vec{F}$ la somme des forces autre que gravitationnelles.

On obtient :

$$m\vec{a}_1 = m(\vec{G}r - \vec{a}_2) + \Sigma\vec{F}$$
$$m\vec{a}_1 = m2c^2\vec{K} + \Sigma\vec{F}$$

Dans ce cas, on note que le choix du référentiel de référence R^0, n'est pas le même, puisqu'il faut en plus ajouter $\vec{a}_2$.

Troisième hypothèse
On ne tient pas compte de l'annulation de l'accélération $\frac{\partial V^x}{\partial t}$ dans la théorie newtonienne, ni d'ailleurs dans la Relativité générale. Faut-il alors y voir une faiblesse de ces 2 théories et une piste pour expliquer la matière noire autre qu'un ajout de masse supplémentaire ?
Dans un prochain chapitre, en cherchant à transposer Maxwell Faraday et les phénomènes d'induction de l'électromagnétisme à la gravitation, on s'intéressera au cas dit de Neuman, où on définit un champ électromoteur :

$$\vec{E}m = \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t}$$

Ce champ électromoteur explique (avec également le cas de Lorentz) les phénomènes d'induction. On suggérera que c'est une possible explication au non-respect de l'attendu képlérien pour les galaxies.
Fin des 3 hypothèses

On récapitule dans ce tableau les équations de Gauss gravitation, en distinguant le cas gravitation et celui gravitostatique :

Gravitation	Gravitostatique
$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{\,t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^y} 2c^2\vec{K}_{xt}^{1/y} \cdot d\vec{y}$	$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{\,t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^y} \vec{G}r_{xt}^{1/y} \cdot d\vec{y}$
$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{\,t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = -\oint_{\Gamma^x} (\vec{G}r_{xt}^{1/y} - \frac{\partial V^x}{\partial t}) \cdot d\vec{x}$	

On a graphiquement :

Gravitation	Gravitostatique

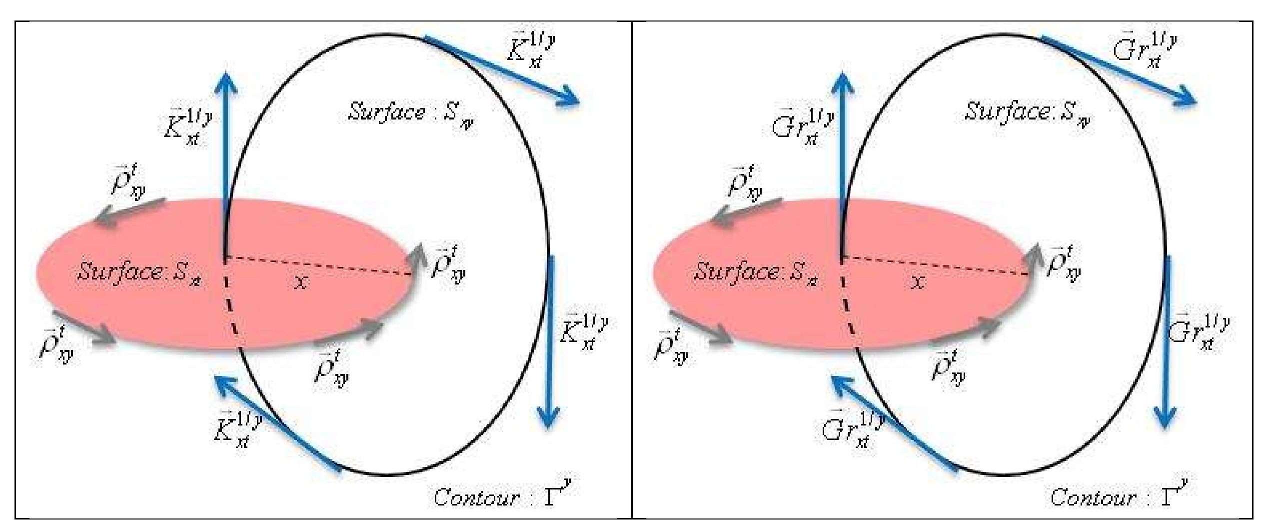


Figure 12 : Gauss gravitation 1, champs $\vec{K}_{xt}^{1/y}$,$\vec{G}r_{xt}^{1/y}$ et densité volumique de masse $\vec{\rho}_{xy}^{t}$

En appliquant le théorème de Stockes à :

$$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \oint_{\Gamma^{y}} 2c^2\vec{K}_{xt}^{1/y} \cdot d\vec{y}$$

On obtient :

$$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = -\iint_{S_{xt}} \frac{\partial 2c^2\vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x} d\vec{S}_{xy}^{t}$$

On a la forme locale à intégrer sur une surface S_{xy} :

Gravitation	Gravitostatique
$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial 2c^2\vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x}$	$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial \vec{G}r_{xt}^{1/y}}{\partial x}$

IV.7.3 Gauss gravitation 2

Toujours suivant une stricte analogie avec l'équation de Maxwell Gauss proposée, on a :

Gravitation	Gravitostatique
$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = -\oint_{\Gamma^{x}} 2c^2\vec{K}_{yt}^{1/x} \cdot d\vec{x}$	$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = -\oint_{\Gamma^{x}} \vec{G}r_{yt}^{1/x} \cdot d\vec{x}$
$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^{t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = -\oint_{\Gamma^{x}} (\vec{G}r_{yt}^{1/x} - \frac{\partial V^{y}}{\partial t}) \cdot d\vec{x}$	

S_{yx} est une surface dans le plan spatial x, y
$\vec{S}_{xy}^{t}$ perpendiculaire à la surface spatial S_{yx}
Γ^{x} contour suivant x, inclus dans la surface S_{yx}
$\vec{\rho}_{xy}^{t}$ la densité volumique de masse orientée suivant *t* et à intégrer sur une surface S_{xy}

On a la relation entre le champ vecteur d'onde et le champ gravitationnel :

$$2c^2\vec{K}_{yt}^{1/x} = \frac{\partial V^{t}}{\partial y} - \frac{\partial V^{y}}{\partial t}$$

$$2c^2\vec{K}_{yt}^{1/x} = \vec{G}r_{yt}^{1/x} - \frac{\partial V^y}{\partial t}$$

On a graphiquement :

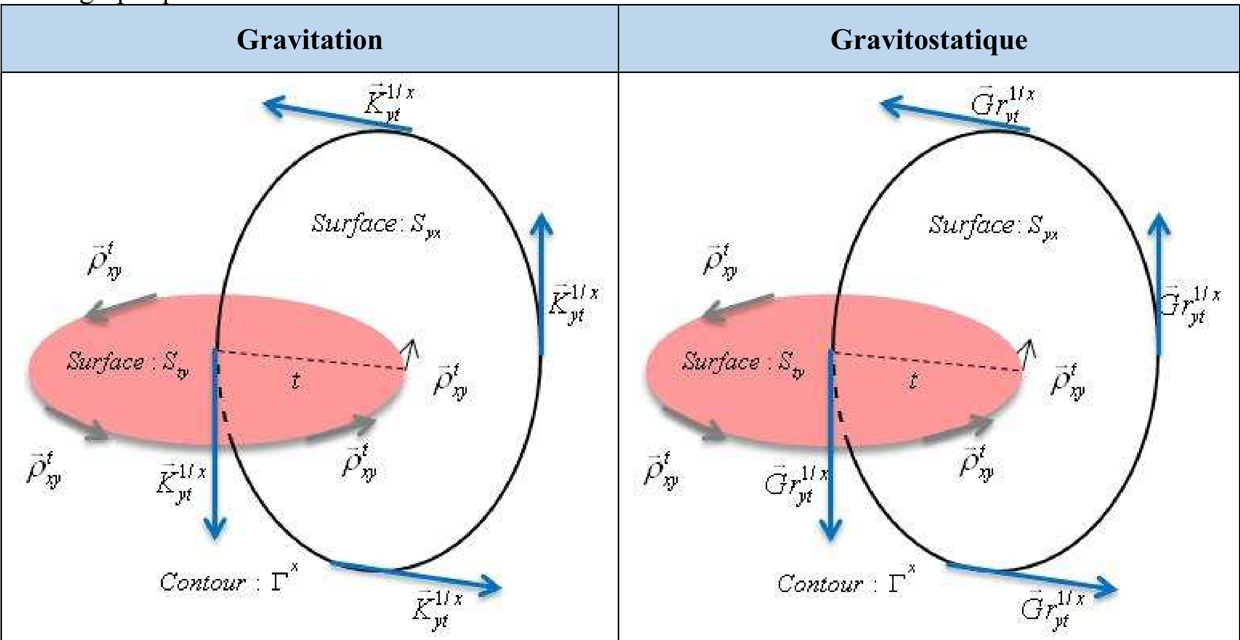


Figure 13 : Gauss gravitation 2, champs $\vec{K}_{yt}^{1/x}$,$\vec{G}r_{yt}^{1/x}$ et densité volumique de masse $\vec{\rho}_{xy}^{t}$

Sous forme locale, on a :

Gravitation	**Gravitostatique**
$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = -\frac{\partial 2c^2\vec{K}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$	$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = -\frac{\partial \vec{G}r_{yt}^{1/x}}{\partial y}$

Si on associe les deux équations de Gauss gravitation, on a :

Gravitation	**Gravitostatique**
$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial 2c^2\vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial 2c^2\vec{K}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$	$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial \vec{G}r_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}r_{yt}^{1/x}}{\partial y}$
$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = (\frac{\partial \vec{G}r_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial^2 V^x}{\partial x\partial t}) - (\frac{\partial \vec{G}r_{yt}^{1/x}}{\partial y} - \frac{\partial^2 V^y}{\partial y\partial t})$	
$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = (\frac{\partial \vec{G}r_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}r_{yt}^{1/x}}{\partial y}) - (\frac{\partial^2 V^x}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2 V^y}{\partial y\partial t})$	

Nota 1, expliciter les équations champs sources

Explicitons avec des mots les équations sources champs de Maxwell et celles que l'on vient de proposer.

Source champ **Maxwell Gauss**

$$\frac{\vec{\rho}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}l_{yt}^{1/x}}{\partial y}$$

Une densité volumique de charge électrique (immobile dans l'Espace) génère un champ électrique variable dans l'Espace.

Source champ **Maxwell Ampère**

$$\mu_0 \vec{J}_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

Une densité volumique de courant (charge électrique en mouvement dans l'Espace, par exemple de rotation) génère un champ magnétique variable dans l'Espace.

Source champ **Maxwell courant de déplacement**

$$\vec{J}_{xt}^{y} = -\frac{\partial \vec{E}l_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

Une densité volumique de courant (charge électrique en mouvement dans l'Espace, par exemple de rotation) génère un champ électrique variable dans le Temps.

Source champ de **Newton**

$$(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{tx}^{y} = -\frac{\partial \hbar \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \hbar \Omega^{t}}{\partial x}$$

Une densité linéique d'impulsion (masse en mouvement accéléré dans l'Espace) génère un champ pulsation variable dans l'Espace.

En réexplicitant le principe fondamental de la dynamique de Newton suivant une approche source champ, on souligne l'analogie entre ce principe et le théorème d'Ampère :

- Principe fondamental : une masse en mouvement accéléré génère un champ pulsation (ou une énergie potentielle) qui varie dans l'Espace.
- Théorème d'Ampère : une charge électrique en mouvement génère un champ magnétique qui varie dans l'Espace.

Gardons à l'esprit que dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, la masse n'est pas obligatoirement constante et que par analogie, cela devrait valoir pour la charge électrique dans le théorème d'Ampère.

Source champ de **Broglie**

$$(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})_{tx}^{y} = \frac{\partial \hbar \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

$$p = \hbar K$$

Une densité linéique d'impulsion (masse en mouvement accéléré dans l'Espace) génère un champ vecteur d'onde variable dans le Temps.

Source champ d'**Einstein**

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^{t}}{dx})_{xt}^{y} = \frac{\partial \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

$$E = mc^2 = \hbar \Omega$$

Une densité linéique de masse (immobile dans l'Espace) génère un champ pulsation variable dans l'Espace.

Source champ de **Compton**

$$\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^{t}}{dx})_{xt}^{y} = -\frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

$$\frac{dmc^2}{dx} = -\frac{\partial \hbar K^{1/x}}{\partial t}$$

Une densité linéique de masse (immobile dans l'Espace) génère un champ vecteur d'onde variable dans le Temps.

Source champ **Gauss gravitation**

$$-4\pi G\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial 2c^2\vec{K}_{xt}^{\frac{1}{y}}}{\partial x} - \frac{\partial 2c^2\vec{K}_{yt}^{\frac{1}{x}}}{\partial y}$$

Une densité volumique de masse (immobile dans l'Espace) génère un champ vecteur d'onde variable dans l'Espace.

Nota 2

Pour les équations sources champs gravitation (sources orientées dans l'Espace, équations avec constante $\hbar$) les flux des sources s'effectuent à travers des surfaces spatiotemporelles.
Pour les équations sources champs de Maxwell Ampère (sources orientées dans l'Espace, l'équation partie magnétique avec constante μ_0 et celle courant de déplacement avec constante ε_0), les flux des sources s'effectuent également à travers des surfaces spatiotemporelles.

Pour les équations sources champs de Maxwell Gauss (sources orientées dans le Temps, avec constante ε_0) et les 2 équations de Gauss gravitation (sources orientées dans le Temps, avec constante $-4\pi G$), les flux des sources s'effectuent à travers des surfaces spatiales.

IV.8 Approche tensorielle

IV.8.1 Tenseur électromagnétique de Maxwell Faraday $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$

On rappelle le tenseur électromagnétique de Maxwell Faraday :

$$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} \\ \frac{El_{xt}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ \frac{El_{yt}}{c} & B_{yx} & 0 & B_{yz} \\ \frac{El_{zt}}{c} & B_{zx} & B_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{tz}}{c} \\ -\frac{El_{tx}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ -\frac{El_{ty}}{c} & -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ -\frac{El_{tz}}{c} & -B_{xz} & -B_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

Les équations sources champs de Maxwell peuvent se mettre sous la forme compacte ci-dessous qui traduit leur identité de forme dans un Espace-Temps ct, x, y, z :

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$j^\mu = (j^t, j^x, j^y, j^z)$$

IV.8.2 Tenseur gravitation $\bar{\bar{D}}_{\mu\nu}$

On a les équations sources champs de la gravitation :

$$-\frac{1}{\hbar c}\left(\frac{d\vec{p}^x}{dt}\right)_{xt}^{y} = \frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{c\partial x} - \frac{\partial\vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial ct}$$

$$\frac{-2\pi G}{c^2}\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial\vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x} - \frac{\partial\vec{K}_{yt}^{1/x}}{\partial y}$$

On définit le tenseur gravitation $\bar{\bar{D}}_{\mu\nu}$:

$$\bar{\bar{D}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_{tx} & K_{ty} & K_{tz} \\ -K_{tx} & 0 & \frac{\Omega_{xy}}{c} & \frac{\Omega_{xz}}{c} \\ -K_{ty} & -\frac{\Omega_{xy}}{c} & 0 & \frac{\Omega_{yz}}{c} \\ -K_{tz} & -\frac{\Omega_{xz}}{c} & -\frac{\Omega_{yz}}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

On définit le quadrivecteur densité d'énergie impulsion :

$$p^{\mu} = (\frac{-2\pi G}{c^2}\vec{\rho}^{\,t}_{xy}, \frac{-1}{\hbar c}\vec{p}^{\,x}_{yt}, \frac{-1}{\hbar c}\vec{p}^{\,y}_{zt}, \frac{-1}{\hbar c}\vec{p}^{\,z}_{xt})$$

Nota
Ce quadrivecteur densité d'énergie impulsion a ici un sens différent du quadrivecteur énergie impulsion de la Relativité restreinte égal à $p^{\mu} = (p^t c = \gamma c^2 m^t, p^x = \gamma m^t v^x, p^y, p^z)$.

A noter que pour l'énergie, c'est ici une densité volumique alors que pour l'impulsion, c'est ici une densité linéaire. A voir si cela peut poser un problème d'homogénéité dans la définition de ce tenseur ?

On obtient la forme compacte qui souligne l'identité de forme des équations sources champs de la gravitation dans un Espace-Temps ct, x, y, z :

$$\partial_{\mu} D_{\mu\nu} = p^{\mu}$$

Nota
Considérer la dimension Temps comme identique à une dimension spatiale, construire tous les champs sur le même mode, permet donc d'avoir des équations sources champs singulièrement compactes et simples. Cela fonctionne aussi bien pour l'électromagnétisme que pour la gravitation.

IV.9 Conclusion du chapitre

Suivant une analogie électromagnétisme gravitation, on a proposé en utilisant les théorèmes d'Ampère et de Gauss plusieurs équations sources champs pour la gravitation.
Comme à l'attendu, on a retrouvé l'équation Gauss gravitation, quoique légèrement modifiée par rapport à la loi de la gravitation universelle de Newton. Plus surprenant, on a également retrouvé le principe fondamental de la dynamique de Newton, ainsi que la relation impulsion longueur d'onde de Broglie pour les analogues de Maxwell Ampère.

Au début de ce mémoire, on a souligné qu'il était possible de retrouver une vitesse de groupe d'une onde particule « chargée électriquement » à partir des équations de Maxwell. Dans le prochain chapitre, on va tester s'il est également possible de retrouver une vitesse de groupe d'une onde particule « massique » à partir des équations sources champs obtenues pour la gravitation.

Chapitre V Conditions pour obtention de vitesses de groupe

Objet du chapitre
A partir des équations sources champs de la gravitation obtenues dans le précédent chapitre, on cherche quelles conditions doivent respecter certaines constantes, afin de retrouver les vitesses de groupe espérées.

V.1 Unir les constantes $\hbar$ et G dans un même modèle ?

V.1.1 Rappel sur la vitesse de groupe obtenue à partir des équations de Maxwell

Précédemment, dans le cadre de l'électromagnétisme, on a divisé l'une par l'autre les équations sources champs suivantes :

$$\mu_0 j_{xt}^y = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x}$$

$$\frac{\rho_{xy}^t}{\varepsilon_0} = \frac{\partial El_{xt}^{1/y}}{\partial x}$$

En prenant $j_{xt}^y = \rho_{xy}^t v^y$, on a eu :

$$\mu_0 \varepsilon_0 v^y = \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

Avec la condition entre les constantes $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, on a obtenu pour la vitesse d'une charge électrique :

$$v^y = c^2 \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

une relation qui ressemble à celle de la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$$

Ainsi, pour que la vitesse « classique » d'une charge électrique (c'est-à-dire une particule chargée électriquement) soit bien comparable à la vitesse de groupe d'une onde, on a utilisé d'une part une relation entre les densités de courant j_{xt}^y et de charge ρ_{xy}^t, avec $j_{xt}^y = \rho_{xy}^t v^y$, d'autre part une condition portant sur les constantes $\frac{1}{\varepsilon_0}$ et μ_0, avec $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

Pour que la vitesse « classique » d'une masse (c'est-à-dire une particule massique) soit bien égale à la vitesse de groupe d'une onde, on va maintenant chercher à avoir d'une part une relation entre les densités d'impulsion et de masse ρ_{xy}^t, d'autre part une condition portant sur les constantes G et $\hbar$.

V.1.2 Recherche d'une relation entre les densités volumiques d'impulsion $\vec{p}_{xt}^y$ et de masse ρ_{xy}^t

On a le tableau ci-dessous donnant les différentes densités d'impulsion :

	Densité linéique d'impulsion	Densité volumique d'impulsion	Densité volumique de masse	Densité volumique d'impulsion exprimée en fonction de la densité volumique de masse et de

				la vitesse
	$\vec{p}_{xt}^{y}$	$\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y}$	ρ_{xy}^{t}	$\rho_{xy}^{t}dy(\frac{d\vec{v}^{x}}{dt})_{tx}^{y}$
Unités	$\frac{Kg.m}{s^2}$	$\frac{Kg}{m.s^2}$	$\frac{Kg}{m^3}$	$\frac{Kg}{m^3}\times m\times\frac{m}{s^2}$

Afin d'avoir une cohérence au niveau des unités, on propose la relation entre la densité volumique d'impulsion, la densité volumique de masse et la vitesse d'une masse :

$$\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} = (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^{x}}{dt})_{xt}^{y} = \rho_{xy}^{t}dy(\frac{d\vec{v}^{x}}{dt})_{xt}^{y}$$

A partir des analogies suivantes :

	Electromagnétisme	Constantes	Gravitation	Constantes
<u>Ampère</u> Sources orientées dans l'Espace	$\mu_0\vec{J}_{xt}^{y} = \frac{\partial\vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$	μ_0	$\frac{1}{\hbar}\vec{p}_{xt}^{y} = -\frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$ $\frac{1}{k}\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} = -\frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$	$-\frac{1}{\hbar}$ $-\frac{1}{k}$
<u>Gauss</u> Sources orientées dans le Temps	$\frac{\vec{\rho}_{xy}^{t}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial\vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x}$	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	$-\frac{2\pi G}{c^2}\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial\vec{K}l_{xt}^{1/y}}{\partial x}$	$-\frac{2\pi G}{c^2}$
Relation entre sources orientées dans l'Espace et dans le Temps	$j_{xt}^{y} = \rho_{xy}^{t}v^{y}$		$\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} = (\frac{d\vec{\mathbf{p}}^{x}}{dt})_{xt}^{y}$ $= \rho_{xy}^{t}dy(\frac{d\vec{v}^{x}}{dt})_{xt}^{y}$	
Relation entre les constantes		$\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$		?

on souhaiterait examiner, dans le cas de la gravitation, en divisant la relation source champ gravitation de la 1ère ligne par celle de la 2ème ligne, s'il est possible de retrouver une vitesse de groupe, ainsi qu'une condition entre les constantes utilisées, notamment entre $\hbar$ et G.

Autre manière de dire, la signification physique de $\mu_0\varepsilon_0$, c'est l'inverse de la vitesse de la lumière au carré, existe-t-il une signification physique à trouver côté gravitation pour les constantes $\hbar$ et G ?

En résumé, quelle est la condition entre les constantes $\hbar$ et G, pour que la vitesse de groupe soit égale à :

$$v_g = v^x = \frac{\partial\Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$$

V.1.3 Unir les constantes $\hbar$ et G dans un même modèle ?

On va utiliser les équations sources champs suivantes qu'on va diviser l'une par l'autre :

	Equations sources champs	Unités
Ampère gravitation	$\frac{1}{k}(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^{x}}{dt})_{xt}^{y} = -\frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$ $\frac{1}{k}\rho_{xy}^{t}dy(\frac{d\vec{v}^{x}}{dt})_{xt}^{y} = -\frac{\partial\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x}$	$\frac{s}{Kg}\frac{Kg}{m.s^2} = \frac{1}{m.s}$ $\frac{s}{Kg}\frac{m}{m^3}\frac{Kg}{s^2}\frac{m}{s^2} = \frac{1}{m.s}$

Gauss gravitation	$-\frac{2\pi G}{c^2}\vec{\rho}_{xy}^{t} = \frac{\partial \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x}$	$\frac{m^3}{Kg.s^2}\frac{Kg}{m^3} = \frac{1}{s^2}$

On veut :

$$v_g = \frac{\partial \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \vec{K}_{xt}^{1/y}} = \frac{1}{k}\rho_{xy}^{t} dy(\frac{d\vec{v}^x}{dt})_{xt}^{y} \times \frac{c^2}{2\pi G \rho_{xy}^{t}}?$$

$$v_g = \frac{1}{k} \times \frac{dydv^x}{dct} \times \frac{c^3}{2\pi G}?$$

Avec $\hbar = k \times dxdct$, on veut :

$$v_g = \frac{dxdct}{\hbar} \times \frac{dydv^x}{dct} \times \frac{c^3}{2\pi G}?$$

$$v_g = \frac{dxdy}{\hbar} \times \frac{c^3}{2\pi G} dv^x?$$

Pour que la vitesse de groupe v_g d'une onde soit égale à la vitesse « classique » dv^x d'une particule massique, il faut :

$$\frac{dxdy}{\hbar} \times \frac{c^3}{2\pi G} = 1?$$

Nota sur les infinitésimaux introduits

Dans le terme densité volumique d'impulsion $\vec{\mathbf{p}}_{xt}^{y} = \rho_{xy}^{t} dy(\frac{d\vec{v}^x}{dt})_{tx}^{y}$, on introduit les 2 infinitésimaux : dy et $d\vec{v}^x$. On se retrouve alors à la fin des calculs avec un infinitésimal de trop : dv^x, alors qu'on souhaiterait seulement v^x.

A voir s'il ne faut pas plutôt introduire un terme du type $\rho_{xy}^{t}\frac{dyv^x}{dt}$, avec si v^x est constant en fonction du Temps, l'obtention de : $\rho_{xy}^{t} v^x \frac{dy}{dt}$ et donc du terme désiré ?

Dans le cas d'une symétrie de l'Espace, on pose $dx = dy$. Il faut donc :

$$(dx)^2 = \frac{2\pi G\hbar}{c^3}$$

$m^2 = \frac{m^3}{Kg.s^2}.\frac{Kg.m^2}{s}.\frac{s^3}{m^3}$	**Unités**

Si on corrige, et qu'on prend comme longueurs élémentaires : $dy = 2\pi dx$ (cela peut sembler plus pertinent, car on a plutôt une symétrie cylindrique sur x, y, t), on obtient :

$$2\pi(dx)^2 = \frac{2\pi G\hbar}{c^3}$$

On retrouve la longueur de Planck :

$$dx = l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

En **conclusion**, pour que la vitesse « classique » dv^x d'une particule massique soit bien égale à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$ d'une onde, on a la condition entre les constantes $\hbar$ et G, sur la longueur infinitésimale :

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{G\hbar}{c{l_p}^2}}}$$

<u>Recherche d'une relation entre $\hbar$ et k</u>

On avait posé dans le précédent chapitre :

$$\hbar = dxdct \times k$$

Dans le cas d'une symétrie entre dct et dy, on a :

$$\hbar = dxdy \times k$$

$$\hbar = 2\pi(dx)^2 \times k$$

On obtient la relation :

$$\hbar = 2\pi{l_p}^2 \times k$$

Nota sur la direction de la vitesse de groupe

On trouve une vitesse de groupe pour une masse orientée suivant x (au lieu de y pour une charge électrique). Le cas de la masse est à priori plus satisfaisant, car perpendiculaire à la fois à $\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$ et à $\vec{K}_{xt}^{1/y}$. A voir où est l'erreur au niveau de v^y pour le courant électrique ? On a en effet :

$$v_g = v^x = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$$

$$v^y = c^2 \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

Ainsi, au lieu de poser :

$$j_{xt}^y = \rho_{xy}^t v^y$$

Ne faudrait-il pas plutôt poser :

$$\vec{j}_{xt}^y = \vec{\rho}_{xy}^t \wedge \vec{v}^x \,?$$

On aurait alors pour la vitesse de groupe :

$$v^x = c^2 \frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$$

V.1.4 Justification à l'expression du vecteur d'onde

Dans le mémoire 2, suivant une analogie avec le champ pulsation, on a posé pour le champ vecteur d'onde (dans le vide) :

$$2c^2 K_{xt}^{1/y} = \frac{\partial V^t}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial t}$$

$$2c^2 K_{xt}^{1/y} = Gr_{xt}^{1/y} - \frac{\partial V^x}{\partial t}$$

La constante c^2 a été introduite par soucis d'homogénéité, et sans véritable justification.

Le fait de proposer des équations sources champs de la gravitation faisant intervenir les champs pulsation et vecteur d'onde, puis de retrouver à partir de ces équations sources champs, l'expression de la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \Omega_{xy}^{1/t}}{\partial K_{xt}^{1/y}}$ apporte une justification à l'expression $2c^2 K_{xt}^{1/y} = \frac{\partial V^t}{\partial x} - \frac{\partial V^x}{\partial t}$ et à l'introduction de c^2.

On pourra d'ailleurs voir cette vitesse de groupe comme la clé de voûte et la justification attendue pour un certain nombre d'hypothèses faites dans les mémoires 1, 2, 3.

V.1.5 Masse de Planck et charge électrique de Planck

A partir de la plus petite longueur d'onde $\lambda_p = 2\pi l_p$ $(dy = 2\pi dx)$, construite comme le périmètre d'un cercle de rayon $dx = l_p$:

$$\lambda_p = 2\pi \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

et de la relation de la longueur d'onde de Compton :

$$m_p c = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_p}$$

on obtient la masse de Planck :

$$m_p c = \hbar \sqrt{\frac{c^3}{G\hbar}}$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

On introduit aussi fréquemment la durée de Planck construite à partir de $t_p = \frac{l_p}{c}$:

$$t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$$

On obtient ainsi des bornes minimales pour la longueur, la masse, la durée…, des notions proches, mais tout de même différentes de la quantification d'une grandeur physique, qui prendrait alors une série discrète de valeurs.
On touche du doigt à la gravitation quantique et à un quantum de l'interaction gravitationnelle, mais y est-on vraiment ? On reviendra sur cette délicate question à la fin du 5ème mémoire.

On peut également retrouver l_p et m_p en égalisant énergie massique E_0 et énergie potentielle E_p, puis en utilisant la longueur d'onde de Compton. Par analogie entre la gravitation et l'électrostatique, on obtient une charge électrique de Planck en substituant l'énergie potentielle gravitationnelle par l'énergie électrostatique (ou en substituant directement sur le terme $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ la constante G par la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). Le tableau ci-dessous récapitule les 2 démarches pour la gravitation et l'électrostatique.

	Gravitation	Electrostatique
Constante	G	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Longueur d'onde de Compton	$m_p = \frac{\hbar}{cl_p}$	$m_p = \frac{\hbar}{cl_p}$
Energie potentielle entre 2 masses ou 2 charges de Planck	$E_p = \frac{Gm_p{}^2}{l_p}$	$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_p)^2}{l_p}$
Energie massique	$E_0 = m_p c^2$	$E_0 = m_p c^2$
	$E_0 = E_p$ $m_p c^2 = \frac{Gm_p{}^2}{l_p}$ En utilisant la longueur d'onde de Compton : $\frac{\hbar}{cl_p}c^2 = \frac{Gm_p{}^2}{l_p}$ On obtient :	$E_0 = E_p$ $m_p c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_p)^2}{l_p}$ En utilisant la longueur d'onde de Compton : $\frac{\hbar}{cl_p}c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_p)^2}{l_p}$ On obtient :
Masse ou charge de Planck	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$

Nota sur l'entropie *S* d'un trou noir
Pour mémoire, on rappelle la relation de Bekenstein-Hawking, proposée dans les années 1970 par Stephen Hawking et Jacob Bekenstein, donnant l'entropie *S* d'un trou noir en fonction de sa surface *A* et de la longueur de Planck l_p :

$$S = k_B\frac{A}{4l_p{}^2} = k_B lnW$$

avec k_B la constante de Boltzmann,
et $W = exp(\frac{A}{4l_p{}^2})$ le nombre de configurations.
On y reviendra plus largement dans le 6ème mémoire.

V.2 Unir les constantes $\hbar$ et ε_0 dans un même modèle ?

V.2.1 Rappels sur la constante de structure fine α et son interprétation à partir de la charge de Planck

Historiquement, la constante de structure fine α a été introduite par A. Sommerfeld en 1916 dans un modèle relativiste décriant l'électron et inspiré du modèle non relativiste de l'atome de Bohr. La constante α a d'abord été interprétée comme le rapport entre la vitesse de l'électron dans le modèle de Bohr et la vitesse de la lumière dans le vide.
La constante α a été baptisée ainsi, en référence à la structure fine, qui décrit les dédoublements des raies spectrales d'une particule, et dont le modèle relativiste de Sommerfeld proposait une première explication. Par la suite, le modèle du spin a permis de mieux comprendre ces dédoublements.

On rappelle ici cette constante :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

La constante α étant sans dimension, son existence même implique l'existence d'un mécanisme sous-jacent fixant sa valeur. On va suggérer dans le prochain paragraphe une piste à ce mécanisme.

La constante α peut également s'interpréter comme le carré du rapport entre la charge élémentaire et la charge de Planck :

$$\alpha = \frac{e^2}{{q_p}^2}$$

Soulignons que le modèle de l'atome de Bohr, la constante α, la charge de Planck et de nombreuses autres notions physiques incluent à la fois les constantes ε_0 et $\hbar$. La première constante ε_0 est présente dans l'équation source champ Gauss électromagnétisme, la deuxième $\hbar$ constante est présente dans Ampère gravitation. On va donc chercher un modèle qui unit ces 2 équations sources champs et ainsi ces 2 constantes ε_0 et $\hbar$.

V.2.2 Unir les constantes $\hbar$ et ε_0 dans un même modèle ?

Précédemment, on a d'abord divisé Ampère électromagnétisme par Gauss électromagnétisme, puis Ampère gravitation par Gauss gravitation pour obtenir des vitesses de groupe ou similaires. Voyons maintenant ce qu'il advient si on divise Ampère gravitation par Gauss électromagnétisme, c'est-à-dire si on « mixte » gravitation et électricité.

On utilise les équations sources champs suivantes qu'on divise l'une par l'autre :

	Equations sources champs	Unités
Ampère Gravitation	$\frac{1}{k}(\frac{d\vec{\mathbf{p}}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$ $\frac{1}{k}\rho^t_{xy}dy(\frac{d\vec{v}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$	$\frac{s}{Kg}\frac{Kg}{m.s^2} = \frac{1}{m.s}$ $\frac{s}{Kg}\frac{m}{m^3}\frac{Kg}{}\frac{m}{s^2} = \frac{1}{m.s}$
Gauss Electromagnétisme	$\frac{\vec{\rho}^t_{exy}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial\vec{E}l^{1/y}_{xt}}{\partial x}$	

Avec $\vec{\rho}^t_{exy}$, la densité de charge électrique, à distinguer de la densité de masse.

Par analogie avec $v^y = \frac{c^2\partial B^{1/t}_{xy}}{\partial E^{\ 1/y}_{\ xt}}$, on introduit dans le rapport souhaité le terme c^2. On a (au signe – près) :

$$\frac{\partial 2\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} \times \frac{c^2\partial x}{\partial\vec{E}l^{1/y}_{xt}} = \frac{2}{k}\rho^t_{xy}dy(\frac{d\vec{v}^x}{dt})^y_{xt} \times \frac{\varepsilon_0 c^2}{\rho^t_{exy}}$$

Avec $\hbar = k \times dxdct$, on a :

$$\frac{c^2\partial 2\Omega^{1/t}_{xy}}{\partial El^{1/y}_{xt}} = \frac{dxdct}{\hbar} \times \frac{dydv^x}{dct} \times 2\varepsilon_0 c^3 \times \frac{\rho^t_{xy}}{\rho^t_{exy}}$$

Avec : $dy = 2\pi dx$, on a :

$$\frac{c^2\partial 2\Omega^{1/t}_{xy}}{\partial El^{1/y}_{xt}} = dx^2 \times \frac{4\pi\varepsilon_0 c^3}{\hbar} \times \frac{\rho^t_{xy}}{\rho^t_{exy}} \times dv^x$$

On met de côté le rapport des densités de charge $\frac{\rho^t_{xy}}{\rho^t_{exy}}$ et on propose la condition pour avoir une vitesse de groupe du type $\frac{c^2\partial 2\Omega^{1/t}_{xy}}{\partial E^{\ 1/y}_{\ xt}}$:

$$dx^2 \times \frac{4\pi\varepsilon_0 c^3}{\hbar} = 1$$

On obtient la condition sur une quantité infinitésimale (non exactement homogène à une distance, à cause du terme $\frac{\rho_{xy}^{t}}{\rho_{exy}^{t}}$ mis de côté) :

$$le_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

On donne les analogies dans le tableau suivant :

	Gauss gravitation **Ampère gravitation**	**Gauss électrostatique** **Ampère gravitation**
Constante utilisée dans Gauss	$-G$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
Constante utilisée dans Ampère	$-\hbar$	$-\hbar$
Conditions sur les quantités infinitésimales	$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	$le_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$
Longueur d'onde de Compton	$m_p = \frac{\hbar}{cl_p}$	$m_p = \frac{\hbar}{cl_p}$
Energie potentielle entre 2 masses ou 2 charges de Planck	$E_p = \frac{Gm_p{}^2}{l_p}$	$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_p)^2}{l_p}$ On prend l_p et non le_p, car on va égaliser E_p avec E_0
Energie massique	$E_0 = m_p c^2$	$E_0 = m_p c^2$
	$E_0 = E_p$ $m_p c^2 = \frac{Gm_p{}^2}{l_p}$ En utilisant la longueur d'onde de Compton : $\frac{\hbar}{cl_p}c^2 = \frac{Gm_p{}^2}{l_p}$ On obtient :	$E_0 = E_p$ $m_p c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_p)^2}{l_p}$ En utilisant la longueur d'onde de Compton : $\frac{\hbar}{cl_p}c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_p)^2}{l_p}$ On obtient :
Masse de Planck ou charge de Planck	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$
	$\frac{Gm_p{}^2}{l_p} = m_p c^2$	$\frac{q_p{}^2}{4\pi\varepsilon_0 le_p} = q_p c^2$
Masse de Planck ou charge de Planck à partir des longueurs de Planck	$m_p = \frac{c^2 l_p}{G}$	$q_p = 4\pi\varepsilon_0 c^2 le_p$
		Si on pose $le_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$, on retrouve bien : $q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$

Dans le cas de l'atome de Bohr, on a pour un électron de masse m_e et de vitesse v_e, sur l'orbite de Bohr de rayon r_B :

$$m_e {v_e}^2 = m_e(\alpha c)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_B}$$

Suivant les idées de Broglie :

$$m_e v_e = \frac{\hbar}{r_B}$$

$$\frac{\hbar}{r_B}\alpha c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_B}$$

On obtient :

$$e = \sqrt{\alpha 4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

Or pour obtenir une vitesse de groupe du type $\frac{c^2\partial 2\Omega_{xy}^{1/t}}{\partial El_{xt}^{1/y}}$, on doit vérifier la condition :

$$le_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

Par analogie entre la gravitation et l'électrostatique, on définit la charge de Planck q_p en fonction de le_p :

$$q_p = 4\pi\varepsilon_0 c^2 le_p$$

En remplaçant par $le_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$, on a la condition à respecter sur q_p, pour obtenir la vitesse de groupe :

$$q_p = 4\pi\varepsilon_0 c^2 \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$$

$$q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

On définit la constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{{q_p}^2}$$

On a donc la condition à respecter sur la constante de structure fine, pour obtenir la vitesse de groupe $\frac{c^2\partial 2\Omega_{xy}^{1/t}}{\partial E\ {}_{xt}^{1/y}}$:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

V.2.3 Modèles planétaires

Pour terminer ce « mixte » gravitation et électricité, on propose le tableau ci-dessous qui souligne les analogies entre le modèle planétaire de Kepler-Newton et celui de Bohr. Les différences s'expliquent dans le cas du modèle de Bohr par un « croisement » des équations sources champs gravitation et électromagnétisme.

	Modèle planétaire de Kepler-	**Modèle planétaire de l'électron de**

	Newton **La planète est « stabilisée » par la force gravitationnelle générée par le Soleil et par la force d'inertie centrifuge**	**Bohr** **L'électron est « stabilisé » par la force électrostatique générée par le proton et par la force d'inertie centrifuge**
Equations sources champs de type Ampère	$-\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$	$-\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$
Constantes	$-\hbar$	$-\hbar$
Equations sources champs de type Gauss	$-4\pi G\vec{\rho}^t_{xy} = \frac{\partial 2c^2\vec{K}^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial 2c^2\vec{K}^{1/x}_{yt}}{\partial y}$	$\frac{\vec{\rho}^t_{exy}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}l^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}l^{1/x}_{yt}}{\partial y}$
Constantes	$-G$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
Condition sur une quantité infinitésimale pour l'obtention d'une vitesse de groupe	$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	$le_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}$
Masse et charge électrique infinitésimales	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ $m_p = \frac{c^2 l_p}{G}$	$q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$ $q_p = 4\pi\varepsilon_0 c^2 le_p$
Echelle d'étude	Système planétaire	Atome

Soulignons que le modèle planétaire de l'électron de Bohr ne fait pas intervenir le magnétisme et la constante μ_0, d'où son aspect parfois un peu « démodé ».

V.3 Unir les constantes μ_0 et G dans un même modèle ?

Dans le paragraphe précèdent, on a cherché un modèle incluant les constantes ε_0 et $\hbar$ à partir des équations sources champs de l'électromagnétisme et de la gravitation. On note que toujours à partir de ces équations sources champs, il est également possible de « mixer » les constantes μ_0 et G.
Néanmoins, contrairement à ε_0 et $\hbar$, il n'existe à priori aucune notion physique connue qui inclut à la fois μ_0 et G, c'est-à-dire le magnétisme et la gravitation.
Voyons toutefois ce qu'il advient si on divise Ampère électromagnétisme par Gauss gravitation.

	Equations sources champs	**Unités**
Ampère électromagnétisme	$\mu_0\vec{J}^y_{xt} = \frac{\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$ $\vec{J}^y_{xt} = \rho^t_{exy}\vec{v}^y_{xt}$ $\mu_0\rho^t_{exy}\vec{v}^y_{xt} = \frac{\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$	
Gauss gravitation	$-\frac{4\pi G}{c^2}\vec{\rho}^t_{xy} = \frac{\partial 2\vec{K}^{1/y}_{xt}}{\partial x}$	$\frac{m^3}{Kg.s^2}\frac{Kg}{m^3} = \frac{1}{s^2}$

On a (au signe – près) :

$$\frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial 2K_{xt}^{1/y}} = \mu_0 \rho_{exy}^t v_{xt}^y \times \frac{c^2}{4\pi G \rho_{xy}^t}$$

$$\frac{\partial B_{xy}^{1/t}}{\partial 2K_{xt}^{1/y}} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi G} \times \frac{\rho_{exy}^t}{\rho_{xy}^t} v_{xt}^y$$

Si on met de côté $\frac{\rho_{exy}^t}{\rho_{xy}^t}$, on a la condition pour l'obtention d'une vitesse de groupe :

$$\frac{\mu_0 c^2}{4\pi G} = 1$$

On obtient donc une condition qui ne peut être vérifiée. A expliquer pourquoi, on ne peut « mixer » ici la gravitation et le magnétisme ?

V.4 Conclusion du chapitre

Comme espéré au début de ce mémoire, afin de retrouver une vitesse « classique » d'une particule massique égale à une vitesse de groupe d'une onde, par division de l'équation source champ d'Ampère gravitation par celle de Gauss gravitation, on obtient une condition entre $\hbar$ et G, une condition donnant une longueur infinitésimale identique à la longueur de Planck.
De même, on obtient une condition entre $\hbar$ et ε_0. Par contre, il n'a pas été possible d'obtenir de condition entre μ_0 et G.

Grâce à la condition entre $\hbar$ et G, physique quantique et gravitation newtonienne sont unifiées dans un même modèle. Pour cela, on a fait l'hypothèse, dans le précédent mémoire, que le champ gravitationnel $\vec{Gr}$ est un constituant du champ vecteur d'onde $\vec{K}$ (l'autre constituant étant l'accélération annulée par changement de référentiels). Cette hypothèse se trouve confortée par l'obtention de la vitesse de groupe.

Dans ce chapitre et le précédent, il a beaucoup été question des équations sources champs. Néanmoins, on a peu débattu des raisons profondes à ces relations entre sources et champs. Pourquoi et comment une source localisée dans l'Espace-Temps peut générer un champ étendu à l'Espace-Temps ? C'est à ces questions que nous allons nous intéresser dans le prochain chapitre.

Chapitre VI Peut-on comprendre intuitivement le théorème d'Ampère ? Etude de 2 pistes

Objet du chapitre
On examine 2 pistes pour comprendre intuitivement ce qui peut relier une source locale à la dérivée d'un champ qui s'étend à l'Espace-Temps.

VI.1 Ce qui est démontré et ce qui ne l'est pas

Dans le chapitre précédent, on a proposé des équations sources champs pour la gravitation en analogie avec celles de l'électromagnétisme. Cependant, pour toutes ces équations sources champs, il n'existe à priori aucune démonstration.

En effet, en analyse vectorielle, ce que l'on démontre à partir du théorème de Stockes, c'est le lien entre un vecteur le long d'un contour fermé et le flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface S (c'est-à-dire le passage d'une à deux dimensions) :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S rot\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Par contre, ce qui est non démontré, c'est le lien entre un champ généralement étendu dans l'Espace-Temps et une source généralement localisée dans l'Espace-Temps.
Ainsi, pourquoi $\mu_0\vec{j} = rot\vec{B}$? relation locale qui permet d'obtenir le théorème de Ampère sous forme intégrale :

$$\mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S rot\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On ne fera pas ici de démonstration mathématique de $\mu_0\vec{j} = rot\vec{B}$. On proposera simplement deux pistes qui pourraient conduire vers une meilleure compréhension des différentes équations sources champs et du théorème d'Ampère.

Nota 1
Il existe une démonstration du théorème d'Ampère à partir de la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

, mais il faut alors démontrer cette loi.

Nota 2
On a le même souci de démonstration avec l'équation source champ Maxwell Gauss :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\vec{E}l$$

, appelée aussi théorème de Gauss. Comme on traite ici identiquement Maxwell Gauss, Maxwell Ampère et les équations sources champs de l'électromagnétisme et de la gravitation, démontrer l'une de ces équations revient à démontrer les autres.

VI.2 Première piste : 2 analogies entre mécanique des fluides et magnétisme

On rappelle la **première analogie** entre mécanique des fluides et magnétisme, analogie principalement utilisée dans cet essai :

	Mécanique des fluides	Magnétisme

Champ	$2\vec{\Omega}$	$\vec{B}$
Potentiel vecteur	$\vec{V}$	$\vec{A}$
Condition de conservation sur le champ	$div\vec{\Omega} = 0$	$div\vec{B} = 0$
Relation champ potentiel	$2\vec{\Omega} = r\vec{o}t\vec{V}$	$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$

On a également évoqué une **deuxième analogie** entre mécanique des fluides et magnétostatique, analogie que propose H. Poincaré dans l'un de ses cours. Par rapport à la première analogie, le vecteur rotation (ou vecteur tourbillon) $\vec{\omega}$ correspond à la densité de courant $\mu_0\vec{j}$, le champ magnétique $\vec{B}$ correspond au champ de vitesses $\vec{V}$.

On a le tableau suivant :

	Mécanique des fluides (rotationnel, permanent, incompressible)	**Magnétostatique**
Source	$\vec{\omega}(M)$ Vecteur tourbillon	$\vec{j}(M)$ Densité de courant
Constante	2	μ_0
Champ	$\vec{V}(M)$	$\vec{B}(M)$
Potentiel vecteur	$\vec{A}$	$\vec{A}$
Condition de conservation sur le champ	$div\vec{V} = 0$	$div\vec{B} = 0$
Relation champ potentiel	$\vec{V} = r\vec{o}t\vec{A}$	$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$
Condition de conservation sur la source	div$\vec{\omega}$=0	$div\mu_0\vec{j} = 0$
Relation source champ	$2\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{V}$	$\mu_0\vec{j} = rot\vec{B}$
Relation source potentiel	$\Delta\vec{A} + 2\vec{\omega} = 0$	$\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = 0$
Théorème d'Ampère	$\iint_S 2\vec{\omega}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{V}(M) \cdot d\vec{l}$	$\iint_S \mu_0\vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}$

Nota 1
Soulignons que $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont deux notations distinctes pour un même vecteur rotation.
On propose ici d'utiliser :
- $\vec{\omega}$ quand le vecteur rotation est interprété comme une source ou une rotation d'un corps sur lui-même (rotation de spin), tous deux localisées dans l'Espace (même si comme on le verra, la source et le corps tournant sur lui-même n'ont pas les mêmes limites dans l'Espace),
- $\vec{\Omega}$ quand le vecteur rotation est interprété comme un champ ou une rotation orbitale, tous deux étendus dans l'Espace.

On y reviendra dans le prochain paragraphe, lors de l'étude de la deuxième piste.

Nota 2
Observons qu'en mécanique des fluides, le vecteur $\vec{\Omega}$ (ou $\vec{\omega}$) n'est pas généralement orienté suivant le Temps, mais suivant une dimension de l'Espace. On le note donc $\vec{\omega}$ et non $\vec{\omega}^t$.

Dans le cas d'une source $\vec{\omega}$ uniforme, on a le champ de vitesses :

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{O}M = \vec{\Omega} \wedge \vec{O}M$$

$$2\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{V} = r\vec{o}t(\vec{\omega} \wedge \vec{O}M)$$

Dans le cas d'un source $\mu_0\vec{j}$ uniforme, on a le champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\vec{j} \wedge \vec{O}M$$

$$\mu_0\vec{j} = r\vec{o}t\vec{B} = \frac{1}{2}r\vec{o}t(\mu_0\vec{j} \wedge \vec{O}M)$$

On note que $\vec{B}$ prend la forme d'un moment magnétique.

La comparaison des deux analogies est intéressante. Dans la première, le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ joue le rôle d'un champ. Dans la deuxième, le vecteur rotation $\vec{\omega}$ joue le rôle d'une source. On a ainsi une même grandeur physique qui joue alternativement le rôle d'un champ ou d'une source, d'où un passage envisageable de l'un à l'autre.
Il en est de même pour $\vec{B}$, qui peut s'analyser comme la source du champ $\vec{A}$.

On récapitule les 2 analogies dans le tableau suivant :

	Mécanique des fluides (rotationnel, permanent, incompressible)	**Magnétostatique (avec en particulier des courants de déplacement nuls)**	**Magnétisme**
Source	$\vec{\omega}(M)$	$\vec{j}(M)$	$\vec{B}(M)$
Constante	2	μ_0	1
Champ	$\vec{V}(M)$	$\vec{B}(M)$	$\vec{A}(M)$
Condition de conservation sur la source	$div 2\vec{\omega}$=0	div$\mu_0\vec{j}$=0	div$\vec{B}$=0
Relation source champ	$2\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{V}$	$\mu_0\vec{j} = rot\vec{B}$	$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$
	Si la source $\vec{\omega}$ est uniforme dans un volume *Vol* de l'Espace, le champ $\vec{V}$ se calcule dans ce volume *Vol* : $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{O}M$	Si la source $\mu_0\vec{j}$ est uniforme dans un volume *Vol* de l'Espace, le champ $\vec{B}$ se calcule dans ce volume *Vol* : $\vec{B} = \frac{1}{2}(\mu_0\vec{j} \wedge \vec{O}M)$	Si $\vec{B}$ est uniforme dans un volume *Vol* de l'Espace, $\vec{A}$ se calcule dans ce volume *Vol* : $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \wedge \vec{O}M)$
Théorème d'Ampère	$\iint_S 2\vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{l}$	$\iint_S \mu_0\vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l}$	$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$
Loi de Biot et Savart	Si la source $\vec{\omega}$ est localisée dans *Vol* un	Si la source $\mu_0\vec{j}$ est localisée dans *Vol* un	Si $\vec{B}$ est localisée dans *Vol* un volume fini de

	volume fini de l'Espace, le champ $\vec{V}$ se calcule en tout point de l'Espace suivant l'analogue de la loi de Biot et Savart : $\vec{V}(OM) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{Vol}\frac{\vec{\omega}d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$	volume fini de l'Espace, le champ $\vec{B}$ se calcule en tout point de l'Espace suivant la loi de Biot et Savart : $\vec{B}(OM) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{Vol}\frac{\vec{J}d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$	l'Espace, $\vec{A}$ se calcule en tout point de l'Espace suivant l'analogue de la loi de Biot et Savart : $\vec{A}(OM) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{Vol}\frac{\vec{B}d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$

En régime variable, on peut tenter l'analogie suivante :

	Mécanique des fluides	Electromagnétisme
Relation source champ		$\mu_0\vec{J} = r\vec{o}t\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l}{\partial t}$
Relation source champ	$2(\vec{\omega}+\vec{\omega}_D) = rot\vec{V}$	$\mu_0(\vec{J}+\vec{J}_D) = rot\vec{B}$
		$\vec{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}l}{\partial t}$
Condition de conservation sur la source	$div\vec{\omega} + \frac{\partial\omega^t}{\partial t} = 0$	$div\vec{J} + \frac{\partial q^t}{\partial t} = 0$

A voir alors les significations physiques de $\vec{\omega}_D$ et ω^t ?

VI.3 Deuxième piste : changement de points de vue, étude de deux corps de type Terre Soleil

La deuxième piste repend le vieux truc d'A. Einstein : voir si on peut expliquer deux phénomènes d'apparence différente mais en réalité égaux (voire identiques), par des points d'observation différents.

Nota, recherche de relations entre quelque chose de localisé dans l'Espace et quelque chose d'étendu
Les relations source champ d'Ampère et de Gauss mettent en relation une source localisée dans l'Espace et un champ étendu dans l'Espace. La piste suivie ici est donc de chercher des phénomènes qui mettent en relation quelque chose de localisé dans l'Espace avec quelque chose d'étendu.

On cite ici pour mémoire deux phénomènes :
- Le premier est une rotation orbitale qui est étendue dans l'Espace et une rotation de spin (rotation sur soi-même) qui est localisée. L'une et l'autre peuvent être mises en relation par un changement de référentiels (c'est ce phénomène qui est examiné dans cette deuxième piste).
- Le deuxième est la dualité onde corpuscule, avec une onde qui est étendue dans l'Espace et un corpuscule qui est localisé.

VI.3.1 Système Terre Soleil

Soit un système à deux corps par exemple la Terre et le Soleil.

Soit R^{Soleil} le référentiel solaire
Dans R^{Soleil}, le Soleil est immobile et la Terre possède en première approximation, deux mouvements :
- un mouvement de rotation orbital de vitesse angulaire $[\Omega_{Terre}]_{R^{Soleil}}$.
  On a :

$$[\Omega_{Terre}]_{R^{Soleil}} = \frac{2\pi}{T_{Terre}}$$

avec $T_{Terre} \approx 365 jours$ à convertir en secondes pour exprimer la vitesse angulaire en $rad \times s^{-1}$.

- un mouvement de rotation sur elle-même (rotation de spin) de vitesse angulaire $[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}}$.
  On a :
$$[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}} = \frac{2\pi}{t_{Terre}}$$
  avec $t_{Terre} \approx 24 heures.$

Soit R^{Terre} le référentiel terrestre

Dans R^{Terre}, la Terre est immobile et le Soleil possède en première approximation, deux mouvements :

- un mouvement de rotation orbital de vitesse angulaire $[\Omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$.
  On a :
$$[\Omega_{Soleil}]_{R^{Terre}} = \frac{2\pi}{T_{Soleil}}$$
  avec $T_{Soleil} \approx 24 heures.$

- un mouvement de rotation sur lui-même (de spin) de vitesse angulaire $[\omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$.
  On a :
$$[\omega_{Soleil}]_{R^{terre}} = \frac{2\pi}{t_{Soleil}}$$
  avec $t_{Soleil} \approx 365 jours.$

La figure suivante illustre :

- lorsque dans R^{Soleil}, la Terre tourne en orbite dans un sens,
- lorsque dans R^{Terre}, le Soleil tourne sur lui-même dans l'autre sens.

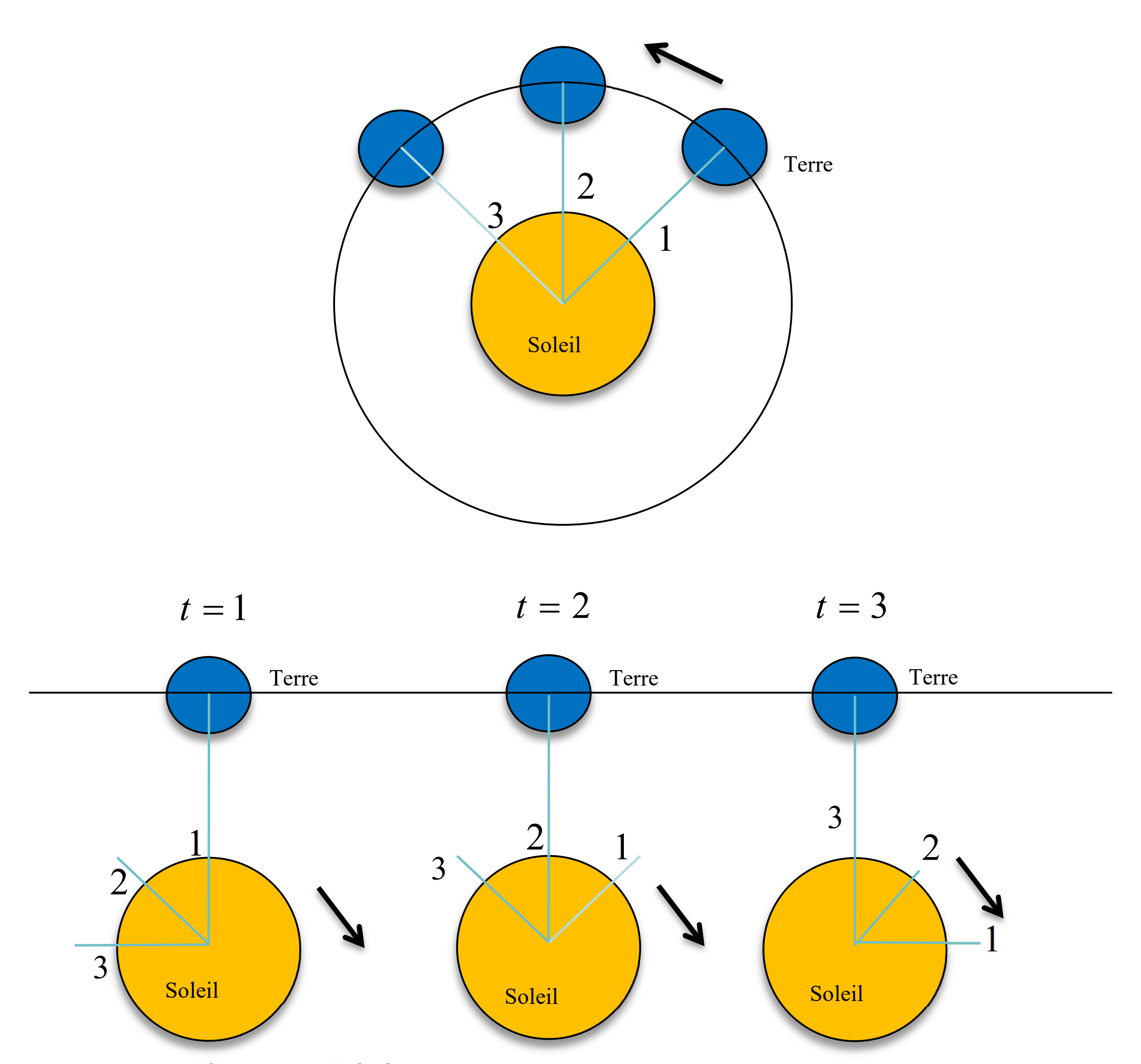


Figure 14 : système Terre Soleil

Dans un système à deux corps Terre Soleil, on a donc les relations :

$$[\Omega_{Terre}]_{R^{Soleil}} = -[\omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$$

$$[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}} = -[\Omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$$

Pour passer de R^{Soleil} à R^{Terre}, il faut annuler les mouvements de la Terre : $[\Omega_{Terre}]_{R^{Soleil}}$ et $[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}}$. Ainsi, on obtient une référence qui est immobile.

On a le changement de référentiels :

$$R^{Terre} = R^{Soleil+\omega_{Terre}+\Omega_{Terre}}$$

avec ω_{Terre} et Ω_{Terre} les mouvements annulés lors du passage de R^{Soleil} à R^{Terre}

Avec $[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}} = -[\Omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$, on obtient :

$$R^{Terre} = R^{Soleil-\Omega_{Soleil}+\Omega_{Terre}}$$

$$R^{Terre}{}_{Soleil} = R^{Soleil+\Omega_{Terre}}$$

On constate que cela fonctionne aussi bien pour la Terre que pour le Soleil. Ce qui est souhaitable puisqu'il n'y a aucune raison de favoriser un astre plus qu'un autre.

On note que la relation $[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}} = -[\Omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$ peut rappeler une relation source champ, avec $[\omega_{Terre}]_{R^{Soleil}}$ la rotation sur elle-même qui jouerait quelque chose de local et $[\Omega_{Soleil}]_{R^{Terre}}$ la rotation orbitale quelque chose d'étendu.

VI.3.2 Combinaison des 2 pistes

Si on combine cette deuxième piste, changement de points de vue, avec le tableau d'analogies entre Mécanique des fluides et Magnétostatique proposé dans la première piste, on obtient :

	Mécanique des fluides	**Magnétostatique**
Source	$\vec{\omega}(M)$	$\vec{J}(M)$
Constante	2	μ_0
Champ	$\vec{V}(M)$	$\vec{B}(M)$
Condition de conservation sur la source	$div 2\vec{\omega}$=0	div$\mu_0\vec{J}$=0
Relation source champ	$2\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{V}$	$\mu_0\vec{J} = rot\vec{B}$
Théorème d'Ampère	$\iint_S 2\vec{\omega}\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{V}\cdot d\vec{l}$	$\iint_S \mu_0\vec{J}\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l}$

- avec $-\vec{\omega}(M)$ la rotation de spin du corps étudié (localisé en O), mesurée par les autres corps (localisés en M), c'est-à-dire dans le référentiel de ces autres corps.
- et avec $\vec{V}(M)$ la vitesse des autres corps à la distance OM, dans le référentiel du corps étudié (localisé en O).

VI.4 Analogies entre le théorème de Gauss et des systèmes Terre Soleil ou Terre Etoiles

VI.4.1 Comprendre intuitivement le passage du local à l'étendu

On cherche toujours à comprendre de manière intuitive le théorème d'Ampère, et celui qu'on propose comme son analogue (avec permutation des instants et positions), le théorème de Gauss.
On poursuit toujours la piste d'une relation entre une source (localisée) et un champ (étendu), correspondant à un changement de points de vue entre une rotation de spin (localisée) et une rotation orbitale (étendue).
On va maintenant s'intéresser à une comparaison qualitative entre le théorème de Gauss et des systèmes Terre Soleil ou Terre Etoile.

VI.4.2 Etude de sources à symétrie sphérique ou cylindrique

Symétrie sphérique (3 dimensions)

Soit le cas d'une source finie, à symétrie sphérique de rayon R dans l'Espace, de densité volumique ρ^t (de charge électrique ou de masse) uniformément répartie (par exemple une planète de densité volumique de masse uniformément répartie).

En appliquant le théorème de Gauss, on a :

- d'abord un champ (électrostatique $Es(r)$ ou gravitationnel $Gr(r)$), à l'intérieur de la source (électrique ou massique) $r \leq R$, qui augmente en $\frac{K\rho^t}{3} \times r$ avec K la constante fonction de la nature du champ,
- puis un champ à l'extérieur de la source $r \geq R$, qui décroit en $\frac{K\rho^t R^3}{3} \times \frac{1}{r^2}$. On a également un flux constant du champ à travers des surfaces sphériques de $4\pi r^2$, et une limite nulle du champ à l'infini.

Symétrie cylindrique (2 dimensions +1)
Soit le cas d'une source à symétrie cylindrique de rayon R et de hauteur infinie $h \to +\infty$ (en quelque sorte, le passage du cas précédent de 3 à 2 dimensions), de même densité volumique ρ^t (de charge électrique ou de masse) uniformément répartie.

En appliquant le théorème de Gauss, on a :
- d'abord un champ (électrostatique $Es(r)$ ou gravitationnel $Gr(r)$), à l'intérieur de la source (électrique ou massique) $r \leq R$, qui augmente en $\frac{K\rho^t}{2} \times r$,
- puis un champ à l'extérieur de la source $r \geq R$, qui décroit en $\frac{K\rho^t R^2}{2} \times \frac{1}{r}$. On a également un flux constant du champ à travers des surfaces cylindrique de $2\pi r \times h$, et une limite nulle du champ à l'infini.

On récapitule dans le tableau suivant ces 2 cas, ainsi que les relations et analogies pouvant être utilisées dans les prochaines pages :

	Mécanique des fluides (rotationnel, permanent, incompressible)	**Magnétostatique**	**Electrostatique**	**Gravitation**
Source	$\vec{\omega}^{x,y,z}(M)$ Vecteur tourbillon	$\vec{J}^{x,y,z}(M)$ Densité volumique de courant	$\rho^t(M)$ Densité volumique de charge électrique	$\rho^t(M)$ Densité volumique de masse
Constante	2	μ_0	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	$-4\pi G$
Champ (avec une source cylindrique)	$\vec{V}_{rz}^{\theta}(M)$	$\vec{B}_{rz}^{\theta}(M)$	$\vec{E}s_{rt}^{\theta}(M)$	$\vec{G}r_{rt}^{\theta}(M)$
Espace d'étude	x, y, z	x, y, z	x, y, t	x, y, t
Conservation sur la source	div$\vec{\omega}$=0	div$\mu_0\vec{J}$=0	$\frac{\partial \rho^t}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial \rho^t}{\partial t} = 0$
Relation source champ	$2\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{V}$	$\mu_0\vec{J} = rot\vec{B}$	$\frac{\vec{\rho}^t}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}s_{xt}^y}{\partial x}$	$-4\pi G\vec{\rho}^t = \frac{\partial \vec{G}r_{xt}^y}{\partial x}$
Théorème d'Ampère	$2\iint_{S_{xy}} \vec{\omega}_{xy}^z \cdot d\vec{S}_{xy}^t = \oint_{\Gamma y} \vec{V}_{xt}^y \cdot d\vec{y}$	$\mu_0 \iint_{S_{xy}^z} \vec{J}_{xy}^z \cdot d\vec{S}_{xy}^t = \oint_{\Gamma y} \vec{B}_{xt}^y \cdot d\vec{y}$	$\frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^t \cdot d\vec{S}_{xy}^t = \oint_{\Gamma y} \vec{E}s_{xt}^y \cdot d\vec{y}$	$-4\pi G \iint_{S_{xy}} \vec{\rho}_{xy}^t \cdot d\vec{S}_{xy}^t = \oint_{\Gamma y} \vec{G}r_{xt}^y \cdot d\vec{y}$
Théorème de Gauss (champs non réorientés)			$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho^t dV = \oiint_{\Sigma} \vec{E}s. d^2\vec{S}$	$-4\pi G \iiint_V \rho^t dV = \oiint_{\Sigma} \vec{G}r. d^2\vec{S}$

Loi de Biot et Savart	$\vec{V}(OM) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{Vol}\frac{\vec{\omega}d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$	$\vec{B}(OM) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{Vol}\frac{\vec{j}d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$	$\vec{E}s(OM) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{Vol}\frac{\vec{\rho}^t d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$	$\vec{G}r(OM) = -G\iiint_{Vol}\frac{\vec{\rho}^t d\tau\wedge\vec{O}M}{OM^3}$
Source à symétrie cylindrique de rayon R et de hauteur infinie $r \leq R$	$V_{rz}^{\theta}(r) = \omega r$	$B_{rz}^{\theta}(r) = \mu_0\frac{jr}{2}$ $B_{rz}^{\theta}(r) = \mu_0\frac{Ir}{2\pi R^2}$ Avec : $j = \frac{I}{\pi R^2}$	$El_{rt}^{\theta}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho^t r}{2}$	$Gr_{rt}^{\theta}(r) = -4\pi G\frac{\rho^t r}{2}$
Source à symétrie cylindrique de rayon R et de hauteur infinie $r \geq R$	$V_{rz}^{\theta}(r) = \frac{\omega R^2}{r}$	$B_{rz}^{\theta}(r) = \mu_0\frac{jR^2}{2r}$	$Es_{rt}^{\theta}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho^t R^2}{r}$	$Gr_{rt}^{\theta}(r) = -4\pi G\frac{\rho^t R^2}{r}$
Source à symétrie sphérique de rayon R $r \leq R$			$Es_{rt}^{\theta\varphi}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho^t r}{3}$	$Gr_{rt}^{\theta\varphi}(r) = -4\pi G\frac{\rho^t r}{3}$
Source à symétrie sphérique de rayon R $r \geq R$			$Es_{rt}^{\theta\varphi}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho^t R^3}{3r^2}$	$Gr_{rt}^{\theta\varphi}(r) = -4\pi G\frac{\rho^t R^3}{3r^2}$

VI.4.3 Champ à l'intérieur de la source de densité uniformément répartie, croissant en r

Reprenons l'exemple d'un système Terre Soleil simplifié, où la Terre n'a plus de rotation orbitale autour du Soleil et simplement une rotation de spin $-\vec{\omega}$ de 24 heures.

Depuis la Terre, un observateur voit tourner le Soleil avec une rotation orbitale $\vec{\Omega}$ de 24 heures. Si d'autres corps, par exemple des étoiles, sont fixes par rapport au Soleil, l'observateur terrestre les voit également tourner avec une rotation orbitale $\vec{\Omega}$ de 24 heures.

Notons que cet exemple correspond *justement* au cas d'une source, à symétrie sphérique ou cylindrique, de rayon R dans l'Espace, de densité volumique ρ^t uniformément répartie, avec $r \leq R$.

En effet, on a :

- d'une part une source $\vec{\omega}$ uniformément répartie, par exemple dans un volume $Vol = \frac{4}{3}\pi R^3$ ou $Vol = \pi R^2 \times h$ de l'Espace. La source $\vec{\omega}$ est **uniformément répartie** à l'intérieur de ce volume *Vol*, car toutes les étoiles dans ce volume voient tourner la Terre sur elle-même avec une **même rotation de spin** $-\vec{\omega}$,
- d'autre part un champ $\vec{V}$ qui augmente en r à l'intérieur de la source $\vec{\omega}$ uniformément répartie sur le volume Vol.

	Mécanique des fluides (rotationnel, permanent, incompressible)
Relation source champ	$2\vec{\omega} = r\vec{o}t\vec{V}$
Condition	$div\vec{\omega} = 0$

	Si la source $\vec{\omega}$ est uniformément répartie dans un volume Vol de l'Espace, le champ $\vec{V}$ se calcule dans ce volume Vol : $$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{O}M$$

- avec $-\vec{\omega}(M)$ la rotation de spin de la Terre (localisé en O), mesurée par les étoiles (localisées en M), c'est-à-dire dans le référentiel de ces étoiles.
- et avec $\vec{V}(M)$ la vitesse des étoiles à la distance OM, dans le référentiel de la Terre.

Soulignons que la localisation spatiale de la source $\vec{\omega}(M)$ ne correspond pas à la Terre, mais à la sphère de $Vol = \frac{4}{3}\pi R^3$ (ou au cylindre de $Vol = \pi R^2 \times h$), à l'intérieur desquelles les étoiles (de position *M*) voient tourner la Terre (de position O) avec une même rotation de spin $-\vec{\omega}(M)$. Même si la source est localisée, elle est à priori plus étendue que le corps étudié (ici la Terre).

Conclusion du paragraphe
Plus généralement, retenons que la source $\vec{\omega}(M)$ **uniformément répartie** dans un volume *Vol* correspond à un **référentiel commun,** à l'intérieur duquel tous les corps étudiés de position *M*, mesurent pour le corps de référence localisé en *O* (par exemple un observateur O), une même rotation de spin $-\vec{\omega}(M)$.
De son côté, l'observateur O mesure pour tous les corps étudiés à l'intérieur de *Vol*, un champ de vitesses $\vec{V}(M)$ répondant à l'équation source champ $2\vec{\omega}(M) = r\vec{o}t\vec{V}(M)$ (on a même $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{O}M$).

VI.4.4 Champ à l'extérieur de la source, de limite nulle à l'infini

On souhaite maintenant poursuivre l'analogie avec le théorème de Gauss, sortir de la source $\vec{\omega}$ de volume *Vol* et avoir un champ $\vec{V}$ qui :
- d'une part diminue dans l'Espace en s'éloignant de la source,
- d'autre part possède une limite nulle à l'infini.

Reprenons l'exemple d'un système Terre Soleil simplifié, où la Terre n'a toujours plus de rotation orbitale autour du Soleil et simplement une rotation de spin $-\vec{\omega}$ de 24 heures. Précédemment, on avait proposé que les autres corps de l'Univers, qu'on appelle étoiles, soient fixes par rapport au Soleil, et voient donc également la Terre avec une rotation de spin $-\vec{\omega}$ de 24 heures.

Proposons maintenant que les étoiles ne soient pas fixes par rapport au Soleil (cas plus réaliste). Restons néanmoins dans un cas simplifié où la Terre, par rapport à ces étoiles, n'a pas de rotation orbitale, mais simplement une rotation de spin.

A une distance très éloignée de la Terre (en tendant vers l'infini), quelles seront pour ces étoiles les rotations de spin $-\vec{\omega}_1$, …, $-\vec{\omega}_m$…, $-\vec{\omega}_n$… de la Terre ? Elles seront vraisemblablement quelconques. La rotation de spin $-\vec{\omega}_m$ sera par exemple dans un sens et $-\vec{\omega}_n$ dans un autre sens. Pour l'observateur terrestre, ces étoiles auront une rotation orbitale moyenne $\vec{\Omega}$ nulle et donc une vitesse moyenne (et aussi un champ) $\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ nulle.

On a l'idée un peu paradoxale, mais intuitivement compréhensible, que le référentiel terrestre (c'est-à-dire le référentiel où la Terre est fixe) est à la fois en elle-même et à l'infini.

Qualitativement, on est donc ici similaire au théorème de Gauss, cas d'une source à symétrie sphérique ou cylindrique de rayon R dans l'Espace, de densité volumique ρ^t uniformément répartie dans la source, avec $r \geq R$, et un champ $\vec{V}$ à l'infini qui est nulle.

VI.4.5 Champ à l'extérieur de la source, décroissance

Soit maintenant une Etoile très éloignée du Soleil, qui voit tourner le Soleil avec une rotation de spin de $-\vec{\omega}_{E-S}$. Le Soleil voit lui-même tourner la Terre avec une rotation de spin de $-\vec{\omega}_{S-T}$.

Si la distance Terre Soleil est négligeable devant la distance Soleil Etoile et si les rotations de spin sont toutes dans un même plan, l'Etoile voit tourner la Terre avec une rotation de spin de $-\vec{\omega}_{E-T} = -\vec{\omega}_{E-S} - \vec{\omega}_{S-T}$.
Dans le cas où $-\vec{\omega}_{E-S}$ est de sens opposé à $-\vec{\omega}_{S-T}$, l'observateur terrestre voit tourner l'Etoile avec une rotation orbitale $\vec{\Omega}_{E-T}$ inférieure à celle du Soleil $\vec{\Omega}_{S-T}$.

En s'éloignant de la Terre, il est vraisemblable que les étoiles voient la Terre avec des rotations de spin $-\vec{\omega}_1$, …, $-\vec{\omega}_n$ de plus en plus quelconques.
Pour l'observateur terrestre, ces étoiles ont une rotation orbitale moyenne $\vec{\Omega}$ qui diminue.

Pour retrouver qualitativement le théorème de Gauss, il faut pour l'observateur terrestre, que les étoiles aient une rotation orbitale moyenne $\vec{\Omega}$ qui diminue en $\frac{1}{r^3}$ (ou $\frac{1}{r^2}$ dans 2 dimensions de l'Espace) et un champ $\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ qui diminue en $\frac{1}{r^2}$ (ou $\frac{1}{r}$ dans 2 dimensions de l'Espace).

Autrement dit, quelles sont les caractéristiques à attribuer à un Espace, pour retrouver ces lois de décroissance du champ ?

VI.5 Conclusion du chapitre

On a proposé 2 pistes qui pourraient conduire vers une meilleure compréhension des équations sources champs et des théorèmes d'Ampère et de Gauss. L'une insiste sur l'interchangeabilité entre source et champ, l'autre sur une différence des points de vue pour passer du local à l'étendue.

En combinant les 2 pistes, on a constaté qu'une source vecteur tourbillon $\vec{\omega}(M)$ **uniformément répartie** dans un volume *Vol*, correspond à un **référentiel commun** de volume *Vol*, à l'intérieur duquel tous les corps étudiés de position *M*, mesurent pour le corps de référence localisé en *O* (par exemple un observateur O), une même rotation de spin $-\vec{\omega}(M)$.
De son côté, l'observateur O mesure pour tous les corps étudiés à l'intérieur de *Vol*, un champ de vitesses $\vec{V}(M)$ répondant à l'équation source champ $2\vec{\omega}(M) = r\vec{o}t\vec{V}(M)$.

La cible (non atteinte ici), c'est d'élargir la démonstration de la relation $2\vec{\omega}(M) = r\vec{o}t\vec{V}(M)$ aux sources quelconques (et alors aux types de référentiels à faire correspondre avec ces sources) et aux corps *M* en dehors de la source.

Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser aux équations champs homogènes, c'est-à-dire aux équations ne faisant intervenir que les champs.

Nota sur le principe de moindre action
Comme on l'a évoqué dans le mémoire 1, Joseph-Louis Lagrange a proposé en 1788 de démontrer le principe fondamental de la dynamique de Newton à partir du principe de moindre action. Cela pourrait aussi être une piste à la démonstration des équations sources champs.

Chapitre VII Analogue pour la gravitation de l'équation de Maxwell Faraday ?

Objet du chapitre
Précédemment, on a proposé des analogues pour la gravitation aux équations de Maxwell sources champs. Etudions maintenant quel pourrait être l'analogue pour la gravitation de l'équation champ champ de Maxwell Faraday.

VII.1 Sur les phénomènes d'induction électrique

VII.1.1 Rappels historiques

Les principales expériences de M. Faraday se déroulent dans les années 1830. Comme A.-M. Ampère, M. Faraday s'inspire des expériences de H. C. Ørsted. Néanmoins, il travaille sur une autre branche du magnétisme, celle des phénomènes d'induction électromagnétique. Si A.-M. Ampère étudie comment un courant électrique continu (la *source*) peut générer tel un aimant un *champ* magnétique, de son côté, M. Faraday étudie comment un *champ* magnétique peut induire un courant électrique dans un circuit, (en relation avec un *champ* électrique).

Au départ, M. Faraday étudie les courants continus dans le Temps. Il effectue de rapides progrès lorsqu'il élargit ses travaux aux courants variables dans le Temps, pouvant générer des champs magnétiques variables dans le Temps.
Son idée fondamentale, c'est qu'une variation dans le Temps du flux d'un *champ* magnétique à travers un circuit électrique génère dans ce circuit l'apparition d'un *champ* électromoteur (ou d'une $f.e.m.$ force électromotrice d'induction) et donc d'un courant électrique induit.

Les travaux de M. Faraday sont à l'origine du générateur électrique (dynamo) et du moteur électrique. Ils permettent la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique, et inversement.
Par exemple, un barreau métallique glissant sur deux rails génère une variation dans le Temps du flux de champ magnétique à travers le circuit électrique constitué par les deux rails, le barreau mobile et un barreau fixe. Cela induit l'apparition dans le circuit d'une $f.e.m.$ force électromotrice d'induction et d'un courant électrique induit.

VII.1.2 Loi de Faraday

On rappelle la loi de Faraday, traduction mathématique de ses idées :

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt}$$

La $f.e.m.$ est la force électromotrice qui met en mouvement les charges électriques du circuit. Contrairement à son appellation, il ne s'agit pas d'une force puisqu'elle est homogène à une tension (c'est-à-dire à une différence de potentiels électriques) et s'exprime en volts. Si on la multiplie par une charge q^t, on peut l'assimiler au travail d'une force électrique.

Nota sur la loi de modération
On parle souvent de la loi de modération de Lenz Faraday, énoncée par Heinrich Lenz en 1834 suivant les travaux de M. Faraday. D'après cette loi, le sens du courant induit dans le circuit est tel, que par ses effets, il s'oppose à la variation du flux magnétique qui lui a donné naissance.

Dans le cas d'un circuit fermé, purement résistif, de résistance totale R, on a le courant :

$$i = \frac{|f.e.m.|}{R} = \frac{d\Phi}{Rdt}$$

Pour trouver le sens du courant, on utilise la loi de modération de Lenz Faraday. Si on reprend l'exemple d'un barreau métallique glissant sur deux rails, le courant $i = qv$ passant à travers le barreau mobile crée une force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{Lor} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le sens du courant est déterminé par le sens de la force magnétique, qui doit s'opposer à la force faisant déplacer le barreau mobile (par exemple, le poids de la barre mobile).

VII.1.3 Cas de Neuman et cas de Lorentz

Dans les phénomènes d'induction magnétique, on distingue deux cas :

- **le cas de Neuman**, circuit électrique fixe dans un champ $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ variable dans le Temps,
- **le cas de Lorentz**, déplacement du circuit électrique dans un champ $\vec{B}_{xy}^{1/t}$ stationnaire (champ magnétique indépendant du Temps).

Dans le cas de Neuman, on a :

$$f.e.m. = \oint_{circuit} \frac{\partial A^x}{\partial t} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Φ est le flux magnétique à travers le circuit.

Dans le cas de Lorentz, on a :

$$f.e.m. = \oint_{circuit} (\vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^t)_{ty}^x \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

Φ_c est le flux magnétique total coupé par le circuit lors de son déplacement.

Si le circuit filiforme fermé subit des déformations sans qu'il y ait discontinuité de vitesse (sans commutation), on a $d\Phi_c = d\Phi$ puisque le flux de $\vec{B}_{xy}^t$ est conservatif. La $f.e.m.$ induite a alors la même expression dans les deux cas :

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Dans **le cas de Lorentz**, on prend en compte un champ électromoteur :

$$\vec{E}m_{ty}^x = (\vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^t)_{ty}^x$$

avec $\vec{v}^y$ la vitesse de déplacement du circuit électrique.

On a la force électrique définie à partir de ce champ électromoteur :

$$\vec{F}_{El_{ty}}^{\ x} = q^t\ (\vec{E}m)_{ty}^x = (q^t\ \vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^t)_{ty}^x$$

Dans **le cas de Neuman**, on prend en compte un champ électrique d'induction :

$$\vec{E}i_{tx}^y = (\frac{\partial A^x}{\partial t})_{tx}^y$$

traduction de la variation du champ magnétique dans le Temps.

Comme on réoriente le champ électrique d'induction $\vec{E}i$, et pas le champ électromoteur $\vec{E}m$ (qui conserve la même direction que la force électrique$\vec{F}_{El}$), $\vec{E}i$ et $\vec{E}m$ n'ont pas la même direction.

Dans le cas de Neuman, on définit un champ électromoteur :

$$\vec{E}m^x_{ty} = (\vec{u}^t \wedge \vec{E}i^y_{tx})^x_{ty} = \vec{u}^t \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})^y_{tx}$$

avec $\vec{u}^t$ vecteur unitaire dirigé dans le Temps.

On a la force électrique définie à partir du champ électromoteur $\vec{E}m$ ou du champ électrique d'induction $\vec{E}i$:

$$\vec{F}_{El}{}^x_{ty} = q^t\ (\vec{E}m)^x_{ty} = \vec{q}^t\ \wedge \vec{E}i^y_{tx} = \vec{q}^t\ \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})^y_{tx}$$

Réunion des deux cas Lorentz et Neuman

Si on réunit les deux cas, on a un champ électromoteur :

$$\vec{E}m^x_{ty} = (\vec{v}^y \wedge \vec{B}^{1/t}_{xy})^x_{ty} + (\vec{u}^t \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})^y_{tx})^x_{ty}$$

On a la force électrique définie à partir de ce champ électromoteur :

$$\vec{F}_{El}{}^x_{ty} = q^t\ (\vec{E}m)^x_{ty} = q^t\ (\vec{v}^y \wedge \vec{B}^{1/t}_{xy} + \vec{u}^t \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})^y_{tx})^x_{ty}$$

VII.1.4 Equation de Maxwell Faraday

On rappelle l'équation de Maxwell Faraday sous forme intégrale :

$$f.e.m. = \oint_{\Gamma^x} \vec{E}m^x_{ty} \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{-\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t} \cdot d\vec{S}^t_{xy} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec Γ^x un contour fermé et S_{xy} une surface.

On rappelle Maxwell Faraday sous forme locale :

$$rot(\vec{E}m^x_{ty}) = \frac{-\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t}$$

Nota

Classiquement on a $rot(\vec{E}l) = \frac{-\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t}$. Mais comme on réoriente le champ électrique $\vec{E}l$ et non le champ électromoteur $\vec{E}m$, on utilise dans Maxwell Faraday (sous forme locale) le champ électromoteur (qui conserve la même direction que la force électrique).

Précédemment, on a proposé des analogues pour la gravitation aux équations électromagnétiques sources champs de Maxwell. Voyons maintenant quel pourrait être l'analogue pour la gravitation à l'équation champ champ de Maxwell Faraday. Pour cela, examinons davantage cette dernière équation.

VII.2 Equation de Maxwell Faraday transcrite de l'électromagnétisme à la gravitation

VII.2.1 D'un champ électromoteur intégré sur un contour fermé à une différence de potentiels

Dans Maxwell Faraday sous forme intégrale, on peut distinguer deux parties.

Une première partie qui fait le lien entre la $f.e.m.$ induite et le champ électromoteur $\vec{E}m^x_{yt}$, c'est-à-dire :

$$f.e.m. = \oint_{\Gamma^x} \vec{E}m_{ty}^x \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t} + \vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})_{ty}^x \cdot d\vec{x}$$

Une seconde partie qui fait le lien entre le champ électromoteur $\vec{E}m_{yt}^x$ et la partie magnétique, avec la variation du flux magnétique, c'est-à-dire :

$$\oint_{\Gamma^x} \vec{E}m_{yt}^x \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{-\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_{xy}^t = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Nota 1
L'intégration sur un contour fermé Γ^x traduit le passage d'un champ électromoteur à une différence de potentiels électriques.
Si on multiplie par une charge q^t, l'intégration sur un contour fermé Γ^x traduit le passage d'une force électrique à une énergie électrique.

Nota 2
Notons qu'un champ électrostatique de Coulomb du type $(\vec{u}^t \wedge \vec{E}s_{tx}^{1/y})_{ty}^x$ ne peut induire une $f.e.m.$ dans un contour fermé. On a en effet :

$$f.e.m. = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \vec{E}s_{tx}^{1/y})_{ty}^x \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{A}^t}{\partial x})_{ty}^x \cdot d\vec{x} = \vec{u}^t \wedge (\vec{A}^t(M) - \vec{A}^t(M)) = 0$$

Seuls les termes $(\vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t})_{ty}^x$ et $(\vec{u}^t \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})_{tx}^y)_{ty}^x$ peuvent induire une $f.e.m.$ dans un contour fermé.

Pour un champ électrique $\vec{E}l_{tx}^{1/y} = \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}^t}{\partial x}$, on a donc :

$$f.e.m. = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \vec{E}l_{tx}^{1/y})_{ty}^x \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge (\frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}^t}{\partial x}))_{ty}^x \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})_{ty}^x \cdot d\vec{x}$$

Le potentiel électrique $\vec{A}^t$ n'intervient donc pas, seul est pris en compte le potentiel magnétique $\vec{A}^x$.

VII.2.2 Analogie l'électromagnétisme et gravitation

On a l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} = -(\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{ty}^x$$

De même, on a l'accélération einsteinienne (accélération annulée lors d'un changement de référentiels) :

$$\vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x} = (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t})_{ty}^x$$

avec $\vec{u}^t$ vecteur unitaire dirigé dans le Temps.

Nota sur $\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t}$
Dans l'équation source champ Gauss gravitation, on a fait apparaître un terme supplémentaire : $\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t}$ par rapport à l'équation Gauss gravitation « usuelle ». On a présenté ce terme supplémentaire $\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t}$ comme

une accélération annulée lors du changement de référentiels de R à R^K. On note qu'il est également analogue, pour l'électromagnétisme, au champ électrique d'induction $\vec{E}i_{tx}^{y} = (\frac{\partial A^x}{\partial t})_{tx}^{y}$.

On a Maxwell Faraday sous forme intégrale :

$$\oint_{\Gamma^x} \vec{E}m_{ty}^{x} \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} ((\vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t})_{ty}^{x} + (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{-\partial \vec{B}_{xy}^{1/t}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \frac{-d\Phi_B}{dt}$$

avec Φ_B le flux de champ magnétique.

Son analogue pour la gravitation est :

$$\oint_{\Gamma^x} (-\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} + \vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} ((\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{ty}^{x} + (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t})_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{\partial 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t}$$

$$= \frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$$

avec Φ_Ω le flux de champ pulsation.

Nota 1
On ne fait pas ici intervenir de signe $-$ dans $\frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$. On va voir pourquoi dans le prochain paragraphe.

Nota 2
En intégrant sur un contour fermé Γ^x, on a le passage d'une accélération à une différence de potentiels newtoniens :

$$\Delta V^t = \oint_{\Gamma^x} (-\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} + \vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} ((\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{ty}^{x} + (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t})_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x}$$

Si on multiplie par une masse m^t l'équation ci-dessus, l'intégration sur un contour fermé Γ^x traduit le passage d'une force de type gravitationnelle à une énergie gravitationnelle.

Nota 3
Notons que la force gravitationnelle newtonienne $\vec{F}_{Gr}{}_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge (\frac{\partial V^t}{\partial x})_{tx}^{y}$ ne peut produire une différence de potentiels newtoniens dans un contour fermé. On a en effet :

$$\Delta V^t = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{V}^t}{\partial x})_{ty}^{x} \cdot d\vec{x} = \vec{u}^t \wedge (V^t(M) - V^t(M)) = 0$$

Seuls les termes $(\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{ty}^{x}$ et $(\vec{u}_t \wedge \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t})_{ty}^{x}$ peuvent produire une différence de potentiels newtoniens dans un contour fermé.

Pour un champ vecteur d'onde $\vec{K}_{tx}^{1/y} = \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t} - \frac{\partial \vec{V}^t}{\partial x}$, on a :

$$\Delta V^t = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \vec{K}_{tx}^{1/y})_{ty}^{x} \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge (\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t} - \frac{\partial \vec{V}^t}{\partial x}))_{ty}^{x} \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t})_{ty}^{x} \cdot d\vec{x}$$

Le potentiel newtonien V^t n'intervient donc pas, seul est pris en compte le potentiel vitesse V^x.

VII.2.3 Changements de référentiels, comprendre Faraday gravitation

On reconnait dans $\vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x} - \vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x}$ des termes de l'accélération lors d'un changement de référentiels de R^0 à R^Ω.

On rappelle la décomposition d'une accélération :

$$[\vec{a}]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega} + \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{O}M + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

avec $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$ l'accélération d'inertie centrifuge et $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ l'accélération de Coriolis.

L'accélération einsteinienne correspond à l'accélération annulée lors du changement de référentiels de R^0 à R^Ω, c'est-à-dire à la différence entre l'accélération initiale $[\vec{a}]_{R^0}$ et l'accélération restante $\left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega}$.

On a :

$$\vec{a}_{Ein} = [\vec{a}]_{R^0} - \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega}$$

Sans l'expliquer physiquement, on constate qu'il faut aussi considérer l'accélération d'inertie centrifuge $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$ comme une accélération restante. On obtient :

$$\vec{a}_{Ein} = [\vec{a}]_{R^0} - \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$$

Nota
On saisit un peu mieux pourquoi il n'y a pas d'équivalent explicite à l'accélération d'inertie centrifuge $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$ en électromagnétisme. Cet équivalent doit être implicitement inclus dans le champ électrique d'induction $\vec{E}i_{tx}^{y} = (\frac{\partial A^x}{\partial t})_{tx}^{y}$, comme il est ici inclus dans l'accélération einsteinienne.

On a donc :

$$\vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x} = \vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} + \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{O}M$$

$$\vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x} - \vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} = \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{O}M$$

On a le vecteur potentiel vitesse défini à partir du champ pulsation :

$$\vec{V} = \vec{\Omega}^t \wedge \vec{O}M$$

On a :

$$2\vec{\Omega} = r\vec{o}t\vec{V} = r\vec{o}t(\vec{\Omega}^t \wedge \vec{O}M)$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial 2\vec{\Omega}^t}{\partial t} = \frac{\partial r\vec{o}t(\vec{\Omega}^t \wedge \vec{O}M)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial 2\vec{\Omega}^t}{\partial t} = r\vec{o}t(\frac{\partial \vec{\Omega}^t}{\partial t} \wedge \vec{O}M)$$

D'après le théorème de Stockes le long d'un chemin fermé Γ^x délimitant une surface S_{xy}, on a :

$$\oint_{\Gamma^x} (\frac{\partial \vec{\Omega}^t}{\partial t} \wedge \vec{O}M) \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} r\vec{o}t(\frac{\partial \vec{\Omega}^t}{\partial t} \wedge \vec{O}M) \cdot d\vec{S}^t_{xy} = \iint_{S_{xy}} \frac{\partial 2\vec{\Omega}^t_{xy}}{\partial t} \cdot d\vec{S}^t_{xy} = \frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$$

On retrouve donc :

$$\Delta V^t = \oint_{\Gamma^x} (\vec{a}_{Ein}{}^x_{ty} - \vec{a}_{Cor}{}^x_{ty}) \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma^x} (\frac{\partial \vec{\Omega}^t}{\partial t} \wedge \vec{O}M) \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{\partial 2\vec{\Omega}^t_{xy}}{\partial t} \cdot d\vec{S}^t_{xy} = \frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$$

On a l'analogue de Maxwell Faraday pour la gravitation :

$$\Delta V^t = \oint_{\Gamma^x} (\vec{a}_{Ein}{}^x_{ty} - \vec{a}_{Cor}{}^x_{ty}) \cdot d\vec{x} = \frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$$

On appellera cette dernière équation Faraday gravitation.

Nota 1
Pour une bonne analogie entre gravitation et électromagnétisme, il faut également que $\vec{\Omega}^t_{xy}$ soit à flux conservatif comme $\vec{B}^t_{xy}$.

Nota 2, chercher des exemples de Faraday gravitation : où peut-il y avoir un potentiel newtonien supérieur à l'attendu ?
On peut présenter Maxwell Faraday comme la génération d'une différence de potentiels électriques à partir d'une variation du flux du champ magnétique. On peut interpréter Maxwell Faraday comme l'obtention d'un potentiel électrique coulombien supplémentaire, sans avoir à passer par Maxwell Gauss électrostatique.
Suivant une analogie gravitation et électromagnétisme, cherchons des exemples où Faraday gravitation pourrait intervenir, c'est-à-dire des cas où on aurait un potentiel newtonien supérieur à l'attendu si on utilisait simplement Gauss gravitation ?

Nota 3, « masse lumineuse » et « masse dynamique », l'énigme de la matière noire
En 1933, l'astronome Fritz Zwicky étudie un petit groupe de 7 galaxies dans l'amas de la Chevelure de Bérénice. Ces galaxies sont comparables à de vastes tourbillons composés de spirales ou de bras d'étoiles qui tournent autour d'un centre particulièrement dense formé d'étoiles.

Pour chaque galaxie, F. Zwicky mesure les distances des étoiles depuis le centre galactique, leurs périodes de rotation autour du centre galactique, ainsi que leurs vitesses moyennes. A partir d'une formule s'inspirant de la 3ème loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\lambda^2}{GM}$ avec $\lambda = 1 + \frac{m}{M}$, avec en gros M la masse du centre galactique et m la masse de l'étoile en rotation ($m << M$), l'astronome en déduit la « masse dynamique » de la Galaxie.

F. Zwicky mesure également la luminosité L émise par les 7 galaxies, et à travers la relation de proportionnalité $L \propto M^3$, il obtient pour chaque galaxie une « masse lumineuse ».
L'astronome constate alors que la vitesse des étoiles dans les bras de galaxies est bien plus élevée qu'on s'y attendrait. En effet, la masse dynamique est 400 fois plus grande que la masse lumineuse.

Dans les années 1970, l'astronome américaine Vera Rubin reprend les travaux de F. Zwicky à l'aide d'instruments d'observation dotés d'une plus grande précision. Elle calcule la vitesse de rotation de bras de galaxie en fonction de la distance au centre galactique. La vitesse de rotation d'une galaxie spirale est censée décroître en s'écartant du centre, cela en suivant une décroissance képlérienne.
Or, à l'instar des observations de F. Zwicky, V. Rubin constate que les étoiles situées à la périphérie tournent bien trop vite. Par exemple, pour la galaxie d'Andromède, les vitesses restent pratiquement constantes au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre.

Pour expliquer ces vitesses en périphéries bien supérieures à la décroissance képlérienne, il faut postuler un potentiel newtonien supérieur à l'attendu. En effet, une vitesse de rotation supérieure implique une force d'inertie centrifuge supérieure, et donc une force attractive gravitationnelle newtonienne supérieure pour équilibrer la force d'inertie centrifuge, et donc un potentiel newtonien supérieur.

Si on utilise Gauss gravitation « usuelle » (sans le terme $\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t}$), un potentiel newtonien supplémentaire implique une masse supplémentaire pour générer ce potentiel newtonien.
Ainsi, suite aux travaux de F. Zwicky et de V. Rubin, il est proposé l'hypothèse d'une matière noire, un halo de matière non visible entourant les galaxies, un halo qui représenterait jusqu'à 90% de la masse de la galaxie. Cette matière noire génèrerait le potentiel newtonien supplémentaire, qui expliquerait les vitesses des étoiles supérieures à l'attendu képlérien.

Une autre piste pour obtenir un potentiel newtonien supplémentaire serait d'utiliser Faraday gravitation, et notamment le terme $\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t}$ que l'on propose également d'ajouter à Gauss gravitation. On peut voir le vecteur rotation (ou champ pulsation) $\vec{\Omega}$ d'une galaxie comme l'analogue du champ magnétique $\vec{B}$, les bras d'étoiles d'une galaxie comme l'analogue d'un circuit électrique délimitant une surface fermée.
Dans ce cas, la variation de formes des bras d'étoiles produirait une variation du flux du champ pulsation $\vec{\Omega}$ à travers la surface fermée délimitée par les bras et induirait l'apparition d'une différence de potentiels newtoniens supplémentaire en périphérie de la galaxie (comme il apparait une différence de potentiels électriques coulombiens supplémentaire dans les circuits électriques lors des phénomènes d'induction). Piste à suivre.

Nota 4 sur la modification proposée de Gauss gravitation
On propose dans cet essai de modifier légèrement Gauss gravitation, c'est-à-dire de modifier l'équation classique $-4\pi G\vec{\rho}^{t}_{xy} = \frac{\partial \overrightarrow{Gr}^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{Gr}^{1/x}_{yt}}{\partial y}$ en $-4\pi G\vec{\rho}^{t}_{xy} = \frac{\partial 2c^2\vec{K}^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial 2c^2\vec{K}^{1/x}_{yt}}{\partial y}$, ce qui revient à introduire des termes du type $\frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{V}^y}{\partial t}$.
Ces termes que l'on ajoute dans Gauss gravitation sont les analogues pour l'induction électromagnétique du cas de Neuman où apparait un champ électromoteur du type $\overrightarrow{Em}^{1/y}_{xt} = \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t}$ et $\overrightarrow{Em}^{1/x}_{yt} = \frac{\partial \vec{A}^y}{\partial t}$ et une force électromotrice d'induction : $e = \int \vec{Em}.\,d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, avec Φ le flux de champ magnétique.

VII.3 Approche tensorielle, Maxwell Faraday et Maxwell Thomson

VII.3.1 Tenseur électromagnétique de Maxwell Faraday $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$

On rappelle le tenseur électromagnétique de Maxwell Faraday :

$$\bar{\bar{F}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} \\ \frac{El_{xt}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ \frac{El_{yt}}{c} & B_{yx} & 0 & B_{yz} \\ \frac{El_{zt}}{c} & B_{zx} & B_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{El_{tx}}{c} & \frac{El_{ty}}{c} & \frac{El_{tz}}{c} \\ -\frac{El_{tx}}{c} & 0 & B_{xy} & B_{xz} \\ -\frac{El_{ty}}{c} & -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ -\frac{El_{tz}}{c} & -B_{xz} & -B_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

On rappelle Maxwell Faraday et Maxwell Thomson données à partir du tenseur $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$:

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$$

Dans l'espace x, y, z, on a :

$$\frac{\partial F_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{zx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial y} = 0$$

Cela correspond à :

$$div\vec{B} = 0$$

Dans l'espace x, y, ct, on a :

$$\frac{\partial F_{xy}}{\partial ct} + \frac{\partial F_{yt}}{\partial x} + \frac{\partial F_{tx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_{xy}}{\partial ct} + \frac{\partial El_{yt}}{c\partial x} + \frac{\partial El_{tx}}{c\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_{xy}}{\partial ct} + \frac{\partial El_{tx}}{c\partial y} - \frac{\partial El_{ty}}{c\partial x} = 0$$

Cela correspond à :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\vec{E}l = 0$$

$$r\vec{o}t\vec{E}l = \begin{pmatrix} \frac{\partial El_{tx}}{\partial y} \\ -\frac{\partial El_{ty}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

dans le plan x, *y*

VII.3.2 Tenseur gravitation $\bar{\bar{D}}_{\mu\nu}$

On rappelle le tenseur gravitation :

$$\bar{\bar{D}}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_{tx} & K_{ty} & K_{tz} \\ -K_{tx} & 0 & \frac{\Omega_{xy}}{c} & \frac{\Omega_{xz}}{c} \\ -K_{ty} & -\frac{\Omega_{xy}}{c} & 0 & \frac{\Omega_{yz}}{c} \\ -K_{tz} & -\frac{\Omega_{xz}}{c} & -\frac{\Omega_{yz}}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Suivant une stricte analogie entre les 2 tenseurs $\bar{\bar{F}}_{\mu\nu}$ et $\bar{\bar{D}}_{\mu\nu}$, on pose pour l'analogue de Maxwell Faraday et Maxwell Thomson :

$$\partial_\gamma D_{\alpha\beta} + \partial_\alpha D_{\beta\gamma} + \partial_\beta D_{\gamma\alpha} = 0$$

Dans l'espace x, y, ct, on a :

$$\partial_{ct} D_{xy} + \partial_x D_{yt} + \partial_y D_{tx} = 0$$

$$\partial_{ct} \frac{\Omega_{xy}}{c} - \partial_x K_{ty} + \partial_y K_{tx} = 0$$

Dans les espaces x, z, ct et y, z, ct, on a :

$$\partial_{ct} \frac{\Omega_{xz}}{c} - \partial_x K_{tz} + \partial_z K_{tx} = 0$$

$$\partial_{ct} \frac{\Omega_{yz}}{c} - \partial_y K_{tz} + \partial_z K_{ty} = 0$$

On retrouve ainsi Faraday gravitation.

Dans l'espace x, y, z :

$$\partial_z D_{xy} + \partial_x D_{yz} + \partial_y D_{zx} = 0$$

$$\partial_z \Omega_{xy} + \partial_x \Omega_{yz} + \partial_y \Omega_{zx} = 0$$

$$div\vec{\Omega} = 0$$

On retrouve le champ pulsation à flux conservatif. Pour un champ pulsation, il ne peut exister de monopôle.

VII.4 Conclusion du chapitre

En électricité, une variation du flux du champ magnétique $\vec{B}$ implique l'apparition d'une différence de potentiels électriques dans un contour fermé. De même, pour la gravitation, si on suit une stricte analogie avec l'électricité, une variation du flux du champ pulsation $\vec{\Omega}$ implique l'apparition d'une différence de potentiels newtoniens dans un contour fermé.
A voir si cela peut expliquer, dans les Galaxies, les vitesses observées des étoiles qui ne respectent pas l'attendu képlérien ?

Chapitre VIII Caractère ondulatoire des champs électrique, magnétique, vecteur d'onde et pulsation

Objet du chapitre
Dans les chapitres précédents, on a proposé des analogues des équations de Maxwell, pour la gravitation.
Comme on l'a souligné au début de ce mémoire, à partir des équations de Maxwell, il est possible de retrouver des équations d'onde pour les champs électrique et magnétique, et ainsi de proposer des ondes électromagnétiques qui se propagent à la vitesse c de la lumière dans le vide.
Cela avait d'ailleurs été l'un des grands apports de J. C. Maxwell de rapprocher théoriquement, dans les années 1860, électromagnétisme et optique. Près de deux décennies plus tard, en 1888, Heinrich Hertz découvrit les ondes électromagnétiques dans l'air.
A partir des analogues des équations de Maxwell obtenus précédemment, et toujours suivant une stricte analogie avec l'électromagnétisme, on va proposer dans ce chapitre des équations d'onde pour les champs vecteur d'onde et pulsation. On obtiendra alors des ondes gravitationnelles qui se propagent également à la vitesse *c* dans le vide.

VIII.1 Champs électrique et vecteur d'onde

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell Faraday, compte tenu de Maxwell Gauss et de Maxwell Ampère, on obtient pour le champ électrique $\vec{E}l_{xt}^{1/y}$, et par analogie pour le champ vecteur d'onde $\vec{K}_{xt}^{1/y}$, les équations du tableau ci-dessous :

	Electromagnétisme	**Gravitation**
Equation d'onde des champs spatiotemporels dans le vide, en l'absence de densités de charges, de courants, de masses et d'impulsions	$\frac{\partial^2 \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial t^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \frac{{l_p}^2 c}{\hbar G} \frac{\partial^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial t^2} = 0$
Constantes	ε_0	$-\frac{1}{2\pi G}$
Constantes	μ_0	$-\frac{2\pi {l_p}^2 c}{\hbar}$
Conditions sur les constantes	$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$	$\frac{{l_p}^2 c}{\hbar G} = \frac{1}{c^2}$
Equation d'onde des champs spatiotemporels dans le vide	$\frac{\partial^2 \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial ct^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial ct^2} = 0$
Equation d'onde des champs spatiotemporels en présence de densités de charges, de courants, de masses et d'impulsions	$\frac{\partial^2 \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}l_{xt}^{1/y}}{\partial ct^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{\rho}_{xy}^{t}}{\partial x} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_{xt}^{y}}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial ct^2} = -2\pi G \frac{\partial \vec{\rho}_{xy}^{t}}{\partial x} - \frac{2\pi {l_p}^2 c}{\hbar} \frac{\partial \vec{\dot{\mathbf{p}}}_{xt}^{y}}{\partial t}$ $\frac{\partial^2 c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c^2 \vec{K}_{xt}^{1/y}}{\partial ct^2}$

		$= -2\pi G \frac{\partial \vec{p}^{t}_{xy}}{\partial x} - \frac{c}{\hbar}\frac{\partial \vec{p}^{y}_{xt}}{\partial t}$
Equation d'onde des potentiels	$\frac{\partial^2 A^t}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A^t}{\partial ct^2} = -\frac{\rho^t}{\varepsilon_0}$	$\frac{\partial^2 V^t}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V^t}{\partial ct^2} = 4\pi G \rho^t$

Vérification des unités :

	$\frac{\partial^2 c^2 \vec{K}^{1/y}_{xt}}{\partial x^2}$	$\frac{2\pi {l_p}^2 c \partial \vec{\mathbf{p}}^{y}_{xt}}{\hbar \partial t}$
Unités	$\frac{1}{ms^2}$	$\frac{m^2 \times Kg \times s \times m \times m}{m^2 \times Kg \times s^2 \times m^3 \times s} = \frac{1}{ms^2}$

Nota
Pour obtenir l'équation d'onde des potentiels électromagnétiques, il faut respecter la condition de la Jauge de Lorenz :

$$\vec{\nabla}.\vec{A}^{x,y,z} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial A^t}{\partial t} = 0$$

VIII.2 Champs magnétique et pulsation

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell Ampère, compte tenu de Maxwell Thomson et de Maxwell Faraday, on obtient pour le champ magnétique $\vec{B}^{1/t}_{xy}$, et par analogie pour le champ pulsation $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$, les équations du tableau ci-dessous :

	Electromagnétisme	Gravitation
Equation d'onde des champs spatiaux dans le vide, en l'absence de densités de charges, de courants, de masses et d'impulsions	$\frac{\partial^2 \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{{l_p}^2 c}{G\hbar}\frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial t^2} = 0$
Constantes	ε_0	$-\frac{1}{2\pi G}$
Constantes	μ_0	$-\frac{2\pi {l_p}^2 c}{\hbar}$
Conditions sur les constantes	$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$	$\frac{{l_p}^2 c}{\hbar G} = \frac{1}{c^2}$ $c = \sqrt{\frac{\hbar G}{{l_p}^2 c}}$
Equation d'onde des champs spatiaux dans le vide	$\frac{\partial^2 \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2} = 0$
Equation d'onde des champs spatiaux en présence de densités	$\frac{\partial^2 \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2} = \frac{\mu_0 \partial \vec{J}^{y}_{xt}}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 c\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2}$

de charges, de courants, de masses et d'impulsions		$= -\frac{2\pi {l_p}^2 c}{\hbar}\frac{\partial \vec{\mathbf{p}}^y_{xt}}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2} = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial \vec{p}^y_{xt}}{\partial x}$

Nota sur l'équation d'onde de Klein Gordan
A partir de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2} = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial \vec{p}^y_{xt}}{\partial x}$$

Si on remplace la source $\vec{p}^y_{xt} = (\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt}$ par la source $-(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{xt}c^2 = (\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx}c^2$ (c'est-à-dire par une permutation de x et t), on obtient (en dérivant de plus la source par une dérivée partielle $(\frac{\partial \vec{m}^t}{\partial x})^y_{tx}c^2$) :

$$\frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial ct^2} = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 \vec{m}^t c^2}{\partial x^2}$$

En remplaçant $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$ par ψ une fonction d'onde quelconque :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial ct^2} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 m^t c^2}{\partial x^2}\,\psi$$

En élargissant aux 3 dimensions de l'Espace :

$$\Delta\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial ct^2} = \frac{1}{\hbar}\Delta m^t c^2 \psi$$

On obtient une équation d'onde qui n'est pas sans rappeler l'équation d'onde de Klein Gordan :

$$\Delta\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial ct^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\psi$$

VIII.3 Exemples de résolution des équations d'onde

Pour un champ électrique $El^{1/y}_{xt}$, on a comme solution de l'équation d'onde dans le vide, par exemple la fonction d'onde suivante :

$$El^{1/y}_{xt}(t,y) = El' cos(\omega t - ky)$$

avec $\frac{\omega}{k} = c$.

Dans cet exemple, l'onde électromagnétique se propage suivant la direction *y*.

Nota 1 sur les ondes longitudinales et transversales
On parle d'une onde longitudinale lorsque la déformation du milieu est dans la même direction que la propagation de l'onde. Le son en est un bon exemple.
On parle d'une onde transversale lorsque la déformation du milieu est dans une direction perpendiculaire à la propagation de l'onde. Une vague ou une onde électromagnétique (telle qu'elle est présentée usuellement), en sont des bons exemples.

Dans cet essai, en réorientant dans un espace x, y, t, le champ électrique $El^{1/y}_{xt}$ de la direction *x* à la direction *y*, on obtient pour la partie champ électrique, une onde longitudinale. En effet, les déformations du champ électrique sont alors dans la direction de la propagation de l'onde.
La force électrique reste orientée suivant *x*. On conserve donc, pour la partie force électrique, une onde transversale.

Quant au champ magnétique $B_{xy}^{1/t}$ qui se déforme suivant t, on peut intuitionner pour la partie champ magnétique, une onde qui se « propage dans le Temps » dans la même direction que les déformations du champ magnétique, c'est-à-dire une onde « longitudinale dans le Temps ».

Nota 2 sur les ondes polarisées
Dans le cas d'une onde polarisée (de types polarisation rectiligne, circulaire, rectiligne verticale, rectiligne horizontale…), le type de polarisation est usuellement indiqué par les directions du champ électrique. Comme on propose de le réorienter, le type polarisation est alors indiqué par les directions de la force électrique à laquelle serait soumise une charge électrique ponctuelle.

Par analogie électromagnétisme gravitation, pour un champ pulsation $\Omega_{xy}^{1/t}$, on a comme solution de l'équation d'onde dans le vide, par exemple la fonction d'onde suivante :

$$\Omega_{xy}^{1/t}(t) = \Omega' cos(\omega t - ky)$$

avec $\frac{\omega}{k} = c$.

On peut interpréter cet exemple comme un « manège virtuel », se propageant dans la direction y de l'Espace, et possédant une vitesse de rotation $\Omega_{xy}^{1/t}(t, y)$ variant sinusoïdalement suivant les instants t et les positions y occupés par ce « manège virtuel ».

Si ce « manège virtuel » est immobile par rapport à un observateur, il répond alors à une fonction d'onde stationnaire :

$$\Omega_{xy}^{1/t}(t) = \Omega_0 cos(\omega t)$$

Physiquement, on peut interpréter ce « manège virtuel » comme immobile dans l'Espace par rapport à l'observateur, et possédant une vitesse de rotation $\Omega_{xy}^{1/t}(t)$ variant sinusoïdalement dans le Temps.

Nota sur des grandeurs physiques à la fois champ ou potentiel et fonction d'onde
Dans ce chapitre, on a étudié des grandeurs physiques de type champ ou potentiel, qui sous certaines conditions, sont aussi des fonctions d'onde. Dans le prochain mémoire, on étudiera le potentiel de Yukawa (décrivant les interactions nucléaires), qui également est à la fois potentiel et fonction d'onde.

VIII.4 Conclusion du chapitre

Les différentes équations obtenues montrent que les variations dans l'Espace et le Temps d'une charge électrique en mouvement (accéléré), génèrent une onde électromagnétique composée d'un champ électrique et d'un champ magnétique, une onde se propageant à la vitesse c dans le vide.
De même, les variations dans l'Espace et le Temps d'une masse en mouvement accéléré, génèrent une onde gravitationnelle composée d'un champ vecteur d'onde et d'un champ pulsation, une onde se propageant à la vitesse c dans le vide.

La lumière caractérisée par sa vitesse c dans le vide, est donc une forme de rayonnement électromagnétique, et aussi de rayonnement gravitationnel.
Inversement, ces ondes électromagnétiques et gravitationnelles (c'est-à-dire, dans la partie visible du spectre, de la lumière) peuvent générer dans des « antenne » des mouvements accélérés de charges électriques et de masses, c'est-à-dire des courants électriques et des courants massiques.

Chapitre IX Pourquoi 2 natures de charges électriques et 1 seule de masse ? Exemple d'un modèle simplifié des marées

Objet du chapitre
On cherche à comprendre les différences qu'il subsiste entre électromagnétisme et gravitation, notamment l'existence en électromagnétisme de deux natures de charges électriques, positive ou négative, et l'existence en gravitation d'une seule nature de masse, toujours positive. Autrement dit, l'existence en électricité de deux natures de forces, attractive et répulsive, et l'existence en gravitation d'une seule nature de force, toujours attractive.
Pour comprendre ces différences entre gravitation et électromagnétisme, on prendra pour exemple un modèle statique et simplifié des marées.

IX.1 Analogies électromagnétisme et gravitation

IX.1.1 Pourquoi 2 natures de charge et 1 seule de masse ?

En introduction de cet essai, on a souligné les ressemblances entre la gravitation et l'électromagnétisme. On a aussi noté l'existence de quelques différences. Dans les mémoires 2 et 3, on a remarqué que la plupart de ces différences s'estompent, si l'analogie est poussée un peu plus loin qu'à l'accoutumée.

Par exemple, dans un champ électrique, l'accélération d'un corps est fonction de sa charge électrique massique, alors que dans un champ gravitationnel, l'accélération de ce corps ne dépend pas de sa masse. Si on pousse un peu plus loin l'analogie, comme on l'a fait dans le mémoire 2, en électromagnétisme, l'analogue de l'accélération, ce n'est pas l'accélération, mais le champ induit (ou champ électromoteur). On peut alors dire : dans un champ électrique, le champ induit d'un corps ne dépend pas de sa charge électrique.
De même, dans ce mémoire 3, on a proposé pour la gravitation des analogues des équations de Maxwell. Ces analogues nous ont permis de retrouver des équations d'onde pour la gravitation semblables à celles de l'électromagnétisme.

Néanmoins, malgré toutes ces analogies, il subsiste une différence importante à laquelle aucune explication n'a été apportée. On observe deux natures de charge électrique et une seule nature de masse. Pourquoi ?

IX.1.2 L'électron qui remonte le Temps

Comme souvent dans cet essai, on cherche à comprendre si les différences entre électricité et gravitation, ne peuvent pas s'expliquer simplement par des changements de référentiels et par des mouvements différents dans l'Espace-Temps ?

En quelque sorte, on utilise le vieux « truc » d'A. Einstein et on reprend le vieil objectif de John Archibald Wheeler et de Richard Feynman. Dans les années 1940, ces deux physiciens avaient proposé d'expliquer la différence de nature entre l'électron et le positron par un mouvement différent dans le Temps : l'électron avance dans le Temps par exemple dans le même sens que nous observateurs humains, le positron avance dans le Temps dans le sens opposé à nous.

Cette interprétation des charges + et – permet de proposer une explication convaincante et intuitive à l'annihilation entre un électron et un proton. En effet, cette annihilation est interprétée comme un électron effectuant un demi-tour dans le Temps et se transformant en positron. Positron et électron sont donc ici les deux faces d'une même particule, se différenciant par une inversion de leur avancée dans le Temps (on y reviendra dans le 6ème mémoire).

Nota

Dans les années 1950, J. A. Wheeler, poursuivant les travaux d'A. Einstein sur la Relativité générale, travailla sur une théorie baptisée Géométrodynamique. Cette théorie fut une tentative de décrire l'Espace-Temps en termes de géométrie et éventuellement de mouvements, sans recours à la notion de matière (on a d'ailleurs suivi un objectif similaire, lorsque dans le 2ème mémoire, on a proposé d'interpréter la masse comme un analogue dans le Temps de la vitesse dans l'Espace).
La géométrodynamique est aussi à rapprocher du super-substantialisme, une doctrine selon laquelle l'Espace-Temps est l'unique substance physique de l'Univers. Toutes les propriétés physiques consistent alors en des propriétés, des points ou des régions de l'Espace-Temps.

Pour revenir à notre objectif initial : comprendre pourquoi 2 natures de charge et 1 seule nature de masse, notons que l'idée d'un électron qui remonte le Temps, ne peut à priori se transposer à celle d'une masse qui remonte le Temps. En effet, il n'existe pas de masse négative. L'analogie électromagnétisme et gravitation ne fonctionne donc pas à priori ici.
Néanmoins, dans les prochains paragraphes, on va regarder si, poursuivant davantage l'analogie entre gravitation et électromagnétisme, il ne serait pas possible de la rendre compatible avec l'idée de J. A. Wheeler et R. Feynman : celle d'un électron remontant le Temps ?
Préalablement, faisons quelques rappels sur les moments dipolaires.

IX.2 Rappels sur les moments dipolaires et sur les dipôles

IX.2.1 Moment dipolaire d'un dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique est défini par une répartition de charges électriques de somme nulle, avec un barycentre des charges positives ne coïncidant pas avec celui des charges négatives. Le dipôle le plus simple est un couple de charges de signe opposé, distantes d'une longueur $2a$. On a la figure suivante :

Dipôle électrostatique

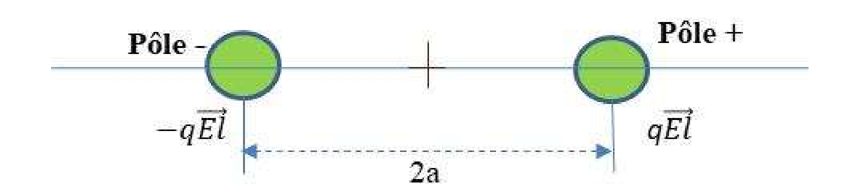


Figure 15 : dipôle électrostatique le plus simple

On définit usuellement un moment dipolaire $\vec{\mu}$ d'un dipôle électrostatique, orienté de la charge –q vers la charge +q par la formule :

$$\vec{\mu} = 2q\vec{a}$$

Pour calculer le champ électrostatique généré par ce dipôle, on se place fréquemment dans le cas où $r = OM \gg a$ (avec O le centre du dipôle). On obtient des composantes radiales et orthoradiales simples pour le champ électrostatique :

$$El_r = -\frac{\partial A^t}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mu \, cos\theta}{r^3}$$

$$El_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial A^t}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mu \, sin\theta}{r^3}$$

avec $\theta = (\vec{\mu}, \overrightarrow{OM})$.

On note que pour un dipôle électrostatique, on a une diminution plus rapide du champ électrostatique, en $\frac{1}{r^3}$, au lieu de $\frac{1}{r^2}$ pour une charge ponctuelle.

Les lignes de champ électrostatique répondent à l'équation :

$$r = Ksin^2\theta$$

On obtient des lignes de champ :

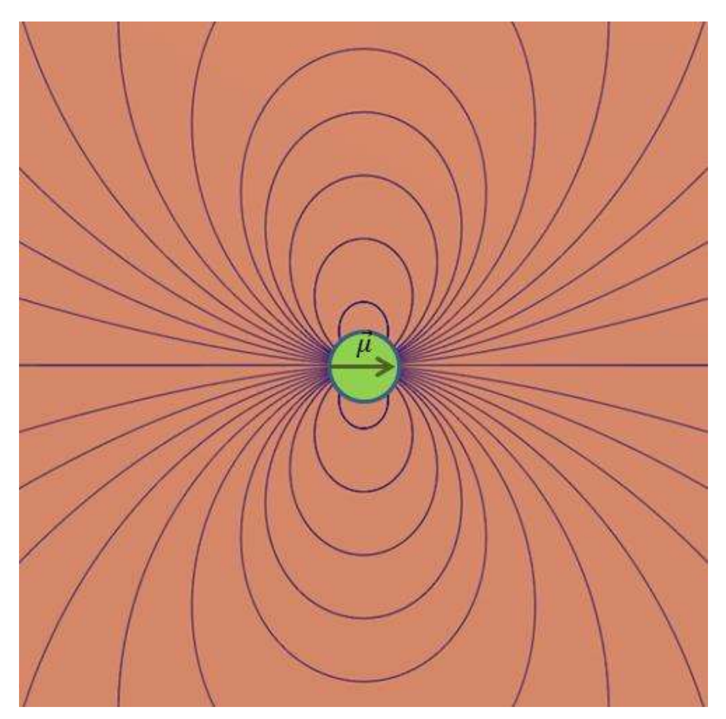


Figure 16 : lignes de champs pour dipôles électrostatique ou magnétique

Nota sur la réorientation du champ électrique
Comme on propose de réorienter le champ électrique (mais pas la force électrique), ces lignes de champ correspondent aux directions d'une force électrique, à laquelle serait soumise une charge électrique ponctuelle.

On a l'énergie potentielle d'un dipôle $\vec{\mu}$ placé dans un champ électrique extérieur $\overrightarrow{El}$:

$$E_p = -\vec{\mu}.\overrightarrow{El}$$

On a le couple exercé sur le dipôle $\vec{\mu}$ par un champ électrique extérieur $\overrightarrow{El}$:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \overrightarrow{El}$$

IX.2.2 Moment dipolaire d'un dipôle magnétique

Dans les conditions de la magnétostatique, on définit usuellement le moment magnétique (orbital) $\vec{\mu}$ d'un dipôle magnétique sous la forme :

$$\vec{\mu} = \iint_S Id\vec{s} = I\vec{S}$$

avec I le courant électrique,
$\vec{S}$ et $d\vec{s}$ perpendiculaires aux surfaces S et ds,
$\vec{n}ds = d\vec{s}$ vecteur unitaire perpendiculaire à la surface ds.

Pour calculer le champ magnétique généré par ce dipôle magnétique, on se place fréquemment dans le cas où $r = OM \gg a$ (avec O le centre du dipôle magnétique). Cela permet d'obtenir des composantes radiales et orthoradiales simples pour le champ magnétique :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu\, cos\theta}{r^3}$$
$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu\, sin\theta}{r^3}$$

avec $\theta = (\vec{\mu}, \overrightarrow{OM})$.

Les lignes de champ magnétique répondent également à l'équation :

$$r = Ksin^2\theta$$

IX.2.3 Moment dipolaire d'un dipôle cinétique

On a les analogies suivantes entre les moments dipolaires d'un dipôle électrostatique, magnétique et cinétique :

	Electrostatique Dipôle électrostatique	**Magnétostatique Dipôle magnétique**	**« Pulsatiostatique » ou « cinétostatique » Dipôle cinétique**
Equation source champ	$\frac{\vec{\rho}^{t}_{xy}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}l^{1/y}_{xt}}{\partial x}$	$\mu_0 \vec{J}^{y}_{xt} = \frac{\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$	$-\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^{x}}{dt})^{y}_{xt} = \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$
Indépendance du Temps	Charges statiques	$\frac{\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t} = \vec{0}$	$\frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial t} = \vec{0}$
Densité linéique	$\vec{\lambda}^{t}$	$\vec{I}^{y}$	$\vec{p}^{y}$
Moment dipolaire $\vec{\mu}$	$\vec{\mu} = 2q\vec{a}$ Moment dipolaire électrostatique	$\vec{\mu} = I\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge q\vec{v}$ Moment dipolaire magnétique	$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge m\vec{v}$ Moment dipolaire cinétique
Energie potentielle du dipôle dans un champ extérieur (champs non réorientés)	$E_p = -\vec{\mu}.\vec{El}$	$E_p = -\vec{\mu}.\vec{B}$	$E_p = -\vec{\mu}.2\vec{\Omega}$
Couple exercé sur le dipôle par un champ extérieur (champs non réorientés)	$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{El}$	$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$	$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge 2\vec{\Omega}$

Comme les énergies potentielles E_p (en valeur absolue) tendent à être maximisées et que les couples $\vec{\Gamma}$ (en module) tendent à être minimisée, les différents moments dipolaires $\vec{\mu}$ tendent à s'orienter suivant les lignes de champ.

On symbolise sur les schémas suivants, les dipôles électrostatique, magnétique, cinétique et « gravitostatique », par 2 sources de sens différents, proches dans l'Espace et séparées de *2a*, et une somme nulle de ces 2 sources dès qu'on s'en écarte un peu dans l'Espace.

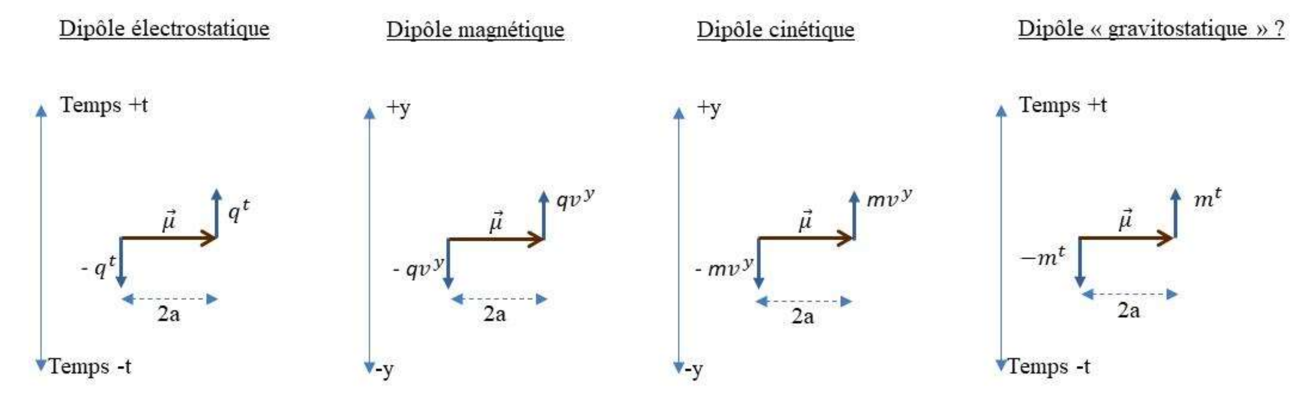


Figure 17 : schémas soulignant les analogies entre les 4 dipôles

En l'absence de 2 types de masse, positive et négative, il n'existe pas à priori de dipôle « gravitostatique ».
Dans les prochains paragraphes, on va s'intéresser aux marées. On va voir qu'on observe un phénomène présentant des ressemblances avec un dipôle « gravitostatique ». En effet, sous l'effet d'un champ gravitationnel extérieur, on observe la polarisation d'une masse statique, c'est-à-dire l'apparition de 2 pôles différenciés.

IX.3 Modèle statique I des marées, existence d'un dipôle « gravitostatique » ?

IX.3.1 Modèle simplifié des marées

On propose dans cette partie et dans les 2 suivantes, des modèles simplifiés des marées observées sur la Terre, reposant sur la conjugaison de 2 phénomènes :

- le premier phénomène est la déformation de la Terre (apparition de 2 renflements ou bourrelets de part et d'autre de la Terre), déformation due notamment à la force de gravitation générée par la Lune (et aussi par Soleil). On parlera de marée statique. On étudiera ce phénomène dans cette partie et la suivante,
- le deuxième phénomène est le déplacement de ces 2 renflements suite aux mouvements de la Terre par rapport à la Lune (et au Soleil). On parlera de marée dynamique. On s'arrêtera sur le mouvement le plus simple et le plus impactant : celui de la rotation sur elle-même de la Terre par rapport à la lune. Il permet déjà de bien appréhender les variations du niveau des océans lors d'une période de rotation.

On utilisera 2 planètes :

- une planète T composée d'un noyau dur, pas ou peu déformable (en marron), entouré d'une couche déformable (en bleu) et pouvant symboliser un immense océan.
- une planète L formée d'un matériau (en gris) unique et déformable.

Pour expliquer les 2 renflements, on se placera toujours dans des cas statiques, c'est-à-dire une Terre et une Lune immobiles l'une par rapport à l'autre. On va ici évoquer 2 modèles statiques souvent utilisés pour expliquer les marées statiques. Ces 2 modèles statiques parviennent au même résultat, l'explication de 2 renflements totalement symétriques par rapport à plan de coupe de la Terre (plan passant par son centre et perpendiculaire à l'axe Terre Lune). Ils présentent néanmoins de subtiles différences intéressantes à étudier.

Nota
On utilise le terme de planète pour la Lune, même s'il s'agit d'une lune.

IX.3.2 Etude d'un système à 2 masses déformables et statiques

L'électrostatique étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Dans ce mémoire, par analogie, on parle de « gravitostatique » pour des masses statiques. Dans ce chapitre, ces masses seront en outre déformables pour l'observateur.

On suppose ici que les 2 planètes T et L sont statiques l'une par rapport à l'autre. La distance entre leurs 2 centres reste constante. Sous les effets de l'une et de l'autre, ces 2 planètes (qui seules dans l'Univers seraient de forme sphérique) se déforment. Par exemple, sous l'effet de la force gravitationnelle de la planète L sur la planète T, 2 renflements se forment sur la planète T.

On explique la formation de ces 2 renflements par une force gravitationnelle de la planète L sur la planète T qui diminue avec la distance, et donc par des masses de la planète T soumises à des forces gravitationnelles de valeurs différentes.

Au centre de la planète T, on pose une masse *m* soumise à la force gravitationnelle :

$$\vec{P} = m\vec{G}r$$

Dans le 1er renflement de la planète T, les masses (plus proches de la planète L) sont soumises à une force gravitationnelle $\vec{P}$ plus importante qu'au centre (la différence est notée par le champ gravitationnel $\vec{\Lambda}$) :

$$\vec{P} = m(\vec{G}r + \vec{\Lambda})$$

Ces masses vont être davantage attirées (que les autres masses de la planète T) et vont donc avoir tendance à se rapprocher de la planète L. Il apparait sur la planète T un 1er renflement, juste face à la planète L.

Dans le 2ème renflement de la planète T, les masses (plus loin de la planète L) sont soumises à une force gravitationnelle $\vec{P}$ moins importante qu'au centre (la différence est notée par le champ gravitationnel $-\vec{\Lambda}$) :

$$\vec{P} = m(\vec{G}r - \vec{\Lambda})$$

Ces masses vont être moins attirées (que les autres masses de la planète T) et vont donc avoir tendance à s'éloigner de la planète L. Il apparait sur la planète T un 2ème renflement, de l'autre côté de la planète, symétrique au 1er renflement, et dont l'existence est due à une raison opposée.

La planète L se déforme sous l'effet de la force gravitationnelle de la planète T, et 2 renflements apparaissent également. On a le schéma suivant :

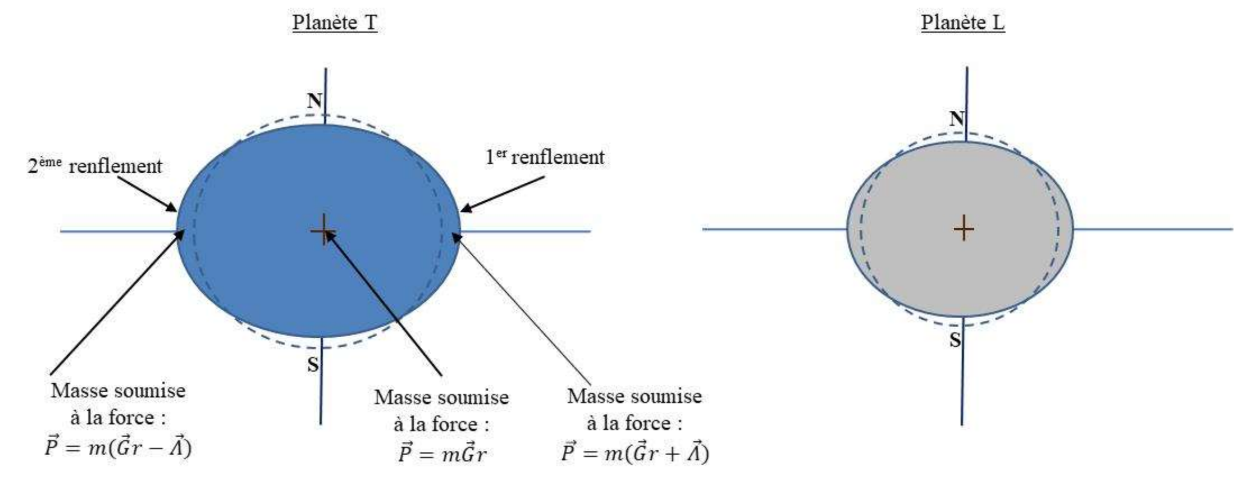


Figure 18 : planètes T et L se déformant sous les effets l'une de l'autre

Nota sur les échelles
Ni les planètes, ni les renflements ne sont ici à l'échelle.

Nota sur les forces centrifuges
Si ces 2 planètes étaient soumises seulement aux forces gravitationnelles, elles s'attireraient et finiraient pas s'écraser l'une contre l'autre. On suppose donc ici implicitement que d'autre forces interviennent et retiennent leurs centres, de façon à ce qu'ils soient statiques l'un par rapport à l'autre.

Nota sur les aplatissements aux pôles Nord et Sud de la Terre
Pour la Terre, les aplatissements que l'on observe au pôle Nord et au pôle Sud ne sont pas (ou très peu) dus à la force gravitationnelle. Ils sont essentiellement causés par la force centrifuge générée par la rotation de la Terre sur elle-même.

Sur les schémas suivants, on propose pour les planètes T et L, une élévation, des coupes frontales et transverses. A noter que pour des raisons de symétrie, les coupes frontales et transverses sont en fait identiques pour chaque planète.

On note aussi un léger aplatissement sur les côtés qui vient compenser, au niveau matière, les 2 renflements.

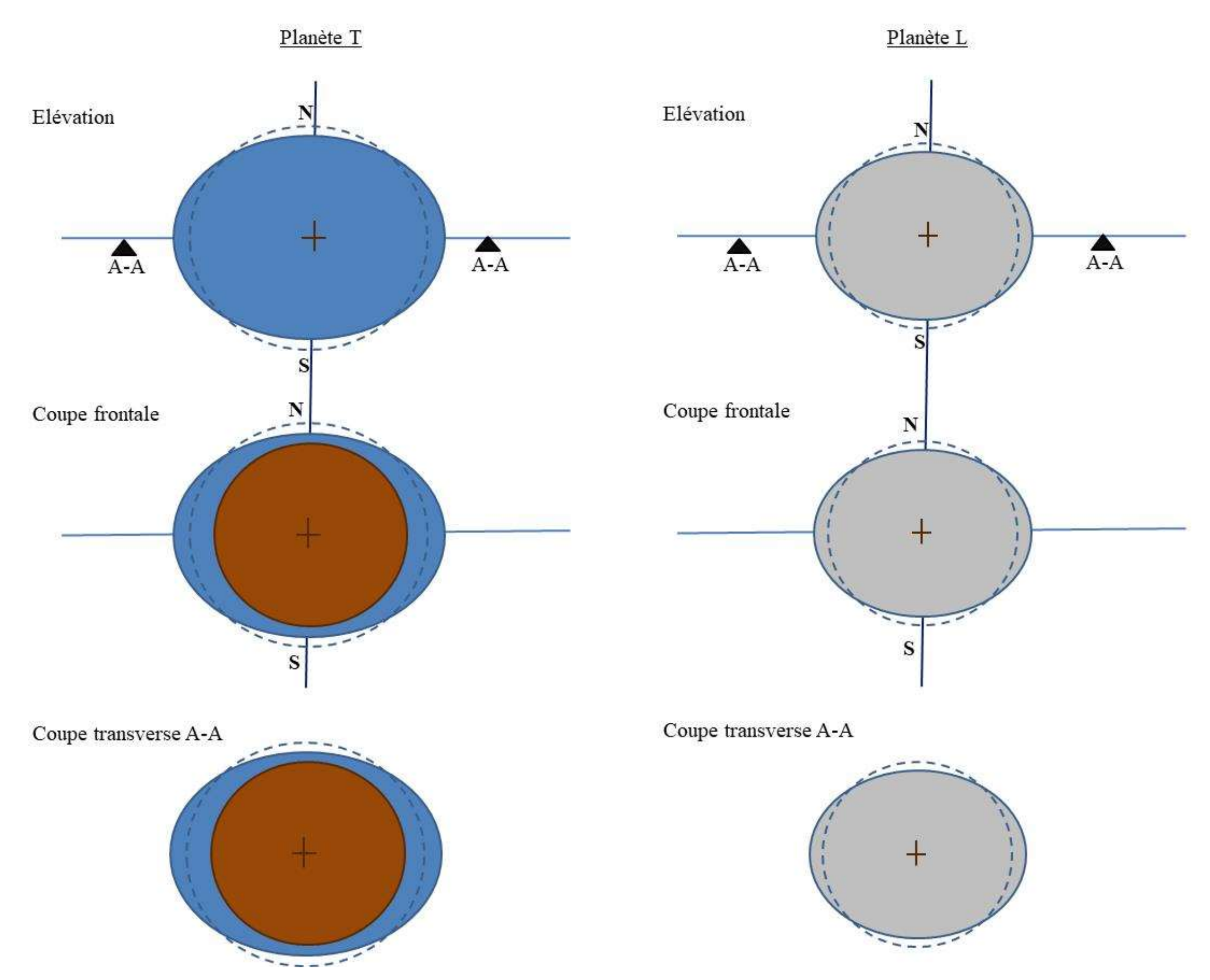


Figure 19 : planètes T et L, élévations et coupes

IX.3.3 Dipôle « gravitostatique »

On observe que les 2 renflements, qui se créent sur la planète T dans le cas de la « gravitostatique », sous l'effet de la force gravitationnelle de la planète L, s'apparentent à un phénomène de polarisation de la planète T. Il y a en effet apparition d'un pôle + et d'un pôle -, avec différenciation de ces 2 pôles.

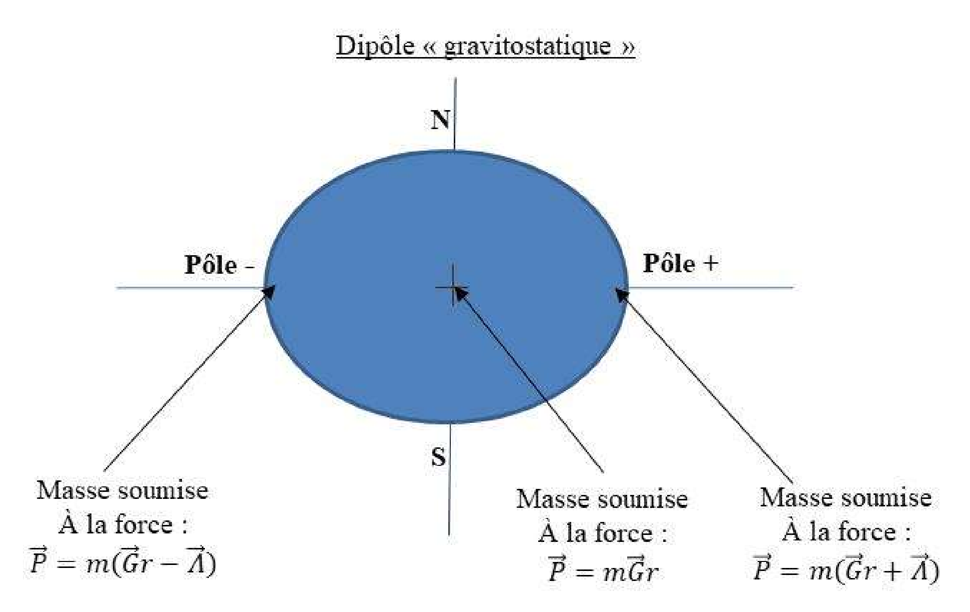


Figure 20 : dipôle « gravitostatique »

Dans le cas où on prend comme référence pour le poids :

$$\vec{P} = m\vec{G}r = \vec{0}$$

On trouve comme une masse positive au pôle +, et comme une masse négative au pôle -. Sur le schéma suivant, on souligne les analogies entre dipôle « gravitostatique » et dipôle électrostatique.

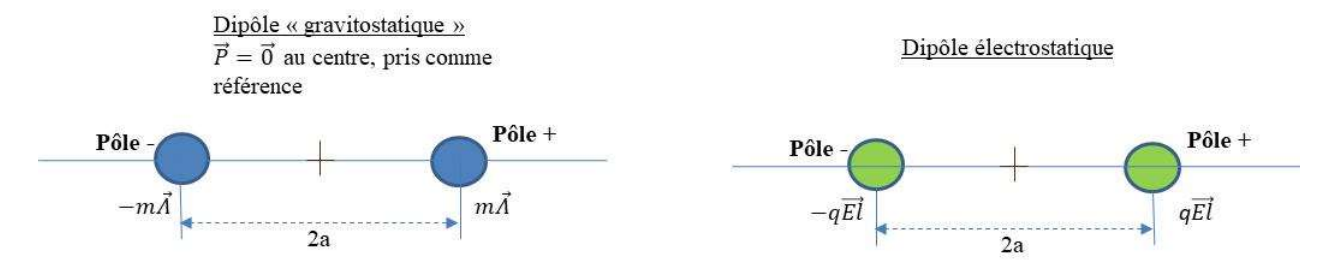


Figure 21 : analogies entre dipôles

IX.4 Modèle statique II des marées, existence de forces attractive et répulsive pour la gravitation ?

IX.4.1 Etude d'un système à 2 masses déformables et statiques l'une par rapport à l'autre, système en rotation sur lui-même par rapport à un référentiel galiléen

On suppose maintenant que le système Terre Lune tourne sur lui-même par rapport à un référentiel galiléen, avec comme centre de rotation le centre de masse du système Terre Lune (c'est-à-dire le barycentre pondéré par les masses du système Terre Lune).

Par rapport au modèle I, le modèle II peut sembler un peu plus compliqué. Il nécessite en effet l'introduction d'un mouvement supplémentaire, celui de la rotation sur lui-même du système Terre Lune. Néanmoins, il présente un avantage non négligeable : il se suffit à lui-même pour expliquer que la Terre et la Lune sont statiques l'une par rapport à l'autre.
En effet, dans le modèle I, on n'a qu'une force attractive. Pour éviter que la Terre et la Lune n'entrent en collision (puisqu'elles s'attirent l'une et l'autre), il faut supposer l'existence d'autres forces ou d'autres mouvements qui stabilisent le système.

Pour effectuer des expériences sur ce système, il faudrait utiliser comme 2 longs piquets soutenant respectivement la Terre et la Lune et étudier alors les déformations de chaque planète induites par l'autre planète.

Dans le modèle II, grâce au mouvement de rotation, on obtient une force répulsive centrifuge, qui équilibre la force attractive gravitationnelle. Le système est stabilisé, statique, de façon interne. En particulier, la distance entre les centres de la Terre et de la Lune reste constante. Nul besoin de faire appel à une force ou à un autre mouvement.

Force attractive gravitationnelle

Pour le premier renflement de la Terre (celui face à la Lune), on l'explique comme dans le modèle I par la force attractive gravitationnelle de la Lune sur la Terre. Par cette seule force, on obtient un premier renflement à priori un peu plus important que dans le modèle I.

On donne l'expression de la force gravitationnelle en un point M de la Terre :

$$\vec{F}_{Gr}(M) = m\frac{Gm_L}{r^2}\vec{u}_{ML}$$

avec :
r distance entre un point M de la Terre et le centre L de la Lune,
m masse du volume étudié au point M,
m_L masse de la Lune,
$\vec{u}_{ML}$ vecteur unitaire orienté du point M vers le centre L de la Lune.

On a les déformations suivantes (qui ne sont pas à l'échelle réelle) :

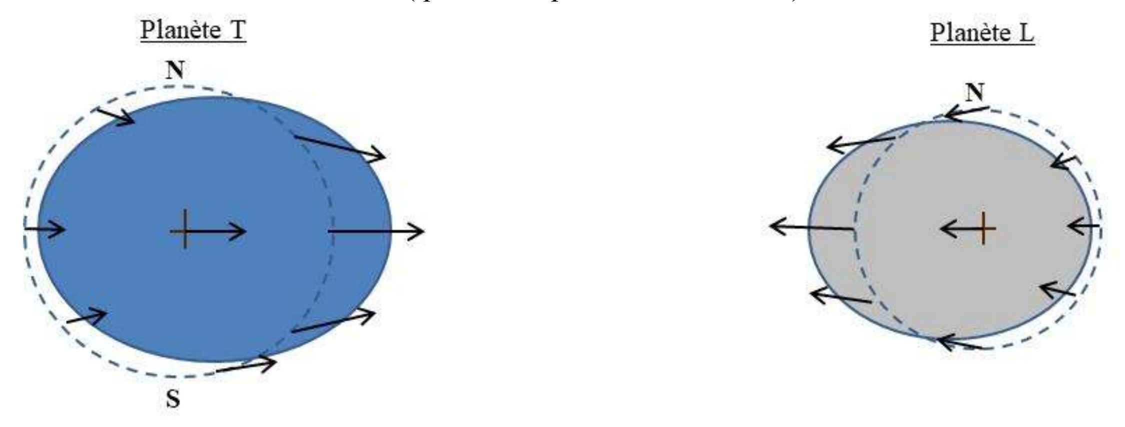


Figure 22 : force attractive gravitationnelle qui crée un premier renflement

Force centrifuge (répulsive)

Pour expliquer le 2ème renflement, on suppose que le système Terre Lune possède une rotation sur lui-même par rapport à un référentiel galiléen, avec W le centre de masse du système Terre Lune défini également comme le centre de cette rotation. On a la vitesse de rotation :

$$\Omega_M = \frac{2\pi}{\mathrm{T}_M}$$

avec $\mathrm{T}_M = 27{,}3\ jours$ (assez proche d'un mois ou d'un cycle menstruel)

A souligner que l'on reste toujours dans le cas de la statique, puisque la Terre et la Lune sont toujours statiques l'une par rapport à l'autre.

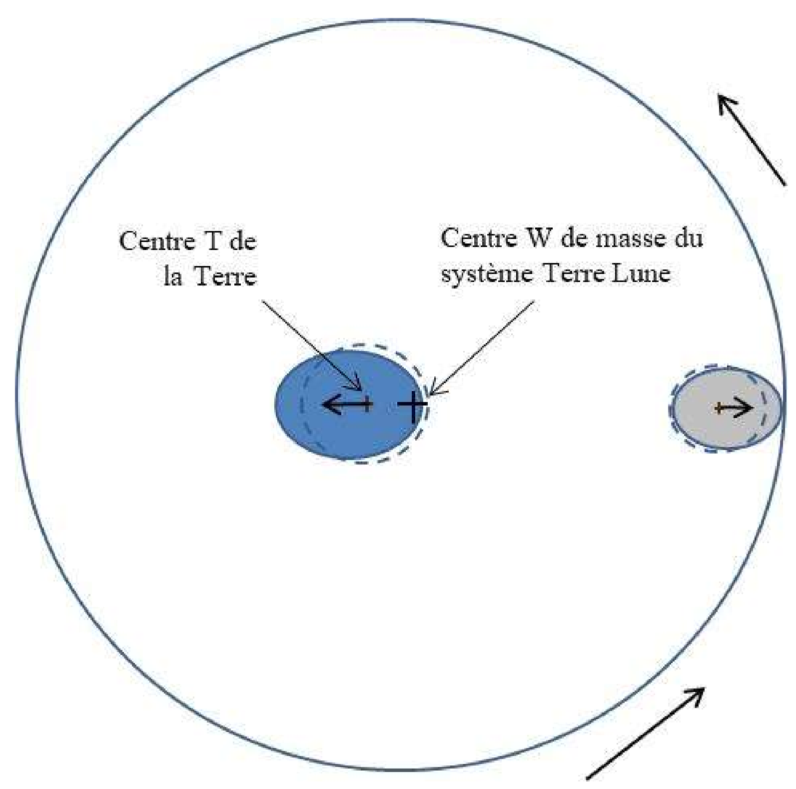


Figure 23 : le système Terre Lune sur un « manège » de centre W et de vitesse de rotation $\Omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$

Nota
Dans la réalité, la Lune est bien plus petite que la Terre, et le centre de masse du système Terre Lune est comme sur la figure ci-dessus, localisé à l'intérieur de la Terre.

Par hypothèse, les centres de la Terre et de la Lune sont statiques l'un par rapport à l'autre. Dans le référentiel R^{Ω_M}, ils sont donc statiques ou immobiles. Dans ce référentiel R^{Ω_M}, on applique le principe fondamental de la dynamique de Newton, pour une masse *m* localisée au point T centre de la Terre :

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

Nota
On note souvent R^* le référentiel du centre de masse *W* du système étudié (ici la Terre et la Lune). Soulignons, que dans l'exemple étudié, R^* est considéré comme un référentiel galiléen. On passe de R^* à R^{Ω_M} en annulant la vitesse de rotation Ω_M et en ajoutant alors la force d'inertie centrifuge $\vec{F}_{cen}(T)$ lorsqu'on applique le principe fondamental de la dynamique dans R^{Ω_M}.

On a donc, en incluant la force centrifuge (force d'inertie) :

$$\vec{F}_{cen}(T) + \vec{F}_{Gr}(T) = \vec{0}$$
$$\vec{F}_{cen}(T) = -\vec{F}_{Gr}(T)$$

Pour une masse *m* localisée en T, on a :

$$\vec{F}_{cen}(T) = m\vec{a}_{cen}(T) = -m\Delta_{TW}{\Omega_M}^2\vec{u}_{TL}$$
$$\vec{F}_{Gr}(T) = m\vec{G}r(T) = m\frac{Gm_L}{{\Delta_{TL}}^2}\vec{u}_{TL}$$

On a donc :

$$\vec{F}_{cen}(T) = m\vec{a}_{cen}(T) = -m\vec{G}r(T)$$

$$\vec{F}_{cen}(T) = -m\Delta_{TW}{\Omega_M}^2\vec{u}_{TL} = -m\frac{Gm_L}{{\Delta_{TL}}^2}\vec{u}_{TL}$$

avec les notations suivantes :
m masse du volume étudié,
T centre de la Terre,
L centre de la Lune,
W centre de masse du système Terre Lune,
Δ_{TL} distance entre le centre de la Terre et celui de la Lune,
Δ_{TW} distance entre le centre de la Terre et le centre de masse W,
Δ_{LW} distance entre le centre de la Lune et le centre de masse W,
m_L masse de la Lune,
m_T masse de la Terre,
Ω_M vitesse de rotation sur lui-même du système Terre Lune,
T_M période de rotation sur lui-même du système Terre Lune dans un référentiel galiléen,
$\vec{u}_{TL}$ vecteur unitaire dans le sens Terre Lune,
$\vec{u}_{LT}$ vecteur unitaire dans le sens Lune Terre.

On a des équations analogues côté Lune :

$$\vec{F}_{cen}(L) = m\vec{a}_{cen}(L) = m\vec{G}r(L)$$

$$\vec{F}_{cen}(L) = -m\Delta_{LW}{\Omega_M}^2\vec{u}_{LT} = m\frac{Gm_T}{{\Delta_{LW}}^2}\vec{u}_{LT}$$

$$\vec{a}_{cen}(L) = -\Delta_{LW}{\Omega_M}^2\vec{u}_{LT}$$

$$\vec{G}r(L) = \frac{Gm_T}{{\Delta_{LW}}^2}\vec{u}_{LT}$$

Pourquoi la force centrifuge est-elle identique en tout point de la Terre ?

La force centrifuge en un point M est fonction de la distance entre M et le centre de la rotation. Or, dans le cas étudié, tous les points de la Terre n'ont pas bien sûr la même distance au centre de masse W.

En fait, dans le cas d'une rotation solide, tous les points de la Terre ne tournent pas autour de W. Ils tournent autour d'autres points. Par contre, ils accomplissent tous une rotation de rayon Δ_{TW} et de période T_M. Ainsi, ils sont tous soumis à la même force centrifuge. Le schéma suivant aide à mieux comprendre.

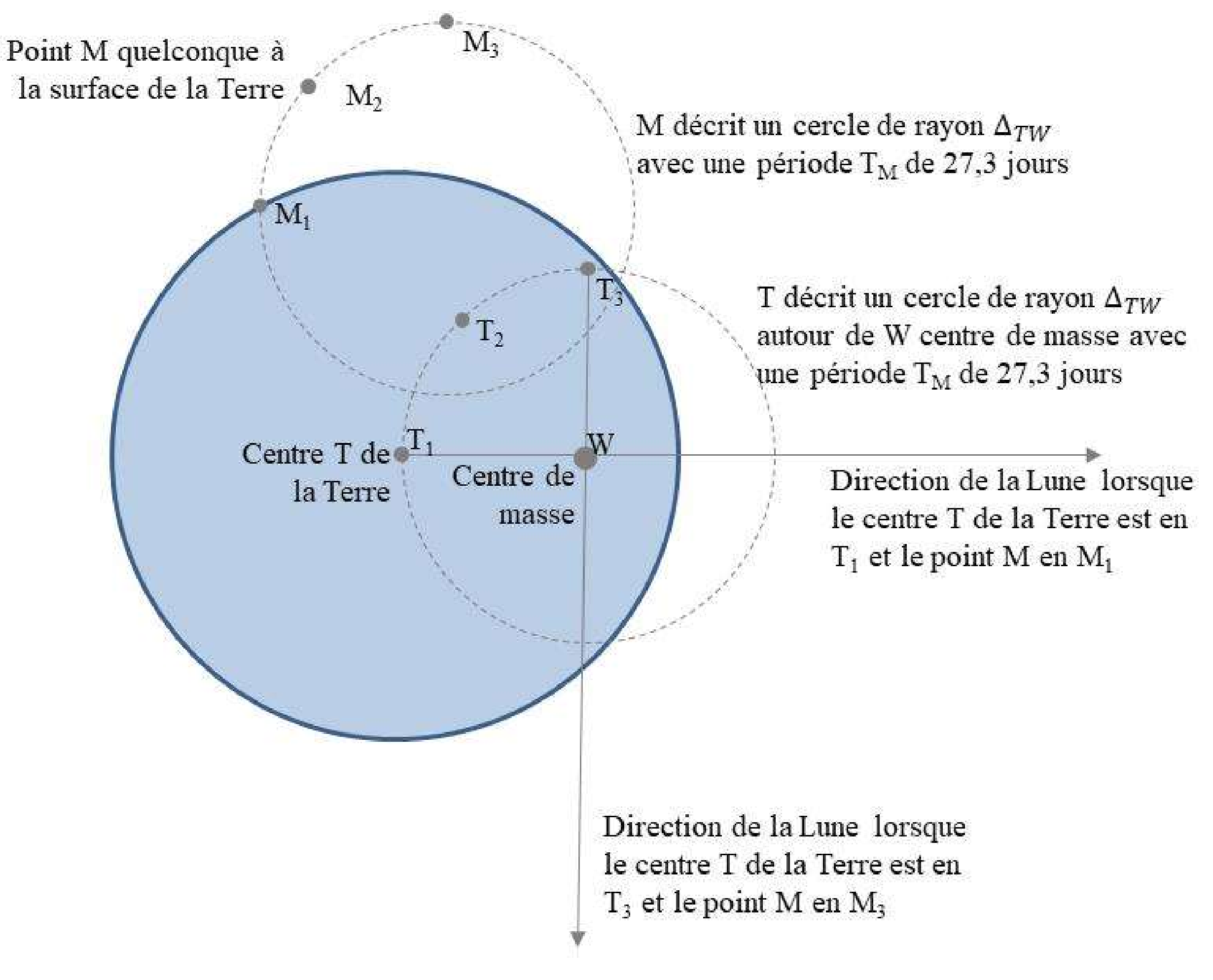


Figure 24 : rotation solide de la Terre

On note que les vecteurs $\overrightarrow{T_1M_1}$, $\overrightarrow{T_2M_2}$, $\overrightarrow{T_3M_3}$…, ont même direction, même sens et même norme au cours du Temps. On dit qu'ils sont équipollents.
Les trajectoires de tous les points de la Terre forment des cercles de même rayon. On est pour la Terre (et aussi pour la Lune) dans le cas d'un mouvement de translation circulaire.

On a donc pour un point M quelconque de la Terre :

$$\vec{F}_{cen}(T) = m_T\vec{a}_{cen}(T) = \vec{F}_{cen}(M) = m_T\vec{a}_{cen}(M)$$
$$\vec{a}_{cen}(T) = \vec{a}_{cen}(M) = -\Delta_{TW}{\Omega_M}^2\vec{u}_{TL}$$

Or :

$$\vec{F}_{cen}(T) = -m\frac{Gm_L}{{\Delta_{TL}}^2}\vec{u}_{TL}$$

Donc :

$$\vec{F}_{cen}(M) = -m\Delta_{TW}{\Omega_M}^2\vec{u}_{TL} = -m\frac{Gm_L}{{\Delta_{TL}}^2}\vec{u}_{TL}$$

Nota
Les orbites des différents points de la Terre sont en réalité légèrement elliptiques, mais pour simplifier le modèle, nous les considérerons ici comme circulaires.
Cette force centrifuge ne doit pas être confondue avec celle due à la rotation de la Terre sur elle-même (spin) qui augmente avec la distance du point considéré à l'axe de rotation.

On schématise les déformations de la Terre et de la Lune dues à la rotation du système Terre Lune :



Figure 25 : force répulsive centrifuge qui crée un deuxième renflement

Force de marée, somme vectorielle de la force attractive gravitationnelle et de la force répulsive centrifuge

Pour une masse *m* localisée en M et soumise à la force de marée, on a la figure suivante :

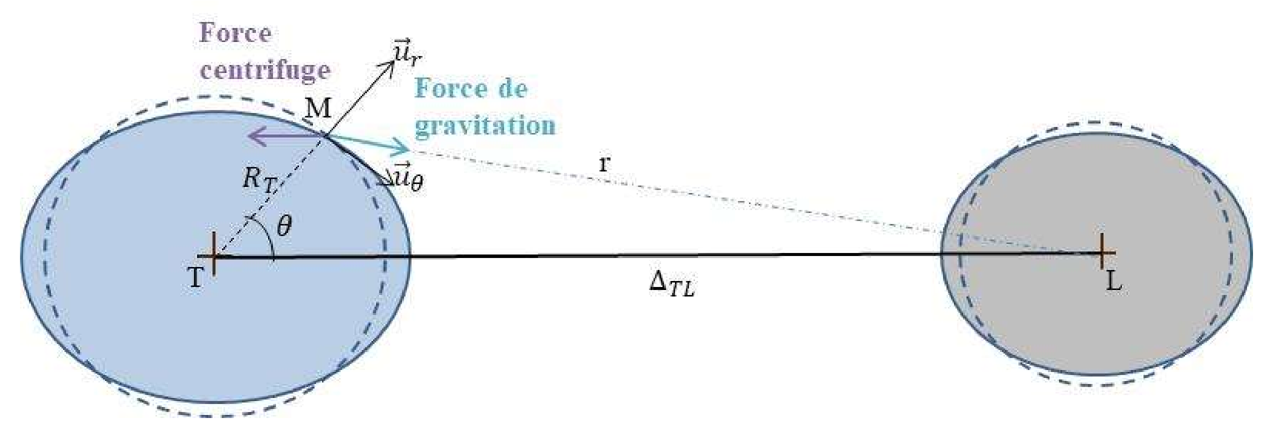


Figure 26 : superposition force attractive et répulsive

On rappelle les 2 forces auxquelles est soumise cette masse *m* localisée en M :

$$\vec{F}_{cen}(M) = -m\frac{Gm_L}{{\Delta_{TL}}^2}\vec{u}_{TL}$$

$$\vec{F}_{Gr}(M) = m\frac{Gm_L}{r^2}\vec{u}_{ML}$$

Lorsqu'on additionne les effets de la gravitation et les effets de la force centrifuge, on obtient la force de marée :

$$\vec{F}_{Marée}(M) = \vec{F}_{Gr}(M) + \vec{F}_{cen}(M)$$

$$\vec{F}_{Marée}(M) = m(\frac{Gm_L}{r^2}\vec{u}_{ML} - \frac{Gm_L}{{\Delta_{TL}}^2}\vec{u}_{TL})$$

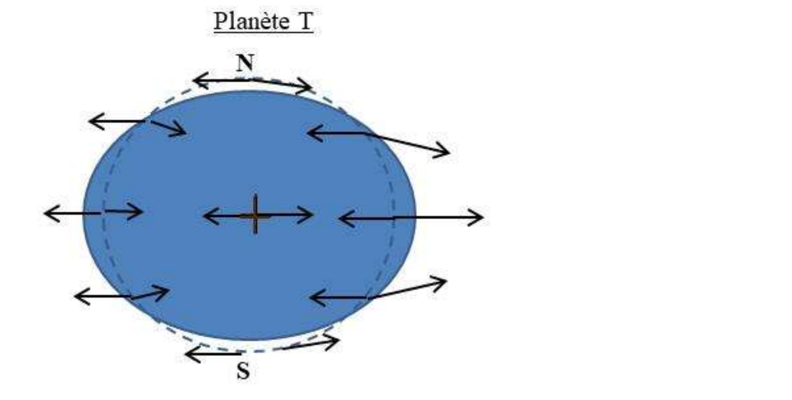
avec :
m masse du volume étudié,
Δ_{TL} la distance entre le centre de la Terre et celui de la Lune,
r la distance entre un point M de la Terre et le centre L de la Lune,
R_T le rayon de la Terre,
m_L la masse de la Lune.

Puis en effectuant quelques simplifications, avec $\Delta_{TL} \gg R_T$, on obtient en projetant sur les axes du point M considéré :

$$\vec{F}(M) \approx mg\frac{m_L}{m_T}(\frac{R_T}{\Delta_{TL}})^3((3cos^2\theta - 1)\vec{u}_r + \frac{3}{2}sin2\theta\vec{u}_\theta)$$
$$\|\vec{F}(M)\| \approx mg\frac{m_L}{m_T}(\frac{R_T}{\Delta_{TL}})^3\sqrt{3cos^2\theta + 1}$$

avec :
la constante $g = \frac{Gm_T}{{R_T}^2}$ accélération de la pesanteur à la surface de la Terre,
θ la latitude du point M considéré.

On a les déformations des 2 planètes avec indiquées les forces attractives et répulsives :



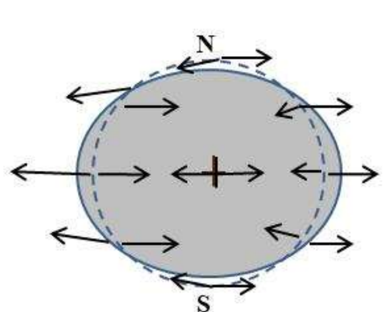
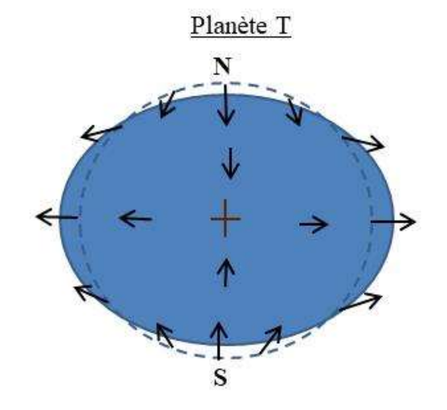


Figure 27 : forces attractives et répulsives

On a les déformations avec indiquées les forces de marée :



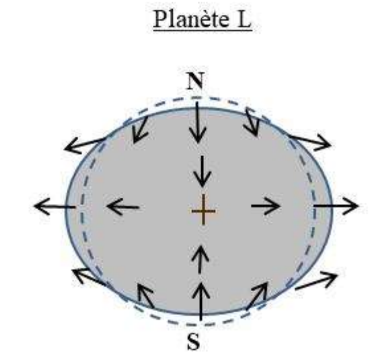


Figure 28 : forces des marées

Pourquoi les 2 renflements sont identiques alors que les causes sont différentes ?
La force attractive gravitationnelle déforme la Terre. Néanmoins, ces déformations sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe Terre Lune, plan légèrement décalé vers la Lune par rapport au centre T de la Terre.
La force répulsive centrifuge a pour effet, en quelque sorte, de décaler ce plan et de le faire passer par le centre T de la Terre. Ainsi, les 2 renflements sont symétriques par rapport à ce plan passant par T et perpendiculaire à l'axe Terre Lune.

IX.4.2 Rapprocher la « gravitostatique » et l'électrostatique ?

Dans le modèle statique II, on relève la présence de deux forces, l'une répulsive et l'autre attractive, comme dans le cas de l'électrostatique.

Retenons de l'étude de ce modèle II, que tout système à 2 corps statiques l'un par rapport à l'autre, et en rotation sur lui-même par rapport à un référentiel galiléen, peut être interprété par un observateur localisé dans ce référentiel galiléen, comme présentant une force répulsive entre ces 2 corps.

Lorsqu'un observateur constate une répulsion entre 2 charges électriques, il explique usuellement cette répulsion par un signe identique des 2 charges (charges + ou charges -). Pourrait-il finalement expliquer cette répulsion par un système à 2 corps possédant une rotation sur lui-même, et générant une force centrifuge supérieure à la force attractive entre les 2 corps ?
De même, lorsqu'un observateur constate une attraction entre 2 charges électriques, il explique usuellement cette répulsion par un signe opposé des 2 charges (charges + et charges -). Pourrait-il finalement expliquer cette attraction par un système à 2 corps possédant une rotation sur lui-même, et générant une force centrifuge inférieure à la force attractive entre les 2 corps ?
Ces interprétations rapprocheraient électrostatique et « gravitostatique », avec des corps (ou des charges) de même nature. Ces corps se distingueraient simplement par leurs mouvements respectifs et expliqueraient l'existence de forces attractives et répulsives.

IX.4.3 Expliquer 2 natures de charge électrique simplement par des mouvements ?

Modèle de l'atome d'hydrogène de Bohr, proton et électron

Dans le modèle de l'atome d'hydrogène de Bohr, le proton est généralement considéré comme fixe par rapport à un référentiel galiléen, et l'électron comme tournant autour du proton. L'électron est « stabilisé » par une force électrique attractive et une force centrifuge répulsive fonction de la vitesse de l'électron dans le référentiel galiléen.
Notons que dans ce modèle de Bohr, nous ne sommes pas dans le cas de l'électrostatique, puisque les 2 charges + et -, sont mobiles l'une par rapport à l'autre.

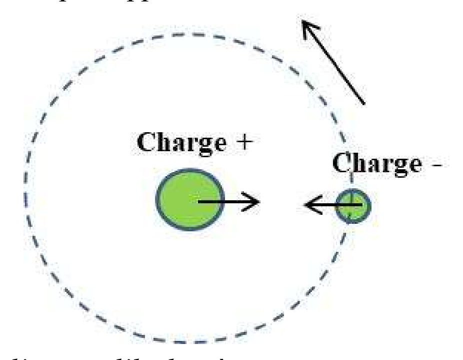


Figure 29 : modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Modèle avec 2 charges de même nature, statiques l'une par rapport à l'autre, tournant sur un « manège » (charges en mouvement de translation circulaire)

Dans ce modèle, on est à nouveau dans le cas de l'électrostatique. Lorsque le manège tourne dans un sens, par exemple le sens horaire, les 2 charges + se repoussent sous l'effet de la force centrifuge. Lorsque le manège tourne dans l'autre sens, les 2 charges - se repoussent également sous l'effet de la force centrifuge. La différence de nature entre les charges + et - est ici expliquée par le sens de rotation du manège.

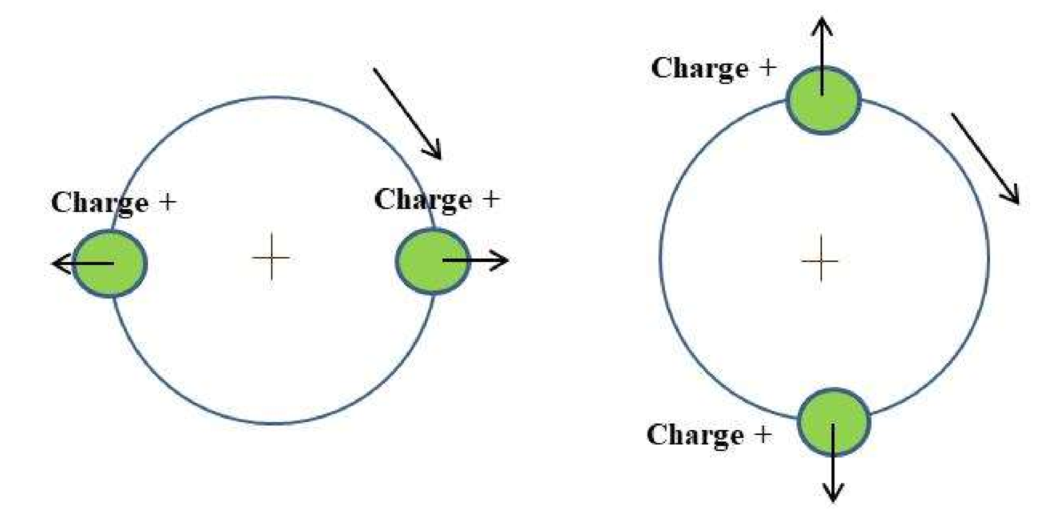


Figure 30 : 2 charges + sur un manège

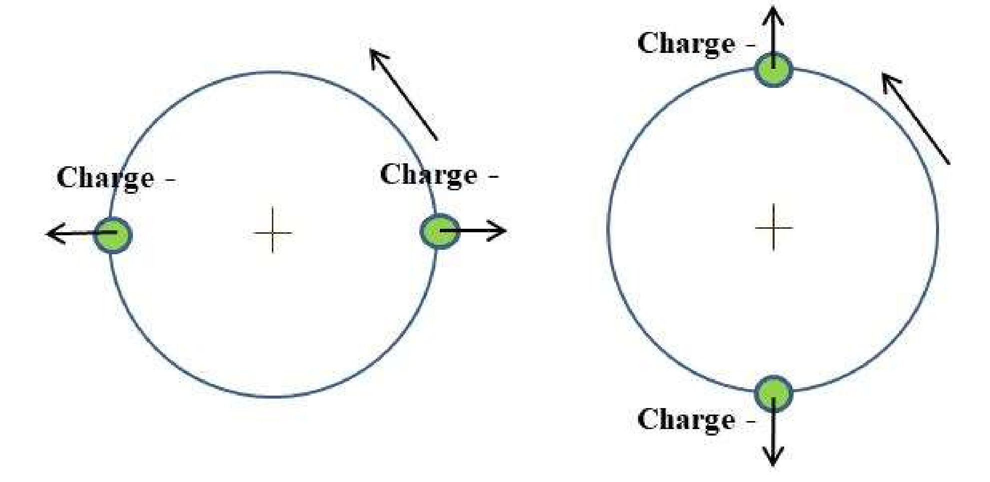


Figure 31 : 2 charges - sur un manège

Nota 1 sur la référence du sens de rotation

On prend ici l'hypothèse que le manège est dans le sens horaire pour des charges +, et dans le sens « trigo » ou antihoraire pour des charges -. C'est un choix aléatoire, évidemment sans justification. D'ailleurs, si un observateur regardant « par-dessus » ces 2 manèges, les regarde ensuite « par-dessous », il les verra tourner dans l'autre sens.

La référence du sens de rotation de ces manèges n'est donc pas définie par rapport à un observateur extérieur, mais par rapport aux charges entre elles, avec l'idée qu'un manège formé de 2 charges statiques + tourne dans un sens, et qu'un manège formé de 2 charges statiques – tourne dans l'autre sens.

Suivant ces idées, si on superpose une charge + et une charge -, on obtient un manège de faible vitesse de rotation sur lui-même par rapport à une référentiel galiléen, et donc 2 charges qui s'attirent. Pour stabiliser le système, il faut faire appel à d'autres forces ou mouvements, comme par exemple une rotation de l'électron autour du proton (cas de l'atome de Bohr).

Nota 2 sur une translation circulaire

On parle de manège et de rotation. Néanmoins, comme pour la Terre et la Lune dans le modèle II, il s'agirait en fait d'une translation circulaire pour les points des corps étudiés.

Nota 3, l'analogue du manège en électromagnétisme, c'est le champ magnétique

Une masse sur un manège, son analogue en électromagnétisme, c'est une charge électrique dans un champ magnétique.

IX.4.4 L'électron qui remonte le Temps

On reprend dans ce paragraphe l'idée de J. A. Wheeler et R. Feynman d'un électron remontant le Temps, un électron qui serait un positron. On mixte cette idée avec celle du manège à 2 corps statiques l'un par rapport à l'autre. On a la figure suivante :

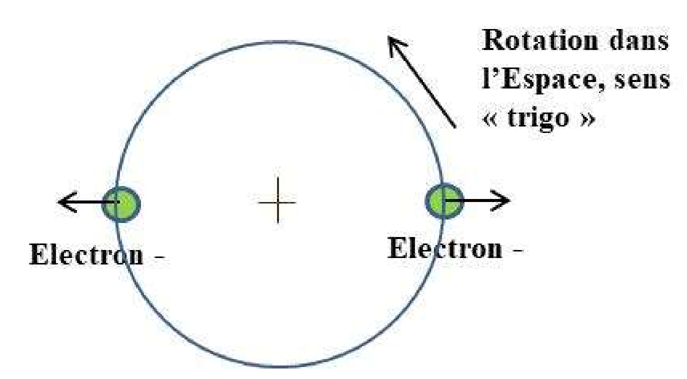


Figure 32 : 2 charges - sur un manège tournant dans le sens « trigo », avançant dans le sens du Temps identique au nôtre

Lorsqu'on remonte le Temps, on modifie la figure précédente, avec suivant l'idée de J. A. Wheeler et R. Feynman, un électron qui se transforme en positron. Soulignons que lors de cette remonté dans le Temps, les caractéristiques du système à 2 corps sont conservées, puisque le manège tourne toujours dans le même sens trigo. On a la figure suivante :

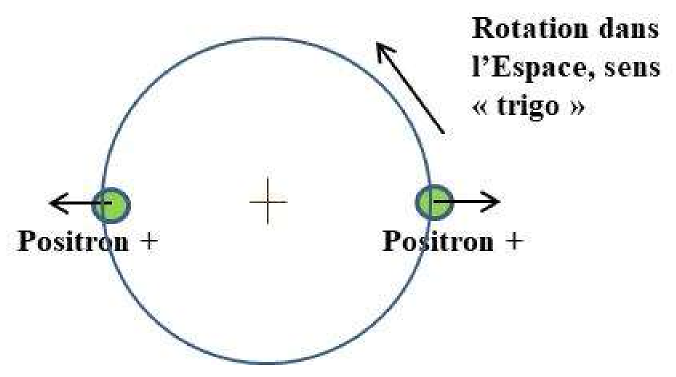


Figure 33 : 2 charges + sur un manège tournant dans le sens « trigo », avançant dans le sens du Temps opposé au nôtre

Dans notre Temps, un observateur voit ce manège tourner dans le sens horaire, et donc dans le sens opposé à celui du manège des 2 électrons de charge -. Il peut donc conclure à l'existence de 2 positrons de charge +. On a la figure suivante :

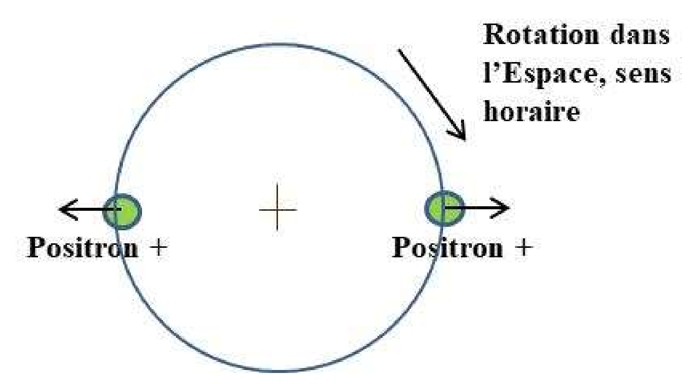


Figure 34 : 2 charges + sur un manège tournant dans le sens horaire, dans le sens du Temps identique au nôtre

IX.4.5 Décomposition d'une accélération

On rappelle la décomposition d'une accélération :

$$[\vec{a}]_{R^0} = \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{R^\Omega} + \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{O}M + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

Dans le 2ème mémoire, on a proposé que la force de Coriolis $m\vec{v}_r \wedge 2\vec{\Omega}$ soit pour la gravitation l'analogue de la force de Lorentz $q\vec{v}_r \wedge \vec{B}$ de l'électromagnétisme. Dans le chapitre précédent, on a proposé que l'accélération d'entrainement $\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{O}M$ soit l'analogue des phénomènes d'induction de M. Faraday.

Par contre, comme on l'a souligné dans ce même chapitre, il n'y a pas d'analogue en électromagnétisme à l'accélération d'inertie centrifuge $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$. A voir si finalement, il n'y aurait pas un analogue dans les phénomènes de répulsion constatés entre 2 charges électriques de même nature ?

IX.5 Marées en mouvement

Cette partie ne traite pas des analogies entre « gravitostatique » et électrostatique. Elle a simplement pour intérêt de proposer un modèle dynamique des marées, expliquant de façon simplifiée les variations du niveau de l'océan au cours d'une journée.

IX.5.1 La formation des continents

On modifie légèrement les schémas précédents, en ajoutant à la planète T, 3 îles indéformables : X, Y et Z. L'île X est positionnée sur le pôle Nord de la planète T. Les îles Y et Z sont positionnées sur l'équateur de la planète T, avec l'île Y face à la planète L, et l'île Z sur le côté, par rapport à L.

En bas à gauche de la figure, on symbolise les niveaux constants de l'océan, fonctions de la position des 3 îles par rapport à la planète L.

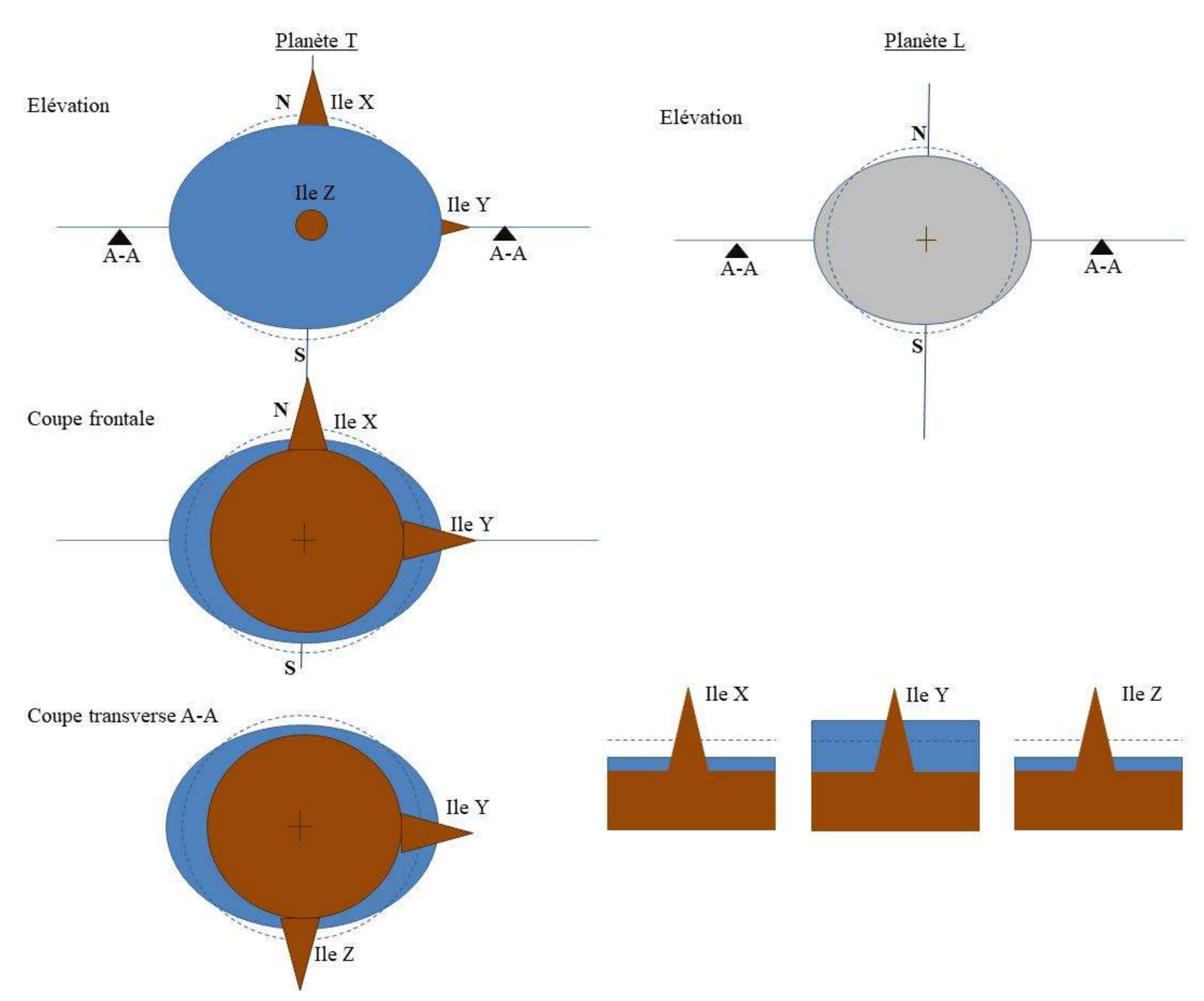


Figure 35 : planète T dotée de 3 îles

IX.5.2 Etude de masses en mouvement

On souhaite maintenant observer pour les 3 îles des phénomènes de marée, c'est-à-dire des variations périodiques du niveau de l'océan.

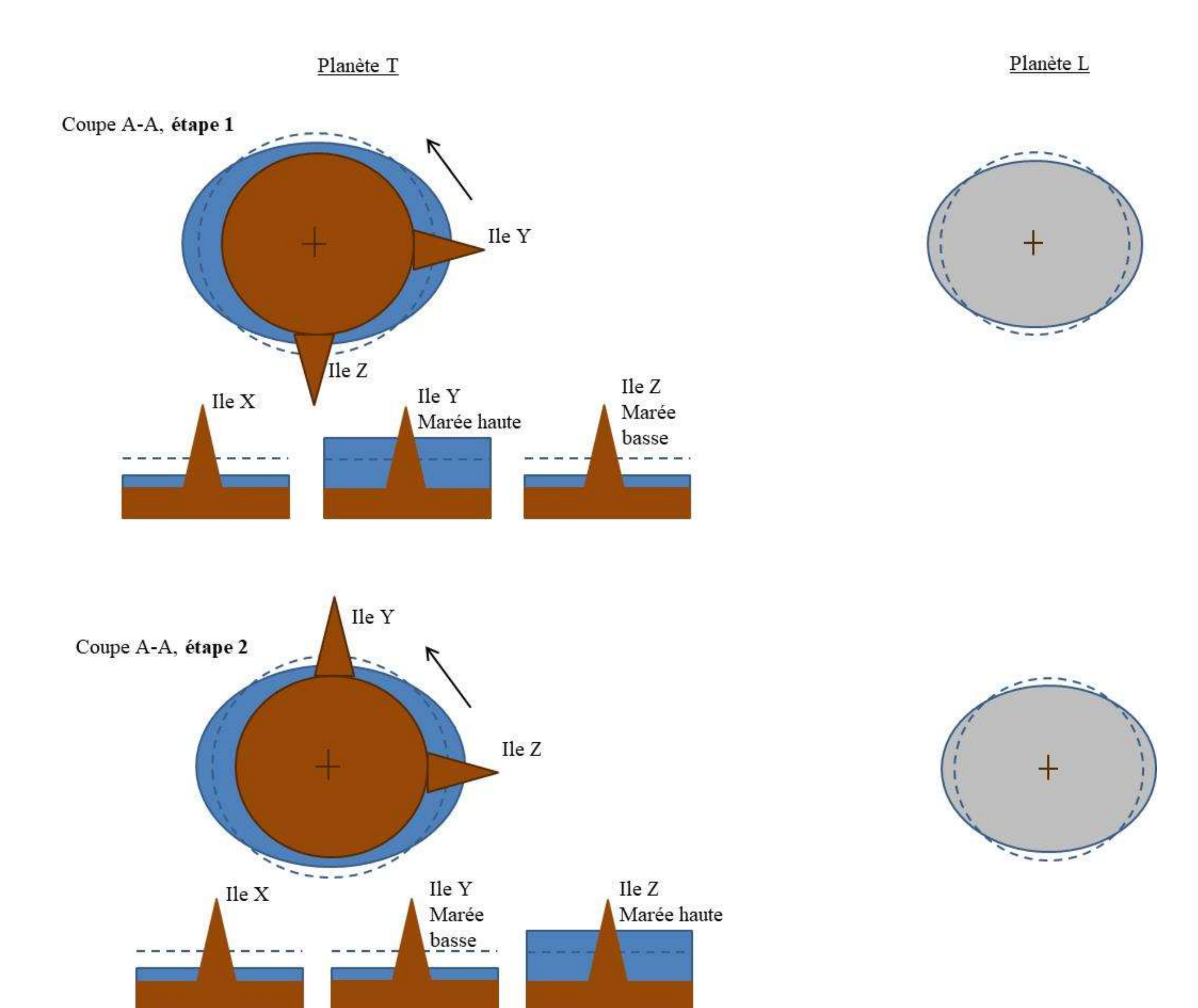
Dans le cas de la Terre, de la Lune et du Soleil, les mouvements sont nombreux et complexes, d'où de nombreux phénomènes périodiques (grandes marées, etc.). On s'arrête ici à un cas simplifié, avec :

- une planète L toujours statique (dans le modèle I dans un référentiel galiléen, dans le modèle II sur le manège du système Terre Lune),
- une planète T tournant sur elle-même par rapport à L, selon une période T_J d'environ 24h50.

T_J est la période de rotation sur elle-même de la Terre dans le référentiel lunaire (durée proche d'un jour terrestre). Dans ce référentiel lunaire, on a la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même :

$$\Omega_J = \frac{2\pi}{T_J}$$

Pour l'île X, située au pôle Nord de la planète T, on n'observe aucune variation du niveau de l'océan. Par contre, pour les îles Y et Z, localisées sur l'équateur, on observe 2 cycles de marée haute, marée basse pendant la période de 24h50. On donne sur les schémas suivants un découpage en 4 étapes de ces marées.


Planète T
Planète L
Coupe A-A, **étape 1**
Ile Y
Ile Z
Ile X
Ile Y
Marée haute
Ile Z
Marée
basse
Ile Y
Coupe A-A, **étape 2**
Ile Z
Ile X
Ile Y
Marée
basse
Ile Z
Marée haute

Coupe A-A, **étape 3**

Ile Z

Ile Y

Ile X

Ile Y
Marée haute

Ile Z
Marée
basse

Coupe A-A, **étape 4**

Ile Z

Ile Y

Ile X

Ile Y
Marée
basse

Ile Z
Marée haute

Figure 36 : 4 étapes de rotation de la planète T, avec variation du niveau de l'océan des îles Y et Z

Dans le schéma suivant, on donne pour l'île Y, les variations sinusoïdales du niveau de l'océan sur une période de 24h50.

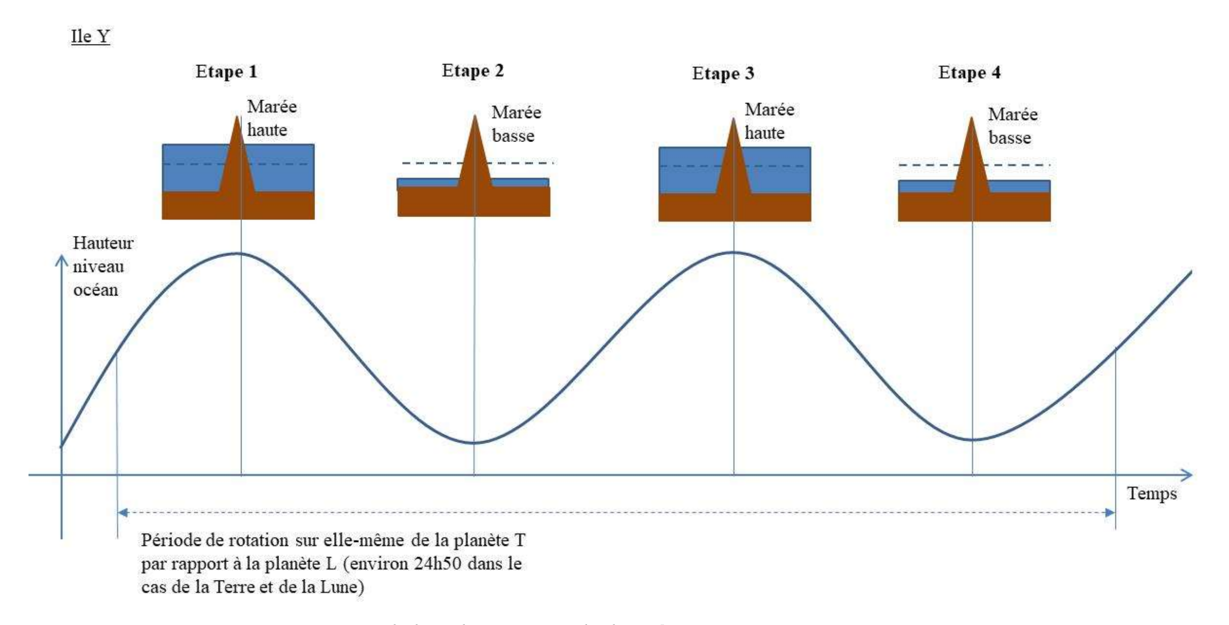


Figure 37 : variations sinusoïdales du niveau de l'océan

IX.6 Compléments sur les accélérations et forces d'inertie, récapitulatif de leurs analogues d'une part entre la Gravitation et l'Electromagnétisme, d'autre part entre l'Espace et le Temps

IX.6.1 Analogues de l'accélération d'inertie de Coriolis

	Gravitation	Analogue pour l'électromagnétisme
Espace	Accélération d'inertie de Coriolis $\vec{a}_{Cor}{}^{x}_{ty} = -\vec{v}^{y} \wedge 2\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$	Champ électromoteur $\vec{E}m^{x}_{ty} = \vec{v}^{y} \wedge \vec{B}^{1/t}_{xy}$
Analogue pour le Temps	Force gravitationnelle $\vec{F}_{K}{}^{x}_{ty} = \vec{m}^{t} \wedge 2c^{2}\vec{K}^{1/y}_{tx}$	Force électrique $\vec{F}_{El}{}^{x}_{ty} = \vec{q}^{t} \wedge \vec{E}l^{1/y}_{tx}$

IX.6.2 Analogues de l'accélération d'inertie d'entrainement due à la variation de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$

	Gravitation	Analogue pour l'électromagnétisme
Espace	Accélération d'inertie d'entrainement due à la variation de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$ $\vec{a}_{i}{}^{x}_{ty} = \frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial t} \wedge \vec{O}M$ $\frac{\partial\vec{V}^{x}}{\partial t}$ $rot(\vec{a}_{i}{}^{x}_{ty}) = \frac{\partial 2\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial t}$	Cas de Neumann de l'induction $\vec{E}m^{x}_{ty} = -\frac{\partial\vec{B}}{2\partial t} \wedge \vec{O}M$ $\frac{\partial\vec{A}^{x}}{\partial t}$ $rot(\vec{E}m^{x}_{ty}) = \frac{-\partial\vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t}$
Analogue pour le Temps	$\frac{\partial\vec{V}^{t}}{\partial x}$ Champ gravitationnel	$\frac{\partial\vec{A}^{t}}{\partial x}$ Champ électrostatique

IX.6.3 Analogues de l'accélération d'inertie d'entrainement centrifuge

	Gravitation	Analogue pour l'électromagnétisme
Espace	Accélération d'inertie d'entrainement centrifuge $\vec{a}_{cent} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}M)$	Champ électrique répulsif ?
Analogue pour le Temps	?	?

IX.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé aux analogies et aux différences entre électrostatique et « gravitostatique », testant s'il est possible de gommer certaines différences (comme 2 natures de charge et 1 seule nature de masse) par une approche cinétique dans l'Espace-Temps.
Lors de ces « tests », on a pris pour exemples des modèles simplifiés et statiques des marées. Cela a été l'occasion d'abord de se pencher sur un hypothétique dipôle « gravitostatique », puis d'essayer une explication de la force électrique répulsive par des mouvements dans l'Espace-Temps.
Suivant ce dernier « test », les charges + et - seraient en fait identiques, et ce seraient leurs mouvements dans l'Espace-Temps qui les distingueraient. Ainsi, il n'y aurait qu'une nature de charge électrique, comme il n'y a qu'une nature de masse (cette masse elle-même s'interprétant comme une « vitesse » dans le Temps, suivant les idées proposées dans le mémoire 2).

Cependant, il faut bien le reconnaître, on est resté loin d'une explication quantitative. Quelques pistes ont été esquissées, mais il reste de nombreux éléments inexpliqués, comme par exemple le rapport toujours contant et très loin de 1, entre la masse d'un proton et celle d'un électron.
Il existe d'ailleurs d'autres différences importantes entre l'électromagnétisme et la gravitation, notamment la quantification par une particule photon représentante du champ électromagnétique, et l'absence de particule analogue pour le champ gravitationnel. On reviendra dans les prochains mémoires sur cette question de quantification et de particules représentantes des champs.

Chapitre X Formulaire et conclusion du mémoire

X.1 Récapitulatif des principales équations (dans un espace x, y, t)

Dans ce mémoire, on a conduit de nombreuses analogies entre électromagnétisme et gravitation. Cela nous a permis de proposer de nouvelles équations sources champs pour la gravitation. Souvent, on a constaté, et cela avec surprise, que ces analogies n'étaient pas facilement repérables, justement parce qu'elles n'avaient pas été poussées suffisamment loin.

Par exemple, on a proposé que l'analogue de Maxwell Gauss $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div\vec{E}l$, soit pour la gravitation, comme à l'attendu, Gauss gravitation $-4\pi G\rho = div\vec{G}r$ ou la loi de la gravitation universelle de Newton, quoique légèrement modifiée.
De même, on a proposé que l'analogue de Maxwell Ampère $\mu_0\vec{j} = rot\vec{B}$, soit pour la gravitation, le principe fondamental de la dynamique de Newton $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ (écrit ici sous forme de la 2ème équation de Hamilton).
De même, on a proposé que l'analogue de Maxwell Ampère courant de déplacements $\mu_0\vec{j} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}l}{\partial t}$, soit pour la gravitation, la relation d'Einstein de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$.
Enfin, on a proposé que l'analogue de Maxwell Faraday $rot\vec{E}l = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, soit pour la gravitation, la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ d'un manège qui varie dans le Temps, et l'ajout nécessaire d'une accélération d'inertie : $\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{O}M$.
On rappelle dans le formulaire qui suit, ces principales analogies.

Equations sources champs :

	Electromagnétisme	**Gravitation**
Sources orientées dans le Temps (Gauss)	$\frac{\vec{\rho}^t_{xy}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}l^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}l^{1/x}_{yt}}{\partial y}$ Electrostatique : $\frac{\vec{\rho}^t_{xy}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \vec{E}s^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}s^{1/x}_{yt}}{\partial y}$	$-4\pi G\vec{\rho}^t_{xy} = \frac{\partial 2c^2\vec{K}^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial 2c^2\vec{K}^{1/x}_{yt}}{\partial y}$ Gravitostatique : $-4\pi G\vec{\rho}^t_{xy} = \frac{\partial \vec{G}r^{1/y}_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}r^{1/x}_{yt}}{\partial y}$
Sources orientées dans l'Espace (Ampère)	$\mu_0\vec{J}^y_{xt} = \frac{\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial x} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}l^{1/x}_{ty}}{\partial t}$	$-\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$ $-\frac{c^2}{\hbar}(\frac{d\vec{m}^t}{dx})^y_{tx} = \frac{\partial \vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$

Nota
Ces équations champs sources sont vérifiées en mécanique einsteinienne restreinte, c'est-à-dire qu'elles sont invariantes par la transformée de Lorentz.

Equations champs homogènes de Maxwell Faraday électromagnétisme :

$$\oint_{\Gamma^x}((\vec{v}^y \wedge \vec{B}^{1/t}_{xy})^x_{ty} + (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{A}^x}{\partial t})^x_{ty}) \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{-\partial \vec{B}^{1/t}_{xy}}{\partial t} \cdot d\vec{S}^t_{xy} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_{\Gamma^x} \vec{E}m_{ty}^{x} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Equations champs homogènes de Faraday gravitation :

$$\oint_{\Gamma^x}((\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t})_{ty}^{x} + (\vec{u}^t \wedge \frac{\partial \vec{V}^x}{\partial t})_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x} = \iint_{S_{xy}} \frac{\partial 2\vec{\Omega}_{xy}^{t}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_{xy}^{t} = \frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$$

$$\oint_{\Gamma^x}(-\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} + \vec{a}_{Ein}{}_{ty}^{x}) \cdot d\vec{x} = \frac{2d\Phi_\Omega}{dt}$$

X.2 Conclusion du mémoire

Les équations de Maxwell proposées au 19ème siècle peuvent apparaître comme possédant une forme complexe. Cependant, on constate que si on pousse l'analogie entre Temps et Espace, entre champ magnétique et champ électriques, entre Maxwell Gauss et Maxwell Ampère, on retrouve des formes beaucoup plus simples, aussi bien pour les équations sources champs que pour les équations champs homogènes, aussi bien pour l'électromagnétisme que pour la gravitation.
De plus, afin de retrouver des vitesses de charges électriques ou de masses égales à des vitesses de groupe, en divisant les équations sources champs proposées, on retrouve d'une part une condition connue entre les constantes ε_0 et μ_0, d'autre part une condition entre $\hbar$ et G donnant une longueur infinitésimale identique à la longueur de Planck.

Néanmoins, il reste une question non résolue : c'est la raison profonde aux égalités entre sources et champs dans l'Espace-Temps. Cette question est éminemment importante, car ces équations sources champs apparaissent comme les plus fondamentales de la physique.
On reviendra dans le 5ème mémoire sur ces équations sources champs. Mais avant, dans le 4ème mémoire, on va s'intéresser aux interactions nucléaires et la physique du 20ème siècle.

Bibliographie du mémoire 3

Sur la gravitation newtonienne

[1] H. Lumbroso, Problèmes résolus de mécanique du point et des systèmes de points. Dunod, Paris, 1984

Sur l'électrostatique

[2] H. Lumbroso, Problèmes résolus d'électrostatique et dynamique des particules chargées. Dunod, Paris, 1984

Sur le magnétisme

[3] H. Lumbroso, Electromagnétisme, problèmes résolus. McGraw-Hill, Paris, 1985.

Sur les équations de Maxwell et les antennes

[4] Wikipedia, Équations de Maxwell

[5] H. Lumbroso, Problèmes résolus sur les ondes électromagnétiques. Dunod, Paris, 1991.

Sur la vitesse de groupe

[6] Wikipedia, vitesse d'une onde

Sur l'approche ondulatoire de la mécanique classique et relativiste

[7] L. de Broglie, thèse de 1924, Paris

[8] L. de Broglie, Eléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1953

Sur le Tenseur de densité du flux d'impulsion

[9] Wikipedia, Tenseur de densité du flux d'impulsion

Sur les dimensions de Planck :

[10] Vincent Isoz, site internet sur la physique et les mathématiques http://www.sciences.ch/htmlfr/physatomique/physatommecquantond02.php#dimensionsplanck

Sur la matière noire :

[11] Wikipedia, Matière noire

Sur les marées :

[12] Guillaume Pages, Année universitaire 2018/2019 Mémoire de Master 2 LES MARÉES

[13] Wikipedia, Marée, https://fr.wikipedia.org/wiki/Mar%C3%A9e

[14] http://hmf.enseeiht.fr/travaux/CD9598/travaux/optsee/hym/nome35/maree/2.htm

Table des matières

Mémoire 4 Eléments sur les interactions nucléaires

Résumé
Ce 4ème mémoire s'intéresse à ce qui se passe dans le noyau de l'atome, c'est-à-dire aux interactions nucléaires. Il s'agit surtout d'un exposé historique des principaux modèles à ce sujet, depuis les années 1910 jusqu'aux années 1970.
On évoquera d'abord la diffusion d'Ernest Rutherford (1911), les travaux de W. Heisenberg sur l'isospin (1932), la théorie d'E. Fermi sur l'interaction faible (1933), le modèle de Hideki Yukawa pour les interactions nucléaires (1935). Ce modèle fait intervenir une particule médiatrice de type photon, mais possédant une masse (la particule a été baptisée mésotron par H. Yukawa, elle a plus tard été appelée le méson).
On parlera ensuite des travaux de Chen Ning Yang et Robert Mills (1954), décriant l'interactions forte, à partir de transformations de Jauge appartenant au groupe $SU(2)_I$. On s'intéressera au Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam (années 1960), réunissant l'interaction électromagnétique fondée sur le groupe $U(1)_Q$, l'interaction faible fondée sur $U(1)_T$ et une 3ème interaction fondée sur $U(1)_{Y_W}$. Enfin, on évoquera succinctement le mécanisme BEH (mécanisme proposé indépendamment en 1964 par R. Brout et F. Englert, ainsi que par P. Higgs) pour attribuer une masse aux particules.

Chapitre I La diffusion d'Ernest Rutherford (1911) et les collisions entre particules

Objet du chapitre
On s'intéresse à la diffusion de Rutherford, précurseur des expériences de collisions entre particules et faisant intervenir la force électromagnétique. On abordera les collisions entre particules selon une approche classique, puis selon une approche quantique relativiste.

I.1 La découverte de la radioactivité par Henri Becquerel (1886)

Usuellement, on date les premières recherches sur le noyau par la découverte en 1896 de la radioactivité. Etudiant des sels d'uranium à l'abri de la lumière du Soleil, Henri Becquerel observe que ces sels émettent des rayonnements. Des expériences ultérieures menées par H. Becquerel lui-même, ainsi que par Marie Skłodowska-Curie et Pierre Curie concluent à l'existence de trois types de rayonnement baptisés α, β et γ (suivant en cela les 3 premières lettres de l'alphabet grec).

La découverte suscite un fort intérêt parmi les physiciens. Nombreux sont ceux qui étudient des sels d'uranium et la nature de leurs rayonnements. Rapidement, on s'aperçoit que les rayonnements α sont chargés positivement, que les β sont chargés négativement, et que les γ sont neutres. De plus, on constate que les α sont bien plus massifs que les β. Peu à peu, on comprend que le rayonnement α est constitué de noyaux d'hélium chargés positivement, que le rayonnement β est constitué d'électrons chargés négativement, et que le rayonnement γ est une onde électromagnétique.

Au cours des années 1930-1940, les physiciens en viennent à distinguer deux types d'interactions nucléaires. Ils relient les rayonnements β à l'interaction dite faible et à la désintégration du noyau. Ils associent l'interaction dite forte à la cohésion du noyau, c'est-à-dire à ce qui maintient ensemble les nucléons.

Nota sur la portée des interactions faibles et fortes
Les interactions nucléaires faibles et fortes sont caractérisées par une portée très faible (du niveau du noyau de l'atome). Elles s'opposent en cela aux forces gravitationnelle et électromagnétique qui ont une portée infinie.

I.2 Les expériences de Rutherford (1909-1911)

De 1909 à 1911, E. Rutherford et ses deux collaborateurs Hans Geiger et Ernest Marsden utilisent des rayonnements de particules α (noyaux d'hélium), afin de provoquer des collisions entre particules. On parle de particules incidentes avant la collision et de particules diffusées après la collision, d'où le terme de diffusion de Rutherford.
Ces expériences sont d'une grande importance à plusieurs titres. D'abord, on peut les présenter comme les précurseurs de collisions entre particules dans les accélérateurs. Ensuite, elles permettent à E. Rutherford de proposer un nouveau modèle pour l'atome.

Explicitons l'une de ces expériences. A l'aide d'un faisceau de particules α, E. Rutherford et ses deux collaborateurs bombardent une très fine couche d'or. La majorité du faisceau de particules traverse la couche d'or et atteint sa cible, c'est-à-dire se propage en ligne droite. Cependant, certaines particules α, dans une très faible proportion (de l'ordre de 0,01%), sont déviées avec un très grand angle.

Pour expliquer ces résultats, E. Rutherford imagine un modèle planétaire de l'atome, qui quelques années plus tard inspirera N. Bohr dans son explication des raies lumineuses émises par des atomes excités (voir mémoire 1).

Dans ce modèle planétaire, l'atome est principalement composé de vide, ce qui explique que la majorité des particules α peut passer à travers. Au centre, on trouve un noyau chargé électriquement positivement. Par effet de la force électrostatique de Coulomb, ce noyau dévie dans une faible proportion et avec un très grand angle certaines particules α. Enfin, autour du noyau, on trouve des électrons de charge négative en rotation.

I.3 Diffusion de Rutherford dans le cadre de la mécanique classique

Etudions la diffusion de Ruherford dans le cadre de la mécanique classique (non quantique et non relativiste), tel qu'E. Ruherford la décrit lui-même.

Soient des particules incidentes de charge positive q (les noyaux d'hélium) en mouvement qui viennent heurter des particules de charge positive Q (les noyaux des atomes de la feuille d'or). En utilisant la force électrostatique de Coulomb, on en déduit la section efficace σ de la diffusion de Rutherford :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{qQ}{16\pi\varepsilon_0 E_0})^2 \frac{1}{sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

avec :
$E_0 = \frac{1}{2}mv^2$ l'énergie initiale de la particule incidente sur le centre diffuseur (particules immobiles de la feuille d'or),
θ angle de la particule diffusée,
σ la section efficace des particules incidentes,
Ω l'angle solide des particules diffusées.

Selon le schéma ci-dessous, si une particule incidente passe par la couronne $d\sigma$, la particule diffusée passe par la couronne $d\Omega$. Le centre diffuseur est par exemple un noyau d'atome de la feuille d'or.

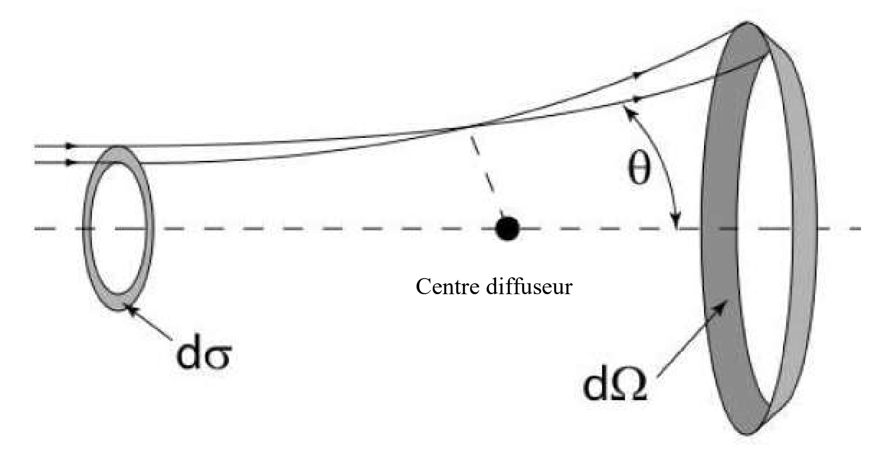


Figure 1 : déviation de Rutherford (source Wikipédia)

Pour les particules de type électron ou proton de charge électrique e, on exprime usuellement la section efficace σ à l'aide de α_{em}. On a :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{\alpha_{em}\hbar c}{4E_0})^2 \frac{1}{sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

Nota

$\alpha_{em} = \frac{e^2}{\hbar c 4\pi\varepsilon_0} \approx \frac{1}{137}$ (constante de structure fine ou constante de couplage électromagnétique).

I.4 Diffusion de Rutherford dans le cadre de l'Electrodynamique quantique relativiste

I.4.1 Avant-goût sur les particules médiatrices

Donnons ici une version simplifiée de la diffusion de Rutherford dans le cadre de l'Electrodynamique quantique relativiste (quantum electrodynamics en anglais, soit l'abréviation QED). On reprend les idées de Richard Feynman sur les collisions entre particules, idées développées dans les années 1940-1950.

On y reviendra ultérieurement, mais notons que l'une des principales idées de l'Electrodynamique quantique relativiste, c'est qu'une particule 1 incidente (par exemple, un électron 1) ne réagit pas directement avec une particule 2 du centre diffuseur (par exemple, un autre électron 2) via la force électrostatique de Coulomb. Il existe une particule médiatrice appelée boson qui réagit d'une part avec l'électron 1 incident, d'autre part avec l'électron 2 du centre diffuseur. Dans le cas de l'interaction électromagnétique, la particule médiatrice est le photon.

I.4.2 Amplitude de probabilité d'un propagateur et des sommets

On rappelle l'équation d'onde relativiste de Klein Gordon :

$$((p^\mu)^2c^2 - m^2c^4)\psi(0) = 0$$

avec $(p^\mu) = (E^t, p^x, p^y, p^z)$ le quadrivecteur énergie impulsion de la Relativité restreinte.

En Electrodynamique quantique relativiste, la fonction d'onde de Klein Gordon est interprétée comme l'équation d'onde du boson (particule médiatrice des interactions).

A partir de cette équation, R. Feynman définit un propagateur, associé au boson qui se propage avec un quadrivecteur énergie impulsion p^μ et une masse m :

$$Pr\,o\,pa = \frac{i}{(p^\mu)^2c^2 - m^2c^4}$$

$$Pr\,o\,pa = \frac{i}{(p^\mu)^2 - m^2}$$

avec la constante c prise égale à 1.

R. Feynman définit également une amplitude de probabilité de sommets 1 et 2 décrivant l'émission absorption du boson par les particules 1 et 2. Cette amplitude de probabilité dépend directement de la constante de couplage avec les particules 1 et 2 (par exemple proportionnelle à des charges de couplage g_1 ou g_2).

On a :

$$Sommet = g_1$$

$$Sommet = g_2$$

On obtient l'amplitude de probabilité M lors de la collision entre les particules 1 et 2 :

$$M \propto g_1 . \frac{i}{(p^\mu)^2 - m^2} . g_2$$

On a la probabilité :

$$Pr\,o\,babilité \propto \left|\frac{g_1 g_2}{(p^\mu)^2 - m^2}\right|^2$$

Cette interprétation permet de développer une méthode graphique simple et de calculer la probabilité de certains processus. On appelle cette méthode graphique les diagrammes de Feynman.

On a ci-dessous le diagramme de Feynman correspondant à la collision entre 2 particules mobiles et l'intervention d'un boson intermédiaire.

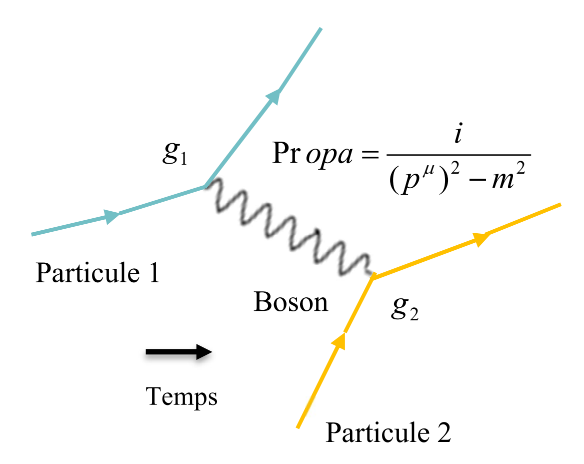


Figure 2 : collision entre deux particules 1 *et* 2*, boson intermédiaire*

Nota
Les flèches d'un diagramme de Feynman indiquent le sens de l'impulsion de la particule et non le sens de la réaction (qui est indiqué par le Temps). Les particules ont une flèche orientée dans le sens du Temps. Les antiparticules ont une flèche orientée dans le sens inverse du Temps.
En QED, les fermions (particules de matière) ont une ligne droite. Les photons (particules médiatrices de lumière) ont une ligne ondulée.

I.4.3 Exemple de l'interaction électromagnétique

Pour l'interaction électromagnétique, la particule médiatrice est le photon γ de masse nulle avec $Pr\,o\,pa = \frac{i}{(p^\mu)^2}$ et la charge de couplage $g = e$. On a donc :

$$Pr\,o\,balilité \propto \left|\frac{e^2}{(p^\mu)^2}\right|^2 = \frac{e^4}{(p^\mu)^4} \propto \frac{{\alpha_{em}}^2}{(p^\mu)^4}$$

On donne le diagramme de Feynman pour la diffusion de Rutherford entre deux électrons mobiles.

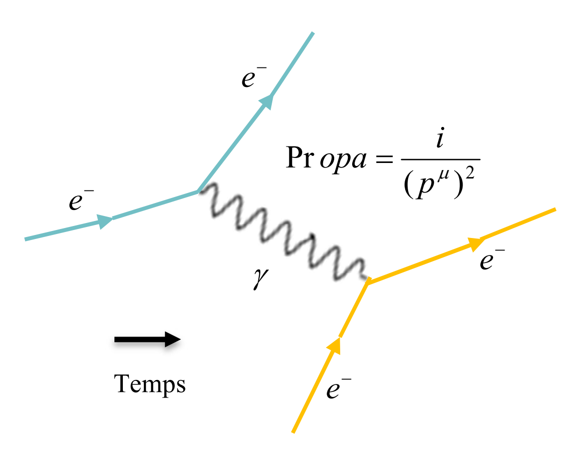


Figure 3 : collision entre deux électrons et photon intermédiaire γ

I.4.4 Retrouver la diffusion de Rutherford dans le cadre classique

On donne la section efficace pour la collision de particules chargées, lors de la diffusion de Rutherford, dans le cadre de l'électrodynamique relativiste :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{{\alpha_{em}}^2}{(p^\mu)^4} {E_0}^2$$

(p^μ) est la quantité d'énergie impulsion transférée au centre diffuseur par la particule incidente lors du processus de diffusion. C'est aussi égal à la quantité d'énergie impulsion transportée par la particule médiatrice photon.
E_0 est l'énergie initiale de la particule incidente.

On a la relation entre l'énergie initiale E_0, l'énergie impulsion transférée (p^μ), et l'angle θ de la particule diffusée :

$$(p^\mu)^2 = 2{E_0}^2(1 - cos\,\theta)$$

$$(p^\mu)^2 = 4{E_0}^2\, sin^2(\frac{\theta}{2})$$

A partir de $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{{\alpha_{em}}^2}{(p^\mu)^4} {E_0}^2$ et en utilisant $(p^\mu)^2 = 4{E_0}^2\, sin^2(\frac{\theta}{2})$, on retrouve l'expression de la diffusion de Rutherford dans le cadre de l'approche classique :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{\alpha_{em}\hbar c}{4E_0})^2 \frac{1}{sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

I.5 Conclusion du chapitre

La diffusion Rutherford est le précurseur des collisions entre particules. E. Rutherford en a fait une description classique. Cette diffusion peut aussi être plus finement décrite par l'Electrodynamique quantique relativiste et les diagrammes de Feynman.
Ces collisions permettent d'étudier les particules incidentes et diffusées, les particules médiatrices, ainsi que les interactions mises en jeu. Par exemple, elles renseignent sur certaines propriétés caractéristiques des particules. Parmi ces propriétés, on trouve le spin ou l'isospin que nous allons traiter dans le prochain chapitre.

Chapitre II Le spin d'Uhlenbeck et Goudsmit (1925) et l'isospin de Heisenberg (1932)

Objet du chapitre
Le spin S est une notion physique proposée par G. Uhlenbeck et S. Goudsmit en 1925, afin de décrire l'interaction électromagnétique. L'isospin I est une notion proposée par W. Heisenberg en 1932, par analogie mathématique avec le spin, afin de décrire les interactions nucléaires. On rappelle ici certaines analogies entre le spin qui s'inverse lors d'une transition hyperfine de l'électron, et l'isospin qui s'inverse lors d'une désintégration β^- lorsqu'on passe d'un neutron à un proton.

II.1 Le spin *S* de G. Uhlenbeck et S. Goudsmit (1925)

II.1.1 Changement d'états et modification du moment cinétique orbital d'un électron

En 1913, le physicien N. Bohr parvient à expliquer les raies lumineuses émises par un atome d'hydrogène excité, en proposant le modèle d'un électron tournant autour du proton. Dans ce modèle, l'électron ne peut occuper que certaines orbites possibles (ou moments cinétiques orbitaux possibles). N. Bohr fait correspondre ces orbites à des états de l'électron et à des niveaux d'énergie. Le passage d'un état à l'autre de l'électron correspond à l'émission d'une raie lumineuse par l'atome d'hydrogène. Néanmoins, dans le modèle de Bohr de l'électron, il subsiste certains phénomènes inexpliqués comme un doublement des raies lumineuses. Il n'y a pas une seule raie, mais en fait deux raies très proches en longueur d'onde qu'on appelle des doublets.

II.1.2 Changement d'états et modification du spin *S* d'un électron, transition hyperfine

En 1922, Otto Stern et Walther Gerlach font passer un faisceau d'atomes d'argent dans un champ magnétique. Alors que classiquement, les atomes d'argent ne devraient pas subir l'effet du champ magnétique, les 2 expérimentateurs observent une séparation du faisceau en deux.

Pour expliquer ces faits (doublement des raies, séparation du faisceau en deux et d'autres comme l'effet Zeeman anomal), George Uhlenbeck et Samuel Goudsmit proposent en 1925 que des particules comme l'électron possèdent un magnétisme propre (cela doit être aussi le cas des atomes d'argent dans l'expérience de Stern et Gerlach).
En quelque sorte, l'électron n'est pas seulement assimilable à une petite charge électrique, mais également à un petit aimant. Le modèle représente l'électron comme une petite sphère chargée et massique, tournant sur elle-même et possédant un moment magnétique de spin, relié à un moment cinétique de spin prenant des valeurs du type : $+\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$ (d'où les 2 faisceaux pour les atomes d'argent de l'expérience de Stern et Gerlach).

Les doublets de raies lumineuses très proches en longueur d'onde l'une de l'autre, sont expliqués par une inversion du spin de l'électron, passant par exemple de $+\frac{\hbar}{2}$ à $-\frac{\hbar}{2}$, inversion du spin qu'on qualifie de transition hyperfine.
Même si l'électron voit l'une de ses caractéristiques physiques modifiées (en l'occurrence le spin), il s'agit bien de la même particule dans deux états différents.

L'hypothèse du spin est particulièrement féconde. Comme on l'a vu dans le mémoire 1, elle est incorporée ensuite dans de nombreux modèles comme l'équation d'onde non relativiste de Pauli ou l'équation d'onde relativiste de Dirac. Le spin inspire également à W. Heisenberg la notion d'isospin, qui à priori n'a rien à voir physiquement avec le spin, mais présente de fortes analogies formelles et mathématiques.

II.1.3 Traitement mathématique du moment cinétique total et du spin

En mécanique quantique, on définit des opérateurs sur la fonction d'onde ψ, transcriptions de notions de la mécanique classique à la mécanique quantique. On a ainsi les opérateurs de position et d'impulsion sur une fonction d'onde ψ définis par :

$$\hat{x}\psi = x \cdot \psi$$

$$\hat{p}^x\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

En mécanique classique, le moment cinétique orienté suivant z, a pour expression :

$$L^z = xp^y - yp^x$$

En mécanique quantique, on définit l'opérateur de moment cinétique orbital sur la fonction d'onde ψ :

$$\hat{L}^z = \hat{x}\hat{p}^y - \hat{y}\hat{p}^x$$

L'opérateur de moment cinétique total noté $\hat{J}$ est la somme vectorielle de l'opérateur de moment cinétique orbital noté $\hat{L}$ et de l'opérateur de moment cinétique de spin (intrinsèque) noté $\hat{S}$:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

On définit usuellement $\hat{J}$ à l'aide de $\hat{J}^3$ le moment cinétique suivant l'axe z et de sa norme $(\hat{J})^2 = (\hat{J}^1)^2 + (\hat{J}^2)^2 + (\hat{J}^3)^2$.

On cherche les états propres (vecteurs propres) commun à $(\hat{J})^2$ et $\hat{J}^3$, ainsi que leurs valeurs propres. Mathématiquement, on montre que $|j,m\rangle$ est l'état propre recherché, $\hbar^2 j(j+1)$ la valeur propre de $(\hat{J})^2$, $\hbar m$ la valeur propre de $\hat{J}^3$.

On obtient :

$$(\hat{J})^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$$

$$\hat{J}^3|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle$$

avec j entier ou demi-entier,
avec $-j \leq m \leq +j$ par saut d'une unité.

Le traitement mathématique est exactement le même pour un moment cinétique orbital L ou un moment cinétique de spin S. Dans le cas de S, on définit usuellement des opérateurs de moment cinétique $\hat{S}^3$ et $(\hat{S})^2 = (\hat{S}^1)^2 + (\hat{S}^2)^2 + (\hat{S}^3)^2$. On a les états propres communs à $(\hat{S})^2$ et $\hat{S}^3$, ainsi que les valeurs propres :

$$(\hat{S})^2|s,m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s,m_s\rangle$$

$$\hat{S}^3|s,m_s\rangle = \hbar m_s|s,m_s\rangle$$

avec s entier ou demi-entier,
avec $-s \leq m_s \leq +s$ par saut d'une unité.

II.1.4 Construire un corps composite formé de 2 particules de spin $\frac{1}{2}$

En liant 2 particules portant des spin $s = \frac{1}{2}$ et $s' = \frac{1}{2}$ dans un état de moment cinétique orbital $L = 0$, on peut construire 2 états de spin total $S = 1$ et $S = 0$. L'état de spin total $S = 1$ se décompose à son tour en 3 états, avec $S^3 = \pm 1$ et $S^3 = 0$.

Ci-dessous, on prend comme exemple 2 électrons e et e' de spin s^3 et $s^{3\prime}$.

$$|S=1,S^3=1\rangle = \left|s=\frac{1}{2},s^3=\frac{1}{2};s'=\frac{1}{2},s^{3\prime}=\frac{1}{2}\right\rangle = |e_R;e_R'\rangle$$

$$|S=1,S^3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|s=\frac{1}{2},s^3=\frac{1}{2};s'=\frac{1}{2},s^{3\prime}=-\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\left|s=\frac{1}{2},s^3=-\frac{1}{2};s'=\frac{1}{2},s^{3\prime}=\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_R;e_L'\rangle + |e_L;e_R'\rangle)$$

$$|S=1,S^3=-1\rangle = \left|s=\frac{1}{2},s^3=-\frac{1}{2};s'=\frac{1}{2},s^{3\prime}=-\frac{1}{2}\right\rangle = |e_L;e_L'\rangle$$

$$|S=0,S^3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|s=\frac{1}{2},s^3=\frac{1}{2};s'=\frac{1}{2},s^{3\prime}=-\frac{1}{2}\right\rangle - \left(\left|s=\frac{1}{2},s^3=-\frac{1}{2};s'=\frac{1}{2},s^{3\prime}=\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_R;e_L'\rangle - |e_L;e_R'\rangle)$$

II.2 L'isospin de Heisenberg (1932) défini en tant que charge nucléaire forte du neutron et du proton

II.2.1 Analogies de comportement du proton et du neutron

L'isospin I est une notion introduite par Werner Heisenberg en 1932 pour expliquer certains faits intervenant dans les interactions nucléaires.
A la fin des années 1920, on remarque que vis-à-vis d'une certaine interaction nucléaire (celles qu'on appelle aujourd'hui l'interaction forte), le proton et le neutron se comportent de la même manière.

A l'instar de l'électromagnétisme, où l'intensité de l'interaction est la même en valeur absolue entre 2 électrons, entre 2 protons ou entre 1 électron et 1 proton, l'intensité de l'interaction nucléaire forte est en gros la même en valeur absolue entre 2 protons, entre 2 neutrons ou entre 1 proton et 1 neutron.

On note également que proton et neutron ont une masse très proche. Enfin, on sait que le neutron peut se désintégrer en proton lors de la désintégration β^- où un électron est émis. Cette réaction fait intervenir une autre interaction nucléaire qu'on appelle aujourd'hui l'interaction faible.

Pour expliquer ces différents faits, W. Heisenberg imagine que le proton et le neutron sont les deux faces d'une même particule appelée le nucléon.
D'abord, il assigne au proton et au neutron une charge nucléaire forte opposée, qu'il baptise isospin. Cette charge nucléaire forte opposée explique l'attraction entre proton et neutron et donc la cohésion du noyau atomique.
Ensuite, il transpose le changement d'état de spin de l'électron via la transition hyperfine, à un changement d'état de l'isospin des particules du noyau (protons et neutrons) via la désintégration β^-. Neutron et proton sont des nucléons d'isospins opposés ($+\frac{\hbar}{2}$ pour le proton, et $-\frac{\hbar}{2}$ pour le neutron), le passage de l'un à l'autre s'explique par une inversion de leur isospin.

Nota 1
Pour les valeurs de spin et d'isospin, plutôt que de dire $+\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$, on utilise aussi très fréquemment $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.

Nota 2
Par convention, en physique quantique, on choisit usuellement que c'est la 3ème composante du spin, notée ici S^3 , celle perpendiculaire au plan x, y et orientée suivant z, qui est égale à $\pm\frac{\hbar}{2}$ et qui s'inverse lors de la transition hyperfine.

De même, on choisit que c'est la 3ème composante de l'isospin, notée ici I^3 , qui est égale $\pm\frac{\hbar}{2}$ et qui s'inverse lors de la désintégration β^-.

Nota 3
Comme le proton et l'électron qui ont respectivement une charge électrique Q de $+1$ et -1, on verra dans un prochain chapitre sur l'interaction forte, que la théorie de Yang-Mills assigne au neutron et au proton une charge nucléaire forte identifiée à l'isospin, et respectivement égale à $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

Nota 4
Dans les années 1950 et 1960, la notion d'isospin est reprise dans le Modèle des quarks, avec la notion de saveur (pour les quarks de 1ère génération) qui correspond à celle d'isospin. Un quark de saveur up possède un isospin égal à $+\frac{1}{2}$ et un quark de saveur down possède un isospin égal à $-\frac{1}{2}$. On y reviendra.

Nota 5
A l'époque de W. Heisenberg, il n'existait qu'une notion d'isospin noté ici I. Aujourd'hui, on peut distinguer 3 notions distinctes :

- l'isospin faible ou charge faible notée T,
- l'isospin I (qui s'inverse lorsqu'on passe d'un neutron à un proton),
- la charge nucléaire forte qui sera dans ce mémoire notée Co comme couleur.

I et Co sont parfois confondus comme dans la théorie de Yang-Mills sur l'interactions forte. La charge forte Co est alors considérée égale à l'isospin I (on parle d'isospin fort et de charge forte pour I).

L'isospin faible ou charge faible T est une notion proposée par S. Glashow pour décrire l'interaction faible, en stricte analogie avec la théorie de Yang-Mills décrivant l'interaction forte, où la charge forte est considérée égale à l'isospin I.
Dans ce cas, I et T sont tous deux considérés comme la charge d'une interaction nucléaire, respectivement forte et faible. Ils partagent aussi un même formalisme mathématique, puisqu'ils sont associés aux transformations de Jauge du groupe $SU(2)$.

On reviendra largement sur toutes ces notions dans ce mémoire et dans le prochain.

II.2.2 Particule médiatrice

Pour expliquer le changement d'état de la particule (électron ou nucléon), W. Heisenberg propose l'existence d'une particule médiatrice, porteuse de la quantité quantique spin ou isospin, et qui permet la conservation de la quantité quantique dans les réactions entre particules. La particule médiatrice est émise ou absorbée par la particule lorsque cette dernière change d'état.

Ainsi, de même qu'une particule légère tel l'électron, peut en changeant d'état de spin émettre ou absorber une particule ultra légère qu'est le photon, de même une particule lourde qu'est le nucléon pourrait en changeant d'état d'isospin émettre des particules légères que sont les électrons ou les positrons.
C'est ce qu'on observe dans la désintégration β^-, lorsque le neutron se transforme en proton et qu'un électron est émis.

Comme l'isospin, l'hypothèse de particule médiatrice sera particulièrement féconde. Néanmoins, dans le cas du changement d'isospins, l'électron et le positron ne seront pas en fait la particule médiatrice recherchée. On verra bientôt que d'autres particules médiatrices seront proposées pour les interactions nucléaires, en particulier par Hideki Yukawa en 1935.

II.2.3 Traitement mathématique de l'isospin *I*

On a le même traitement mathématique pour le spin et l'isospin. On définit usuellement des opérateurs d'isospin $\hat{I}^3$ et $(\hat{I})^2 = (\hat{I}^1)^2 + (\hat{I}^2)^2 + (\hat{I}^3)^2$.

On a les états propres communs à $(\hat{I})^2$ et $\hat{I}^3$, ainsi que les valeurs propres :

$$(\hat{I})^2|i, m_i\rangle = \hbar^2 i(i+1)|i, m_i\rangle$$

$$\hat{I}^3|i, m_i\rangle = \hbar m_i|i, m_i\rangle$$

avec i entier ou demi-entier,
avec $-s \leq m_i \leq +s$ par saut d'une unité.

En liant 2 particules portant un isospin $i = \frac{1}{2}$, on peut construire 4 états d'isospin total $I = 1$ et $I = 0$, $I^3 = \pm 1$. On prend ici comme exemple un proton et un neutron d'isospin i^3 opposés (ainsi qu'un antiproton et un antineutron).

Pour la matière, on a le doublet neutron proton $\binom{n}{p}$. Pour l'antimatière, on a le doublet $\binom{-\bar{n}}{\bar{p}}$.

On obtient :

$$|I = 1, I^3 = 1\rangle = \left|i = \frac{1}{2}, i^3 = \frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle = |p; -\bar{n}\rangle$$

$$|I = 1, I^3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = \frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = -\frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle\right)\right.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|p; \bar{p}\rangle + |n; -\bar{n}\rangle)$$

$$|I = 1, I^3 = -1\rangle = \left|i = \frac{1}{2}, i^3 = -\frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle = |n; \bar{p}\rangle$$

$$|I = 0, I^3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = \frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle - \left(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = -\frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle\right)\right.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|p; \bar{p}\rangle - |n; -\bar{n}\rangle)$$

II.3 Analogies inversion du spin *S* et inversion de l'isospin *I*

II.3.1 Inversion du spin *S* lors d'une transition hyperfine de l'électron

On appelle transition hyperfine de l'atome d'hydrogène, l'émission par l'atome d'hydrogène d'une lumière invisible, qui a pour longueur d'onde 21cm dans le cas où l'électron revient dans son état le plus stable (orbite la plus basse ou rayon de Bohr). Cela correspond au passage d'un niveau d'énergie à un nouveau niveau très proche du précédent, d'où le terme hyperfine.
Comme on l'a évoqué précédemment, G. Uhlenbeck et S. Goudsmit proposent que cette transition hyperfine corresponde au passage d'un mouvement où électron et proton tournent sur eux-mêmes dans le même sens, à un mouvement où électron et proton tournent sur eux-mêmes dans des sens opposés (on parle d'un passage de spin du proton et de l'électron de parallèle à antiparallèle).

Pour prendre une comparaison avec le système Terre Soleil, une transition hyperfine reviendrait à inverser le spin de la Terre ou celui du Soleil. Par exemple, si on inverse le spin de la Terre, pour les Terriens, le Soleil ne se lève plus à l'est, mais à l'ouest. Si on inverse le spin du Soleil, pour les Terriens, le Soleil se lève toujours à l'est, mais sa rotation sur lui-même en un an se fait dans l'autre sens.

On peut écrire la transition hyperfine (avec conservation global du spin S^3 lors de la réaction et conservation de la charge électrique Q par l'électron) :

$$e^-(S^3 = \frac{\hbar}{2}, Q = -1) \rightarrow e^-(S^3 = -\frac{\hbar}{2}, Q = -1) + \gamma(S^3 = \hbar, Q = 0)$$

Nota
Dans le cas de l'atome d'hydrogène, le cas le plus stable (atome le moins excité pour le spin) correspond à électron et proton de spins antiparallèles.

On a la figure suivante qui symbolise le passage de parallèles à antiparallèles avec émission d'un photon d'énergie $\Delta E = 10^{-6} eV$.

Spins proton et électron, parallèles p^+ e^-

Spins proton et électron, antiparallèles p^+ e^-

$\Delta E = 10^{-6} eV$

Figure 4 : transition hyperfine de l'électron

II.3.2 Inversion de l'isospin *I* du nucléon lors d'une désintégration β^-

Par analogie avec la transition hyperfine qui inverse le spin S de l'électron, on suppose une réaction qui inverse l'isospin I du nucléon. On a par exemple le passage d'un neutron à un proton observé lors d'une désintégration β^-.

$$n(I^3 = -\frac{\hbar}{2}, Q = 0) \rightarrow p(I^3 = \frac{\hbar}{2}, Q = 1) + B(I^3 = -\hbar, Q = -1)$$

Par analogie avec le photon γ qui porte un spin $S^3 = \hbar$, on suppose ici l'existence d'un boson B qui porte un isospin $I^3 = -\hbar$ et qui permet la conservation de I^3.

Nota
Lors du passage du neutron au proton, la charge électrique Q n'est pas conservée au niveau des nucléons.

Dans le prochain mémoire, on proposera que l'analogue de la charge électrique Q lors l'inversion de spin S, c'est l'hypercharge faible Y_W (notion introduite dans le Modèle électrofaible) lors de l'inversion de l'isospin I.
Comme la charge électrique Q est conservée par l'électron lors d'une transition hyperfine, l'hypercharge faible Y_W est conservée par le nucléon (gauche) lorsque ce dernier passe de neutron à proton :

$$n(I^3 = -\frac{\hbar}{2}, Y_W = 1) \rightarrow p(I^3 = \frac{\hbar}{2}, Y_W = 1) + B(I^3 = -\hbar, Y_W = 0)$$

II.4 Particule médiatrice et notion d'interaction

II.4.1 Mécanique et électromagnétisme classiques (avant les années 1920), ne pas distinguer la particule qui subit le champ de celle qui le génère

En mécanique et en électromagnétisme classiques, un corps (massique ou chargé électriquement) pénétrant dans un champ, est soumis à une force de la part de ce champ.

Comme une possible ambivalence, le corps (massique ou chargé) peut lui-même créer un champ (gravitationnel ou électromagnétique), auquel vont être soumis d'autres corps. On parle alors de sources (charge électrique, courant, aimant ou masse) pour le corps générant le champ.

Au cours des années 1920-1930, apparait une nouvelle approche avec l'idée de distinguer particules subissant le champ et particules générant le champ (ou véhiculant le champ).

Les particules subissant le champ sont appelées des fermions, car elles suivent la statistique de Fermi-Dirac. Elles ont un spin demi-entier. Souvent, ce sont des particules de matière persistantes, au sens qu'elles n'apparaissent ni ne disparaissent. Elles participent à des réactions de diffusion : collision avec un autre fermion et alors transformation de certaines caractéristiques comme par exemples le spin, l'impulsion, etc. Elles participent également à des réactions d'annihilation, par exemple entre un électron et un positron. Elles suivent le principe d'exclusion proposé par W. Pauli en 1926 : tous les fermions d'un même système ne peuvent partager simultanément le même état quantique.

Les particules générant le champ sont les particules médiatrices que l'on a évoquées précédemment. Elles sont appelées des bosons, car elles suivent la statistique de Bose-Einstein. Elles ont un spin entier. Ces particules médiatrices sont souvent éphémères, au sens qu'elles peuvent apparaître ou disparaître. Parmi elles, on trouve les photons, les particules de lumière. Les bosons ne respectent pas le principe d'exclusion de Pauli et peuvent donc, dans un même système, partager simultanément un même état quantique.

Nota sur la Supersymétrie

Avec cette nouvelle conception de particule médiatrice (ou de boson) représentante du champ, on perd l'idée d'une interchangeabilité entre les particules fermion pouvant subir un champ et les particules bosons pouvant créer un champ.

Dans les années 1960, des chercheurs russes développent des modèles de Supersymétrie avec l'idée de faire correspondre à chaque particule fermion, une particule boson, afin de retrouver cette interchangeabilité entre particule qui crée le champ et particule qui le subit.

Les particules prédites par les modèles de Supersymétrie n'ont en définitive pas été découvertes. Malgré l'intérêt théorique qu'ils avaient, ces modèles n'ont donc pas été confirmés.

II.4.2 La notion d'interaction

A la notion de force chère à la mécanique classique, se substitue peu à peu la notion d'interaction. Celle-ci peut être vue comme une approche plus englobante que celle de force. Elle-aussi distingue entre particules de matière subissant le champ et particules médiatrices le générant.

Les particules subissant le champ et portant un spin S^3 ou un isospin I^3 demi-entier, ne peuvent directement réagir entre elles. Elles entrent en interaction avec des particules médiatrices porteuses de spin ou d'isospin entier, qui jouent le rôle d'intermédiaire.

Lors de la transition hyperfine, c'est l'interaction électromagnétique qui intervient. Le photon γ est présenté comme la particule médiatrice de l'interaction (ainsi que le représentant du champ électromagnétique).

Lors de la désintégration β^-, on verra à la fin de ce mémoire que le Modèle électrofaible fait intervenir 3 interactions : interaction électromagnétique, interaction faible et une dernière qu'on appellera interaction hyper.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a évoqué la notion d'isospin I introduite par W. Heisenberg en 1932.
L'isospin I possède d'abord des analogies avec la charge électrique Q, au sens que I est présenté comme la charge nucléaire forte avec des valeurs opposées pour le proton et le neutron, expliquant ainsi leur attraction dans le noyau.

L'isospin I possède également des analogies avec le spin S à la fois mathématiques et physiques lors des réactions entre particules. Le spin S s'inverse lors d'une transition hyperfine transformant un électron en un électron de spin opposé, avec les deux électrons pouvant être présentés comme les deux faces d'une même particule. L'isospin I s'inverse lorsqu'on passe d'un neutron à un proton, avec les deux nucléons pouvant être présentés comme les deux faces d'une même particule.

Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser à la désintégration $\beta^\pm$ et au premier modèle faible sur l'interaction faible, celui d'Enrico Fermi en 1933. On va notamment évoquer l'idée de quadrivecteurs densité de charge courants électromagnétiques $j^\mu_{e.m.}$ (noté ici j^μ_Q car transportant une charge électrique Q) et de charge courants faibles j^μ_{weak}.

Chapitre III Théorie de Fermi sur l'interaction faible (1933)

Objet du chapitre
On résume dans ses grandes lignes la théorie de Fermi sur l'interaction faible, théorie fondée sur une analogie avec l'électromagnétisme et sur une universalité des phénomènes de désintégration des particules.

Sur le modèle du quadrivecteur densité de charge courants électromagnétiques j_Q^μ composés d'électron positron se désintégrant en particule médiatrices photons γ, la théorie de Fermi définit un quadrivecteur densité de charge courants faibles j_{weak}^μ se désintégrant également en particules.

III.1 Analogie entre des désintégrations de particules

III.1.1 Idée de Fermi : universalité des phénomènes de désintégrations

En 1933, E. Fermi propose une première théorie sur l'interaction faible et la désintégration β^-. Son idée, c'est d'effectuer une analogie entre :

- la désintégration d'un électron et d'un positron en photon, désintégration qui fait intervenir l'interaction électromagnétique, le photon se matérialisant à son tour en positron et en électron,
- la désintégration β^-, désintégration qui fait intervenir l'interaction faible, avec le neutron qui se désintègre en un proton, un électron et un antineutrino.

Ainsi, E. Fermi tente de montrer l'universalité d'un certain nombre de phénomènes de désintégrations des particules.

Nota
W. Heisenberg avait étudié des analogies entre la transition hyperfine et la désintégration β^- pour développer sa notion d'isospin. E. Fermi étudie lui des analogies entre l'annihilation électron positron et la désintégration β^- pour développer une notion générale de quadrivecteur densité de charge courants.
Soulignons que la transition hyperfine et l'annihilation électron positron génèrent tous les deux un photon et font intervenir l'interaction électromagnétique. On y reviendra par la suite.

III.1.2 Idée de Dirac : quadrivecteur densité de charge courants électron positron

Quelques années avant E. Fermi, P. Dirac propose que le couple électron e positron $\bar{e}$ forme un quadrivecteur densité de charge courants électromagnétique $j_Q^\mu(e^-,\bar{e}^+) = Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (avec $\mu = x,y,z,t$ ou $\mu = 0,1,2,3$ et Q le nombre de charges électriques élémentaires e).

On a l'énergie d'interaction entre les quadrivecteurs densité de charge courants j_Q^μ et potentiel électromagnétique A^μ :

$$E = ej_Q^\mu A^\mu$$

Le couple positron électron forme également un quadrivecteur densité de charge courants électromagnétiques $j_Q^{\mu\prime}(\bar{e}^{+\prime},e^{-\prime})$. Si la désintégration, intégration est ponctuelle (très rapide), le courant $j_Q^\mu(e^-,\bar{e}^+)$ interagit directement avec le courant $j_Q^{\mu\prime}(\bar{e}^{+\prime},e^{-\prime})$. On n'a pas alors intervention d'une particule médiatrice comme le photon.

Nota 1
Par concision, on parlera abusivement de courant $j_Q^\mu(e^-,\bar{e}^+)$, alors qu'il s'agit en fait d'un quadrivecteur densité de charge courants $j_Q^\mu(e^-,\bar{e}^+)$ ($\mu = t,x,y,z$). Le terme $j_Q^t(e^-,\bar{e}^+) = Q\bar{\psi}\gamma^0\psi$

représente la densité de charge électrique. Les termes $j_Q^{x,y,z}(e^-, \bar{e}^+) = Q\bar{\psi}\gamma^{1,2,3}\psi$ représentent les densités de courants électriques.
Pour l'interaction électromagnétisme, l'énergie d'interaction $E = ej_Q^{\mu}A^{\mu}$ correspond à l'énergie potentielle généralisée électromagnétique.

Nota 2
Dans l'énergie d'interaction $E = ej_Q^{\mu}A^{\mu}$, le terme courant ej_Q^{μ} représente l'électron et le positron, le terme quadrivecteur potentiel A^{μ} représente le photon γ.

Nota 2
On rappelle les matrices de Pauli :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On rappelle les matrices γ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } i = 1,2,3$$

On définit le spineur conjugué :

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$$

avec $\psi^{\dagger}$ matrice adjointe, transposée du conjugué.

On a la réaction lors de l'interaction entre les deux courants $j_Q^{\mu}(e^-, \bar{e}^+)$ et $j_Q^{\mu}{}'(\bar{e}^-{}', e^+{}')$:

$$e^- + \bar{e}^+ \rightarrow \bar{e}^+{}' + e^-{}'$$

Cela correspond au diagramme suivant :

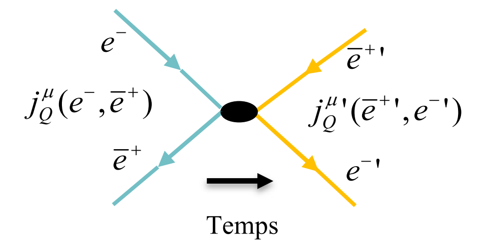


Figure 5 : annihilation électron positron, puis matérialisation électron positron

Nota sur le courant électrique et une force de type électrique
Suivant l'effet photoélectrique d'A. Einstein et le modèle de l'électron de N. Bohr, on peut interpréter le terme énergie d'interaction $E = ej_Q^{\mu}A^{\mu}$ comme l'effet d'un photon représenté par le quadrivecteur potentiel A^{μ} sur un électron porteur de charge électrique eQ et en orbite « stable » autour du noyau.
Suivant N. Bohr, le photon en interagissant avec l'électron, génère un changement de moment cinétique orbital (ou de spin suivant G. Uhlenbeck et de S. Goudsmit) de l'électron, un changement d'orbite et un déplacement de l'électron. On a un déplacement de charge eQ et donc un courant électrique j_Q^{μ}. On retrouve l'idée qu'une force de type électrique a pour effet un déplacement de charge électrique.

Soulignons que dans l'interaction électromagnétique, 2 nombres quantiques sont utilisés :
- d'abord, le spin S qui est échangé entre le photon et l'électron et dont l'échange génère un changement d'orbite et un déplacement de l'électron,

- ensuite, la charge électrique Q caractéristique propre à l'électron, mise en mouvement lors du changement d'orbite de l'électron.

III.2 Théorie de Fermi

III.2.1 Courant faible

En 1933, E. Fermi reprend l'idée de P. Dirac sur le couple électron positron formant un courant électromagnétique. Il imagine que les couples neutron proton et anti-neutrino électron puissent également former un courants dit faible. Le courant faible neutron proton $j^{\mu}_{weak}(n, p^{+})$ interagit avec un autre courant faible antineutrino électron $j^{\mu}_{weak}(\bar{\nu}_e, e^{-})$.

Nota, avant-goût sur l'isospin faible *T* (appelé aussi charge faible)
L'isospin faible T est un nombre quantique proposé dans les années 1960 par S. Glashow dans le cadre du Modèle électrofaible. L'isospin faible T partage des ressemblances avec le spin S et l'isospin I. Comme eux, T est fondé sur un groupe $SU(2)$. On utilise fréquemment la 3ème composante de l'isospin faible : T^3.
Il existe également des analogies entre T^3 et Q, puisque ce sont des quantités transportées respectivement par les courants faibles et les courants électromagnétiques. On désigne souvent T^3 comme le nombre de charges faibles élémentaires, par analogie avec Q qui est le nombre de charges électriques élémentaires.
On verra à la fin de ce mémoire qu'il existe plusieurs types de courants faibles j^{μ}_{weak}. Le courant $j^{\mu}_{T^3}$ est l'un d'entre eux.

Lors de la désintégration β^{-}, on a la réaction entre les deux courants faibles $j^{\mu}_{weak}(n, p^{+})$ et $j^{\mu}_{weak}(\bar{\nu}_e, e^{-})$:

$$n \rightarrow p^{+} + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

Cela correspond au diagramme suivant :

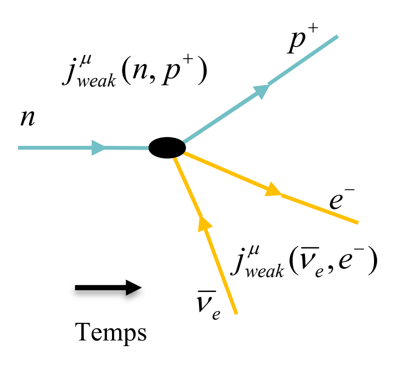


Figure 6 : désintégration β^{-}

III.2.2 Prise en compte d'une particule médiatrice pour le courant électron positron

Pour l'interaction électromagnétique, on a une amplitude de probabilité M entre deux courants $j^{\mu}_{Q}(e^{-}, \bar{e}^{+})$ et $j^{\mu\prime}_{Q}(\bar{e}^{-\prime}, e^{+\prime})$ égale à :

$$M = \frac{e^2}{(p^{\mu})^2} j^{\mu}_{Q}(e^{-}, \bar{e}^{+}) j^{\mu\prime}_{Q}(\bar{e}^{-\prime}, e^{+\prime})$$

avec p^{μ} $(\mu = t, x, y, z)$ le quadrivecteur énergie impulsion porté lors de l'interaction entre les deux courants j^{μ}_{Q} et $j^{\mu\prime}_{Q}$, c'est-à-dire le quadrivecteur énergie impulsion porté par la particule médiatrice photon γ.

Cela correspond au diagramme suivant :

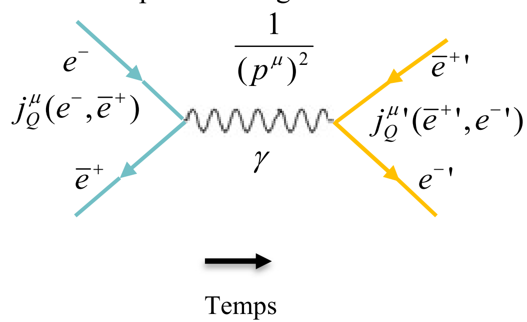


Figure 7 : annihilation électron positron, photon, puis matérialisation électron positron

Nota
Dans la relation $M = \frac{e^2}{(p^\mu)^2} j_\mu j^{\mu\,\prime}$, on a en fait une sommation contravariant-covariant.

III.2.3 Amplitude de probabilité

A l'époque d'E. Fermi, l'idée de particule médiatrice est balbutiante et E. Fermi suppose que l'interaction faible est ponctuelle.

Pour la réaction $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, E. Fermi construit une amplitude de probabilité M pour l'interaction entre les deux courants faibles :

$$M = \frac{8G_F}{\sqrt{2}} j^\mu_{weak}(n, p^+) \cdot j^\mu_{weak}(\bar{\nu}_e, e^-)$$

E. Fermi note également que l'amplitude de probabilité est proportionnelle à une constante G_F jouant pour l'interaction faible le rôle de $\frac{e^2}{(p^\mu)^2}$. G_F est appelée aujourd'hui constante de Fermi. E. Fermi trouve comme valeur pour cette constante :

$$G_F = 1{,}166 \times 10^{-5} GeV^{-2}$$

III.3 Avant-goût du Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam et du Modèle des quarks

Le Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam et le Modèle des quarks utilisent tous deux la notion de courant faible de Fermi qui sera particulièrement féconde. On donne ici un avant-goût de ces deux théories.

III.3.1 Avant-goût du Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam

Si l'interaction faible n'est plus considérée ponctuelle comme dans le modèle de Fermi, on a un diagramme faisant intervenir des particules médiatrices (comme utilisé dans le Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam qu'on étudiera à la fin de ce mémoire) :

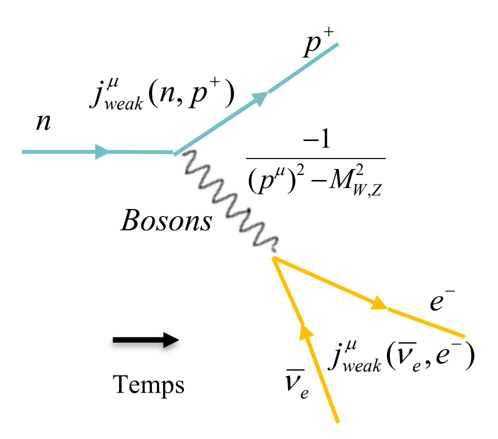


Figure 8 : désintégration β^- avec particules médiatrices

On a une amplitude de probabilité M égale à :

$$M = \frac{-{g_T}^2}{(p^{\mu})^2 - M^2_{W,Z}} j^{\mu}_{weak}(n, p^+) \cdot j^{\mu}_{weak}{}'(\bar{\nu}_e, e^-)$$

g_T est la charge élémentaire faible liée à l'interaction faible (l'analogue de la charge élémentaire électrique e).
$M_{W,Z}$ est la masse des bosons faibles $W^{\pm}$ et Z^0, particules médiatrices du Modèle électrofaible.

Nota
A la fin de ce mémoire, on verra que $g_T T^3$ pour l'interaction faible est l'analogue de eQ pour l'interaction électromagnétique.

L'idée c'est de faire tendre le quadrivecteur Energie impulsion (p^{μ}) vers 0, pour retrouver le modèle de Fermi :

$$\frac{-{g_T}^2}{(p^{\mu})^2 - M^2_W} \underset{(p^{\mu}) \to 0}{\to} \frac{{g_T}^2}{M^2_W} = \frac{8G_F}{\sqrt{2}}$$

Suivant la théorie de Fermi, on introduit le couplage :

$$\frac{{g_T}^2}{M^2_W} = \frac{8G_F}{\sqrt{2}}$$

On verra que cette relation permet de retrouver la masse des bosons faibles $W^{\pm}$.

Nota : pourquoi suppose-t-on que les bosons faibles $W^{\pm}$ et Z^0 ont une masse contrairement au photon γ ?
On suppose que les bosons faibles $W^{\pm}$ et Z^0 ont une masse, parce que l'interaction faible possède une portée très faible comparée aux interactions électromagnétiques et gravitationnelles (qui ont une portée infinie).

Suivant les idées de H. Yukawa proposées en 1935, on rapproche la longueur d'onde de Compton $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ de la portée de l'interaction, avec m la masse de la particule médiatrice de l'interaction. Pour les interactions faibles, puisque la portée (et donc λ_c) est très petite, on suppose que les particules médiatrices $W^{\pm}$ et Z^0 ont une masse relativement importante.
On explicitera cela dans le prochain chapitre portant sur le mésotron de Yukawa.

III.3.2 Avant-goût du Modèle des quarks

Dans le Modèle des quarks proposé par M. Gell-Mann et G. Zweig dans les années 1960, le neutron est formé de deux quarks down et d'un quark up. Le proton est formé de deux quarks up et d'un quark down. Les notions d'up et de down représentent la saveur du quark et se distinguent par l'isospin I^3. Un quark de saveur up possède un isospin $I^3 = \frac{1}{2}$, un quark de saveur down possède un isospin $I^3 = -\frac{1}{2}$.

Le Modèle des quarks cherche à modéliser l'interaction forte. Dans ce cadre, les notions de saveur et d'isospin I peuvent être rapprochées de la charge nucléaire forte.

Par analogie avec l'interaction forte, l'isospin I^3 et la charge nucléaire forte, le Modèle électrofaible définit pour l'interaction faible, un isospin faible ou une charge nucléaire faible T^3, qui prend pour les quarks up et down les mêmes valeurs.

On a :
$T^3 = I^3 = \frac{1}{2}$ pour le quark up u.
$T^3 = I^3 = -\frac{1}{2}$ pour le quark down d.

Nota
Cela est vrai uniquement pour les quarks up et down dits gauchers. On explicitera dans un prochain chapitre les notions d'hélicité et de particules droitières et gauchères.

Dans le Modèle des quarks, les leptons (électron et neutrino) n'ont pas d'isospin I. En effet, ce dernier est considéré comme une charge forte, et les leptons ne sont pas sujets à l'interaction forte.
Par contre, les leptons sont sujets à l'interaction faible et le Modèle électrofaible attribue à l'électron et au neutrino (les gauchers uniquement), une charge faible correspondante à celle du quark down et du quark up.

On a :
$T^3 = \frac{1}{2}$ pour le neutrino ν_e ($T^3 = -\frac{1}{2}$ pour l'antineutrino $\bar{\nu}_e$).
$T^3 = -\frac{1}{2}$ pour l'électron e^-.

On peut réécrire la désintégration β^- avec un quark up qui se transforme en quark down :

$$d(T^3 = -\frac{1}{2}, Q = -\frac{1}{3}) \to u(T^3 = \frac{1}{2}, Q = \frac{2}{3}) + e^-(T^3 = -\frac{1}{2}, Q = -1) + \bar{\nu}_e(T^3 = -\frac{1}{2}, Q = 0)$$

Le boson faible W^- est la particule médiatrice intervenant dans la réaction. Le boson W^- porte une charge électrique $Q = -1$. Les courants $j^{\mu}_{T^-}(d, \bar{u})$ et $j^{\mu}_{T^-}(\bar{\nu}_e, e^-)$ sont les courant faibles interagissant avec le boson W^- (on y reviendra lorsqu'on traitera le Modèle électrofaible).

On a le diagramme de Feynman correspondant :

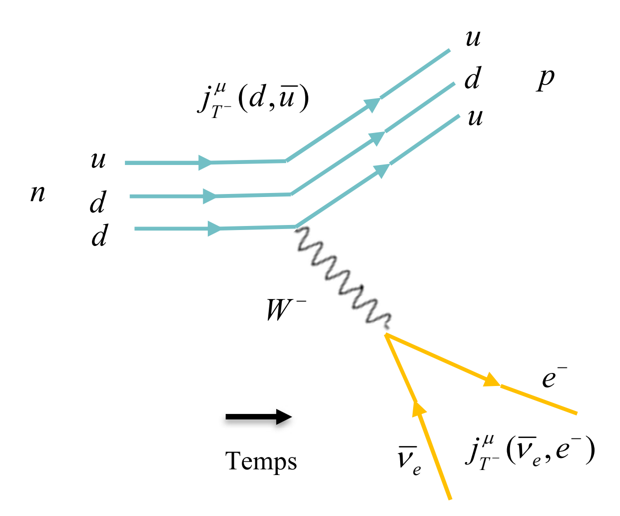


Figure 9 : désintégration β^- selon le Modèle des quarks

Nota sur le neutrino
Le neutrino est proposé par W. Pauli en 1930 pour expliquer l'apparente non conservation du moment cinétique lors d'une désintégration β^-. W. Pauli utilise initialement le terme de neutron. Pour le distinguer du neutron présent dans le noyau, il est rebaptisé neutrino par les physiciens Edoardo Amaldi et Enrico Fermi.

A l'instar du doublet neutron proton (ou quark up et quarks down), l'électron et le neutrino forment un doublet de charges faibles opposés (et de charges électriques différentes).

$$e^-(T^3 = -\frac{1}{2}, Q = -1)$$

$$\nu_e(T^3 = \frac{1}{2}, Q = 0)$$

Cependant, contrairement aux deux nucléons (et aux deux quarks), électron et neutrino n'ont pas une masse proche. L'électron possède une masse bien supérieure à celle du neutrino.

III.4 Processus de Fermi et processus de Gamow Teller

III.4.1 Désintégration β^-, processus de Fermi et processus de Gamow Teller

Dans la désintégration β^-, on distingue deux types d'interaction faibles ou deux types de processus :

- l'interaction vectorielle V, avec le boson faible W^- qui ne porte pas de spin, et qui se désintègre en deux particules de spin demi-entier opposé. On l'appelle le processus de Fermi.
- l'interaction axiale A, avec le boson faible W^- qui porte un spin 1 ou -1, et qui se désintègre en deux particules de même spin demi-entier. On l'appelle le processus de Gamow Teller.

III.4.2 Processus de Fermi, interaction vectorielle

On peut écrire schématiquement le processus de Fermi, avec un boson W^- ne possédant pas de spin :

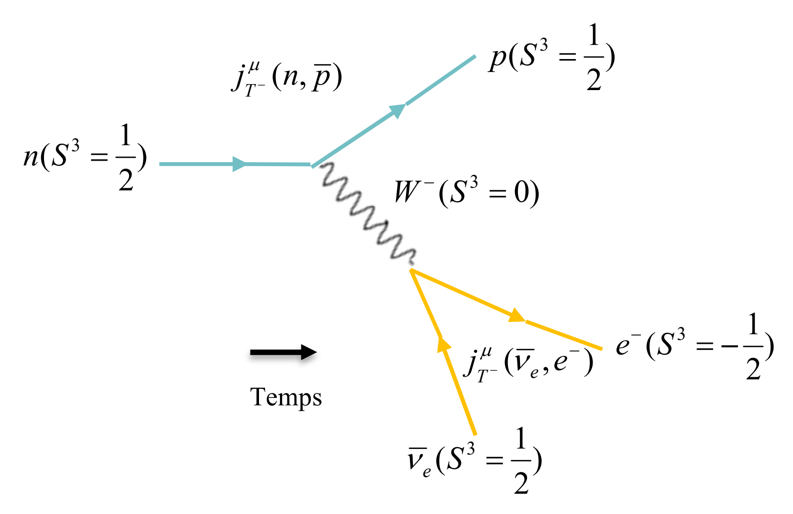


Figure 10 : processus de Fermi

III.4.3 Processus de Gamow Teller, interaction axiale

On peut écrire schématiquement le processus de Gamow Teller, avec un boson W^- possédant un spin entier :

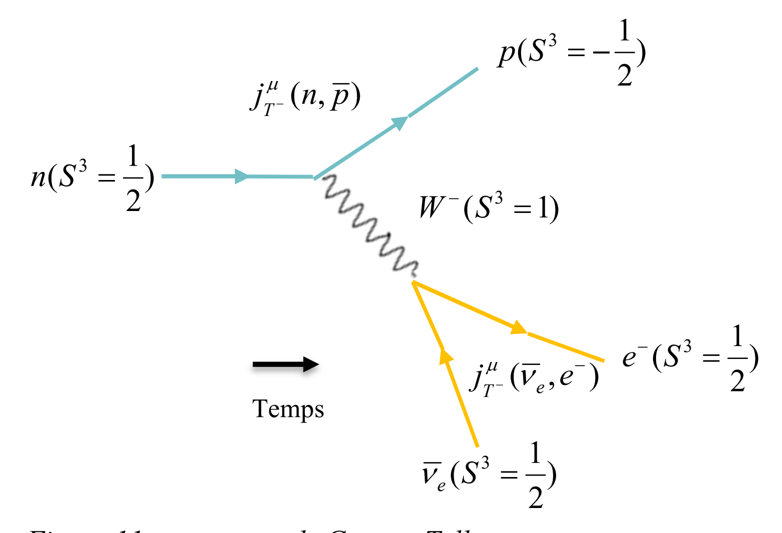


Figure 11 : processus de Gamow Teller

Nota 1
W^- est bien un boson, car dans les 2 cas il possède un spin entier.

Nota 2
Pour les 2 diagrammes, les valeurs du spin S^3 sont données à titre d'exemple. D'autres valeurs peuvent être portées par les particules.

III.5 Conclusion du chapitre

P. Dirac avait eu l'idée d'un courant électromagnétique composé d'un couple électron positron qui se désintègre en photon, puis qui se matérialise en un couple électron positron.
Inspiré par cette idée et suivant une approche généralisatrice des phénomènes de désintégration, E. Fermi propose un courant faible formé d'un couple neutron proton qui se désintègre, puis qui se matérialise en un couple électron antineutrino.

La théorie de l'interaction faible de Fermi n'inclut pas la notion de particules médiatrices. Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser à la théorie du mésotron de Yukawa qui propose une particule médiatrice massique afin d'expliquer la faible portée des interactions nucléaires.

Chapitre IV Le mésotron de Yukawa (1935)

Objet du chapitre
On explicite ici la théorie de Hideki Yukawa, qui afin d'expliquer la faible portée des interactions nucléaire, propose une particule médiatrice massique : le mésotron. S'inspirant de l'équation d'onde de Schrödinger qui décrit l'électron, H. Yukawa propose une équation d'onde qui décrit le mésotron. Il propose également de confondre cette équation d'onde avec le potentiel dit de Yukawa généré par le mésotron. A la fin du chapitre, on évoquera les mésons pions, particules découvertes dans les années 1940-1950 et en quelques sorte confirmation expérimentale du mésotron de Yukawa.

IV.1 Théorie de Hideki Yukawa pour décrire les interactions nucléaires, le mésotron ou méson

En 1935, H. Yukawa développe une théorie fructueuse pour décrire les interactions nucléaires au sein du noyau entre les nucléons (par exemple entre un proton et un neutron).

Pour expliquer que ces interactions nucléaires ont une portée limitée R_N (environ $R_N = 10^{-15}m$, ce qui correspond au rayon du noyau de l'atome d'hydrogène ou d'un nucléon), H. Yukawa suppose l'existence d'une particule médiatrice massique le mésotron de masse m_{mes}, particule appelée par la suite le méson.

H. Yukawa propose de rapprocher la longueur d'onde de Compton λ_C de la portée limitée de l'interaction nucléaire :

$$\frac{\lambda_C}{2\pi} = \frac{1}{K_C} = 2R_N$$

En utilisant la relation de Compton :

$$m_{mes}c = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda_C} = \frac{h}{\lambda_C} = \hbar K_C$$

H. Yukawa en déduit la masse de la particule médiatrice, le mésotron ou méson :

$$m_{mes}c = \frac{\hbar}{2R_N} = \frac{h}{\lambda_C}$$

<u>Application numérique</u>

$$m_{mes}c^2 = \frac{1{,}973 \times 10^2 eV.nm}{2 \times 10^{-15}} \approx 100MeV$$

Suivant l'idée H. Yukawa, on peut ainsi relier la portée R_N d'une interaction à la masse de sa particule médiatrice m :

$$R_N = \frac{\hbar}{2mc}$$

Nota 1 sur le principe d'incertitude d'Heisenberg
Pour retrouver la masse de la particule médiatrice, on peut aussi utiliser l'équation champ source d'Einstein $mc^2 = \hbar\Omega$ et le principe d'incertitude d'Heisenberg, au lieu de la relation de Compton.

On a :

$$\Delta E \Delta t \approx \frac{\hbar}{2}$$

On pose $\Delta E = m_{mes}c^2 = \hbar\Omega$ (c'est-à-dire l'équation champ source d'Einstein).
On arrive à :

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{2m_{mes}c^2}$$

On pose $R_N \approx c\Delta t$, en supposant que la vitesse du mésotron est proche de celle de la lumière. On retrouve :

$$R_N \approx \frac{\hbar}{2m_{mes}c}$$

Nota 2 sur le rayon de l'atome d'hydrogène
Rappelons que :
- le rayon du noyau de l'atome d'hydrogène (c'est-à-dire un proton) correspond à la portée de l'interaction nucléaire R_N,
- le rayon de l'atome d'hydrogène correspond dans le modèle de Bohr à l'orbite de l'électron (stabilisé par la force électrostatique et la force d'inertie centrifuge) dans son niveau d'énergie le plus stable.

IV.2 Analogie équation d'onde de Schrödinger et équation d'onde de Yukawa, cas d'un électron et d'un mésotron

Dans le 1[er] mémoire, en reprenant les idées de L. de Broglie, on a proposé une méthode pour retrouver l'équation de Schrödinger qui s'applique à un électron. On propose ici une méthode similaire pour retrouver l'équation d'onde de Klein Gordon indépendante du Temps, équation d'onde qui s'applique à un mésotron selon H. Yukawa.

On rappelle d'abord en quelques lignes la méthode pour l'onde électron. On aborde ensuite l'onde mésotron.

IV.2.1 Méthode pour l'onde électron

On part de l'équation d'onde suivante :

$$\nabla^2\psi + \frac{\Omega^2}{{v_\phi}^2}\psi = 0$$

Suivant les idées de L. Broglie, on pose que l'électron est semblable à une onde de vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\Omega}{K}$$

On obtient pour l'équation d'onde :

$$\nabla^2\psi + K^2\psi = 0$$

Suivant l'équation champ source de Broglie, on a la relation de l'impulsion avec le vecteur d'onde :

$$p = \hbar K$$

Suivant l'équation champ source d'Einstein, on a la relation de l'énergie avec la pulsation :

$$E = mc^2 = \hbar\Omega$$

La vitesse v_ϕ de l'onde électron est alors égale à :

$$v_\phi = \frac{\Omega}{K} = \frac{E}{p}$$

On a la relation entre les énergies : $E = E_c + V$ (avec V l'énergie potentielle).

$$E_c = E - V = \frac{p^2}{2m_{élec}}$$

On en déduit l'impulsion :

$$p = \sqrt{2m_{élec}(E - V)}$$

On a le vecteur d'onde :

$$K = \frac{\sqrt{2m_{élec}(E - V)}}{\hbar}$$

$$K^2 = \frac{2m_{élec}(E - V)}{\hbar^2}$$

On retrouve l'équation de Schrödinger :

$$\nabla^2\psi + \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

IV.2.2 Méthode pour l'onde mésotron

On part de l'équation d'onde :

$$\nabla^2\psi + \frac{\Omega^2}{{v_\phi}^2}\psi = 0$$

On pose que le méson est semblable à une onde de vitesse de phase (en complexe) :

$$v_\phi = \frac{\Omega}{iK}$$

On obtient l'équation d'onde :

$$\nabla^2\psi - K^2\psi = 0$$

On utilise la relation de Compton :

$$m_{mes}c = \hbar K$$

On obtient l'équation d'onde de Klein Gordon indépendante du temps qui s'applique à un mésotron :

$$\nabla^2\psi - \left(\frac{m_{mes}c}{\hbar}\right)^2\psi = 0$$

IV.3 Le potentiel de Yukawa

IV.3.1 Potentiel du champ nucléaire

H. Yukawa utilise l'équation d'onde de Klein Gordon indépendante du temps :

$$\nabla^2\psi - (\frac{m_{mes}c}{\hbar})^2\psi = 0$$

et interprète la fonction d'onde ψ comme un potentiel à symétrie sphérique.

H. Yukawa confond ainsi :
- la fonction d'onde ψ représentant l'onde particule mésotron,
- le potentiel du champ nucléaire généré par la particule médiatrice mésotron.

H. Yukawa réécrit l'équation d'onde de Klein Gordon indépendante du temps en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\psi(r)}{dr}) = (\frac{m_{mes}c}{\hbar})^2\psi(r)$$

Nota
La fonction d'onde $\psi(r)$ est considérée comme un potentiel, c'est donc la partie annulée lors d'un changement de référentiels.
A partir de la fonction d'onde $\psi(r)$, on peut définir un champ nucléaire (appelé aussi champ mésonique car créé par le méson) égale à $\frac{\partial\psi(r)}{\partial r}$.

En résolvant l'équation différentielle, on obtient un potentiel de Yukawa à symétrie sphérique (présenté ici sous la forme d'une énergie potentielle, car on a le terme g^2) :

$$\psi(r) = -g^2\frac{e^{-(\frac{m_{mes}c}{\hbar}r)}}{r} = -g^2\frac{e^{-(\frac{2\pi}{\lambda_C}r)}}{r}$$

On peut interpréter g^2 comme une constante de couplage entre le méson et un nucléon, g comme une charge élémentaire de l'interaction nucléaire.

Rappel sur la longueur d'onde de Compton

$$\frac{m_{mes}c}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda_C} = K_C$$

IV.3.2 Potentiels écrantés

Si on fait tendre la masse m_{mes} du mésotron vers 0, on obtient un potentiel de type coulombien ou newtonien qui décroit en $\frac{1}{r}$ dans l'Espace et défini à une constante multiplicative près.

On a l'énergie potentielle électrostatique générée par une charge électrique q sur une charge électrique $-q$:

$$qA^t(r) = \frac{-g^2}{r} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On a l'énergie potentielle gravitationnelle générée par une masse m sur une autre masse m :

$$mV^t(r) = \frac{-g^2}{r} = \frac{-Gm^2}{r}$$

On présente parfois le potentiel de Yukawa comme un potentiel coulombien ou newtonien écranté (ou à écran).

Nota 1, potentiel vecteur magnétique écranté et phénomène de supraconductivité
Le potentiel de Yukawa peut également être assimilé à un potentiel vecteur magnétique écranté $\vec{A}^a$ $a = x, y, z$.

Suivant le théorème de Biot et Savart, on a une décroissance du champ magnétique en $\frac{1}{r^2}$ et du potentiel vecteur en $\frac{1}{r}$.

On a l'équation de Klein Gordon indépendant du temps :

$$\nabla^2\psi - (\frac{mc}{\hbar})^2\psi = 0$$

En remplaçant la fonction d'onde ψ par un potentiel vecteur magnétique écranté, on obtient :

$$\nabla^2\vec{A}^a - (\frac{mc}{\hbar})^2\vec{A}^a = 0$$

On remplace $\vec{A}^a$ par un champ magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^a$, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} = -(\frac{mc}{\hbar})^2\vec{A}^a$$

Si on ajoute un rotationnel de chaque côté, on a :

$$\nabla^2\vec{B} = -\vec{\nabla} \times ((\frac{mc}{\hbar})^2\vec{A}^a)$$

$$\nabla^2\vec{B} = -(\frac{mc}{\hbar})^2\vec{\nabla} \times \vec{A}^a = -(\frac{mc}{\hbar})^2\vec{B}$$

$$\nabla^2\vec{B} = -(\frac{mc}{\hbar})^2\vec{B}$$

On résout cette équation différentielle et on trouve :

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, exp^{-\frac{mc}{\hbar}x} = \vec{B}_0 exp^{-\frac{2\pi}{\lambda}x}$$

On obtient un champ magnétique $\vec{B}$ qui est expulsé du matériau à partir d'une longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

Cela correspond au phénomène de supraconductivité où la portée du champ magnétique $\vec{B}$ est fortement réduite dans un matériau supraconducteur.
Suivant le modèle ici décrit, le photon particule médiatrice de l'interaction électromagnétique acquiert une masse m. Cette masse du photon tend vers l'infini $m \rightarrow \infty$, lorsque le champ magnétique $\vec{B}$ se trouve de plus en plus expulsé du matériau, c'est-à-dire lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

On reviendra sur cela lorsqu'on abordera le mécanisme BEH qui s'inspirant des idées de H. Yukawa et du phénomène de supraconductivité, explique la faible portée des interactions nucléaires et permet d'attribuer une masse aux particules.

Nota 2, lien entre masse et orbite
Dans son modèle de l'électron, N. Bohr assimile le rayon de l'orbite de l'électron r_{Bohr} à l'inverse du vecteur d'onde :

$$r_{Bohr} = \frac{1}{K}$$

En utilisant la relation champ source de Broglie $p = \hbar K$, on trouve le rayon de l'orbite de l'électron en fonction de son impulsion :

$$r_{Bohr} = \frac{\hbar}{p}$$

On note que plus l'impulsion de la particule est élevée, plus l'orbite est petite. Cette relation $r = \frac{\hbar}{p}$ peut être à priori valable pour des particules sans masse comme le photon.

Dans son modèle du mésotron, H. Yukawa assimile la portée R_N de l'interaction nucléaire à l'inverse du vecteur d'onde (avec un facteur $\frac{1}{2}$) :

$$R_N = \frac{1}{2K}$$

En utilisant la relation de Compton $mc = \hbar K$, on trouve la portée R_N de l'interaction véhiculée par la particule en fonction de sa masse :

$$R_N = \frac{\hbar}{2mc}$$

Comme le fait Bohr, on peut également assimiler l'inverse du vecteur d'onde à une orbite de rayon r de la particule :

$$r = \frac{1}{K}$$

En utilisant la relation de Compton $mc = \hbar K$, on trouve le rayon de l'orbite de la particule en fonction de sa masse :

$$r = \frac{\hbar}{mc} = 2R_N$$

On note que plus la masse de la particule est élevée, plus l'orbite est petite.

On donne différentes masses de particules.
Masse mésotron : $m_{mes}c^2 \approx 100MeV$
Masse méson pion : $m_{mes}c^2 \approx 139{,}6MeV$
Masse proton : $m_{pro}c^2 \approx 938{,}3MeV$
Masse boson Z^0 : $m_Z c^2 \approx 91{,}2GeV = 91\,200MeV$
Masse boson $W^{\pm}$: $m_W c^2 \approx 80{,}4GeV = 80\,400MeV$

Le mésotron de Yukawa a une masse environ 10 fois plus petite que le proton et une orbite de rayon environ 10 fois plus grande que le proton.

Le boson Z^0 a une masse environ 100 fois plus grande que le proton et une orbite de rayon environ 100 fois plus petite que le proton.

IV.4 Sur les pions comme particules médiatrices de l'interaction forte, avant-goût sur la théorie de Yang-Mills, le Modèle des quarks et l'interaction de Yukawa

IV.4.1 Découverte du méson pion (1947)

En 1936, une particule de charge –, d'une masse proche de celle prédite par H. Yukawa est découverte dans les rayons cosmiques. On l'appelle le méson mu. Cependant, on s'aperçoit rapidement que cette particule ne peut participer aux réactions nucléaires. C'est en fait une sorte de gros électron qu'on rebaptise le muon μ^- (on y reviendra lorsqu'on étudiera les générations de leptons).
En 1947, grâce à des collisions entre particules, on découvre une nouvelle particule qui semble enfin jouer un rôle dans les interactions nucléaires. On baptise la particule le méson pion.

Entre temps, la théorie de Yukawa s'affine et on postule l'existence de trois types de méson (+, – et neutre). Neutre, car pour une certaine interaction nucléaire (celle plus tard qualifié de forte), dans certains cas, il semble ne pas y avoir de différences entre proton et neutron. Un proton peut changer d'état en un proton (idem pour un neutron changeant d'état en un neutron). Pour ce type de changement d'état de proton en proton (ou de neutron en neutron), la particule médiatrice se doit d'être neutre puisqu'elle ne transporte pas de charge électrique.

La théorie de Yukawa s'accorde avec l'expérience puisqu'on découvre 3 types de pions, 2 chargés électriquement : les pions π^+ et π^-, et 1 neutre électriquement : le pion π^0.

IV.4.2 Les mésons pions comme particules médiatrices de l'interaction forte, théorie de Yang-Mills

Dans les années 1950, la théorie de H. Yukawa a pour prolongement une théorie de l'interaction forte qualifiée ici de Yang-Mills. Les pions π^+, π^-, π^0 sont présentés comme les particules médiatrices de l'interaction et l'isospin I est désigné à la fois comme la charge forte de l'interaction et comme la quantité quantique portée par les pions

Nota
La théorie de Yang-Mills décrivant l'interaction forte s'appuie surtout sur les transformations de Jauge. On y reviendra dans un prochain chapitre.

Cette théorie de l'interaction forte et celle de l'interaction électromagnétique ont toutes deux des particules médiatrices. Toutefois, on note une importante différence entre les 2. Dans l'interaction électromagnétique, les photons ne sont pas porteurs de charge électrique : ce sont des spins qu'ils échangent avec les autres particules. Dans l'interaction forte, les pions sont porteurs de charge forte (ou isospin) et ils les échangent avec les autres particules.

Les pions π^+, π^-, π^0 ont les spins S et les isospins I suivants :

Pions	(S, S^3)	(I, I^3)
π^+	(0,0)	(1,1)
π^-	(0,0)	$(1,-1)$
π^0	(0,0)	(1,0)

On donne pour l'exemple quelques réactions d'échange d'isospins I via les pions, réactions qui assurent la cohésion du noyau entre les nucléons.

$$p^+(I^3 = \frac{1}{2}) \rightarrow n(I^3 = -\frac{1}{2}) + \pi^+(I^3 = 1)$$

$$n(I^3 = -\frac{1}{2}) + \pi^+(I^3 = 1) \rightarrow p^+(I^3 = \frac{1}{2})$$

$$n(I^3 = -\frac{1}{2}) \rightarrow p^+(I^3 = \frac{1}{2}) + \pi^-(I^3 = -1)$$

$$p^+(I^3 = \frac{1}{2}) + \pi^-(I^3 = -1) \rightarrow n(I^3 = -\frac{1}{2})$$

$$p^+(I^3 = \frac{1}{2}) \rightarrow p^+(I^3 = \frac{1}{2}) + \pi^0(I^3 = 0)$$

$$n(I^3 = -\frac{1}{2}) \rightarrow n(I^3 = -\frac{1}{2}) + \pi^0(I^3 = 0)$$

On donne une réaction analogue, pour l'interaction électromagnétique (transition hyperfine), avec échange de spin S^3 et comme particule médiatrice le photon γ.

$$e_R(S^3 = \frac{1}{2}) \rightarrow e_L(S^3 = -\frac{1}{2}) + \gamma(S^3 = 1)$$

Nota
Malgré l'analogie, soulignons à nouveau cette profonde différence. Pour l'interaction forte, c'est la charge forte ou I^3 qui est échangée entre le nucléon et la particule médiatrice pion. Pour l'interaction électromagnétique, c'est le spin S^3 (et non la charge électrique Q) qui est échangée entre l'électron et la particule médiatrice photon.

IV.4.3 Avant-goût du Modèle des quarks, nucléons et mésons décrits en tant que particules composites

Suivant les idées de H. Yukawa, on peut décrire l'interaction forte par l'échange de mésons pions entre les nucléons. On retrouve cette idée dans le Modèle des quarks développé dans les années 1960, avec un élargissement à d'autres mésons comme particules médiatrices de l'interaction forte. En plus des saveurs up u et down d correspondant respectivement à $I^3 = +\frac{1}{2}$ et $I^3 = -\frac{1}{2}$, le Modèle des quarks propose les saveurs strange s et charme c. Comme l'isospin I dans la théorie de Yang-Mills, les saveurs u, d, s, c sont identifiées à la charge forte.

Nota
Il existe également 2 saveurs de quarks supplémentaires, t, b, qui ont été proposées ultérieurement.

Dans le Modèle des quarks, les saveurs s et c supplémentaires permettent de décrire de nouveaux mésons et de nouveaux nucléons qu'on regroupe sous le terme de baryons. Les baryons et les mésons sont décrits en tant que particules composites formées de quarks u, d, s, c (qui deviennent alors les composants élémentaires du modèle).

Le Modèle des quarks distingue deux grands types de particules :
- les baryons formés de 3 quarks (ainsi que des antibaryons formés de 3 antiquarks) et dont les représentants les plus connus sont les nucléons proton et neutron. Ce sont les particules sujettes à l'interaction forte,
- les mésons, particules composées d'un nombre pair de quarks et d'antiquarks. Ce sont les particules médiatrices de l'interaction forte, porteuses d'une charge forte identifiée aux 4 saveurs.

Nota
D'autres particules ont été ultérieurement proposées, comme les pentaquarks formés de 5 quarks.

IV.4.4 Décomposition des mésons en quarks, nombres quantiques

Ci-joint une liste de quelques mésons, avec leur décomposition en quarks et leurs nombres quantiques (source Wikipédia, les Mésons pour les masses et les durées de vie).

	(S,S^3)	(I,I^3)	Ba	St	C	Masse Mev/c^2	Durée de vie $\boldsymbol{s}$
$\pi^+ u\bar{d}$	$(0,0)$	$(1,+1)$	0	0	0	139,6	$2{,}60 \times 10^{-8}$
$\pi^-\ \bar{u}d$	$(0,0)$	$(1,-1)$	0	0	0	139,6	$2{,}60 \times 10^{-8}$
$\pi^0(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$(0,0)$	$(1,0)$	0	0	0	139,6	$2{,}60 \times 10^{-8}$
$K^+ u\bar{s}$	$(0,0)$		0	1		493,7	$1{,}24 \times 10^{-8}$
$K^-\ \bar{u}s$	$(0,0)$		0	-1		493,7	$1{,}24 \times 10^{-8}$
$K^0 d\bar{s}$	$(0,0)$		0	1		497,7	
$D^+ c\bar{d}$	$(0,0)$		0	0	1	1 869,4	$10{,}6 \times 10^{-13}$
$D^-\ \bar{c}d$	$(0,0)$		0	0	-1	1 869,4	$10{,}6 \times 10^{-13}$
$D^0 c\bar{u}$	$(0,0)$		0	0	1	1 864,6	$4{,}2 \times 10^{-13}$
$D_s^{++} c\bar{s}$	$(0,0)$		0	1	1	1 969	$4{,}7 \times 10^{-13}$
$D_s^{--} s\bar{c}$	$(0,0)$		0	-1	-1	1 969	$4{,}7 \times 10^{-13}$

Nota 1
St est le nombre quantique d'étrangeté. C est le nombre quantique de charme.

Nota 2
Observons l'analogie entre les mésons pions π^+, π^-, π^0 pour l'isospin I^3, et les mésons kaons K^+, K^-, K^0 pour l'étrangeté St.

Nota 3
Les mésons sont des bosons et possèdent donc des spins entiers.

Nota 4
Un assemblage de 2 fermions de spin demi-entier est toujours un boson de spin entier. D'où l'idée récurrente proposée par de nombreux physiciens, qu'à l'instar des mésons formés de 2 particules élémentaires (en l'occurrence 1 quark et 1 antiquarks), tout boson puisse en fait être formé de 2 fermions.

IV.4.5 Les pions dans le Modèle des quarks

Si on assemble quarks u et d (ainsi que leurs antiquarks) suivant leur isospin I respectif (comme on l'a fait précédemment pour le proton et le neutron), on obtient 4 états qui correspondent aux 3 pions π^+, π^-, π^0. Le 4ème état possède un isospin I nul et ne correspond donc pas à une particule.

On différencie ainsi les trois pions π^+, π^-, π^0 :

$$\left|I = 1, I^3 = 1\right\rangle = \left|i = \frac{1}{2}, i^3 = \frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle = \left|u; -\bar{d}\right\rangle = |\pi^+\rangle$$

$$\left|I=1,I^3\ =0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|i=\frac{1}{2},i^3=\frac{1}{2};i'=\frac{1}{2},i^{3\prime}=-\frac{1}{2}\right\rangle+\left(\left|i=\frac{1}{2},i^3=-\frac{1}{2};i'=\frac{1}{2},i^{3\prime}=\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u;\bar{u}\rangle+\left|d;-\bar{d}\right\rangle\right)=|\pi^0\rangle$$

$$\left|I=1,I^3\ =-1\right\rangle=\left|i=\frac{1}{2},i^3=-\frac{1}{2};i'=\frac{1}{2},i^{3\prime}=-\frac{1}{2}\right\rangle=|d;\bar{u}\rangle=|\pi^-\rangle$$

$$\left|I=0,I^3\ =0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|i=\frac{1}{2},i^3=\frac{1}{2};i'=\frac{1}{2},i^{3\prime}=-\frac{1}{2}\right\rangle-\left(\left|i=\frac{1}{2},i^3=-\frac{1}{2};i'=\frac{1}{2},i^{3\prime}=\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u;\bar{u}\rangle+\left|d;\bar{d}\right\rangle\right)$$

Nota, analogie entre les pions π^+, π^-, π^0 et les bosons faibles W^+, W^-, $W^0 = Z^0$
Dans la théorie de l'interaction forte de Yukawa, les pions π^+, π^-, π^0 sont porteur d'une charge forte égale à l'isospin I. Les pions π^+, π^- sont ce qu'on appelle des opérateurs d'échelle. En réagissant avec les fermions, ils peuvent augmenter ou diminuer la charge forte d'un I^3 du fermion.

Dans le chapitre traitant du Modèle électrofaible, on verra qu'il est défini en analogie aux pions π^+, π^-, π^0, 3 bosons faibles W^+, W^-, $W^0 = Z^0$ porteurs d'une charge faible T et particules médiatrices de l'interaction faible. Les bosons faibles W^+, W^- sont également de type opérateur d'échelle. En réagissant avec les fermions, ils peuvent augmenter ou diminuer la charge faible d'un T^3 du fermion.

IV.4.6 Eléments sur les moments cinétiques des mésons, méson scalaire et méson pseudo-scalaire

On définit le moment cinétique total $\vec{J}$ d'un méson :

$$\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$$

avec $\vec{L}$ le moment cinétique orbital d'un quark par rapport à l'antiquark,
avec $\vec{S}$ la somme des spin du quark et de l'antiquark.

Soit l'opérateur de parité $\hat{P}$, l'opérateur qui transforme $\vec{x} \to -\vec{x}$.
Pour une particule, on définit un nombre quantique de parité P (ou parité intrinsèque), suivant la relation :

$$\hat{P}|s,m_s\rangle = P|s,m_s\rangle$$

avec $P = \pm 1$,
s entier ou demi-entier,
$-s \leq m_s \leq +s$ par saut d'une unité.

Pour les mésons, le nombre quantique de parité P renseigne sur le moment cinétique orbital $\vec{L}$ suivant la relation :

$$P=(-1)^{L+1}$$

Un méson dit pseudo-scalaire possède $S = 0$ et $J^P = 0^-$ (c'est-à-dire $P = -1$). C'est le cas par exemple des pions.
Un méson dit scalaire possède $S = 0$ et $J^P = 0^+$ (c'est-à-dire $P = +1$).

IV.4.7 Eléments sur l'interaction de Yukawa

L'interaction dite de Yukawa est développée dans les années 1950-1960 suivant un formalisme Lagrangien, afin de décrire l'interaction forte entre les nucléons (dits alors champs de Dirac ou champ spinoriel) et les particules médiatrices mésons, par exemple les pions (dits alors champs pseudo-scalaires).
Cette interaction n'est pas proposée par H. Yukawa, mais on lui attribue son nom, car elle est en partie inspirée de son idée de particule médiatrice massique des interactions nucléaires.

Nota sur le boson de Higgs
L'interaction de Yukawa est également utilisée dans le Modèle électrofaible, afin de coupler les quarks et les leptons (dit alors champs de Dirac) avec le boson de Higgs (dit alors champ scalaire), afin d'attribuer une masse aux quarks et leptons. On y reviendra dans le chapitre traitant du Modèle électrofaible.

On rappelle ici les principaux Lagrangiens utilisés dans l'interaction de Yukawa.

Pour un méson pseudo-scalaire représenté par la fonction d'onde φ (par exemple, une particule médiatrice de type pion, $S = 0$ et $J^P = 0^-$), on a le Lagrangien de l'interaction de Yukawa avec le méson qui interagit avec un fermion représenté par la fonction d'onde ψ :

$$L_{Yukawa}(\varphi, \psi) = -g\bar{\psi}i\gamma^5\varphi\psi$$

avec $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et g la charge élémentaire de l'interaction de Yukawa.

Pour un méson scalaire ($S = 0$ et $J^P = 0^+$), on a le Lagrangien de l'interaction de Yukawa :

$$L_{Yukawa}(\varphi, \psi) = -g\bar{\psi}\varphi\psi$$

Pour obtenir le Lagrangien total $L_{Total}(\varphi, \psi)$, il faut aussi tenir compte du Lagrangien de Dirac $L_{Fermion}(\psi)$ du fermion :

$$L_{Fermion}(\psi) = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu(D_\mu)\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

et du Lagrangien du méson $L_{meson}(\varphi)$:

$$L_{meson}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi)$$

$V(\varphi)$ est un terme de self-interaction. On le donne sous la forme : $V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$ avec μ la masse du méson. On le donne également sous une forme plus développée $V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4$, avec λ une constante qui permet d'éviter les divergences.

Nota
Pour mieux comprendre l'origine de $L_{meson}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi)$, il faut s'intéresser à la théorie du champ scalaire (et plus généralement à la théorie des Champs quantiques relativistes).
Généralement, on impose à un champ scalaire qu'il soit relativiste (c'est-à-dire invariant par rapport aux transformations de Lorentz), qu'il soit aussi simple que possible, qu'il ne contienne pas de dérivées par rapport au Temps d'ordre supérieur à un.

On obtient le Lagrangien total :

$$L_{Total}(\varphi, \psi) = L_{meson}(\varphi) + L_{Fermion}(\psi) + L_{Yukawa}(\varphi, \psi)$$

IV.5 Conclusion du chapitre

La théorie de H. Yukawa introduit la notion de particule médiatrice massique et explique la portée limitée des interactions nucléaires.
Elle propose un potentiel « écranté » fonction de la masse de la particule médiatrice. Lorsqu'on fait tendre cette masse vers 0, on retrouve la forme des potentiels de champs de portée infinie, comme le champ gravitationnel newtonien ou le champ électrostatique coulombien.
Dans les années 1950, la théorie de H. Yukawa a pour prolongement une théorie de l'interaction forte, avec les pions comme particule médiatrice, transportant une charge forte égale à l'isospin I.

Dans les prochains chapitres, on va s'intéresser à la description des interactions entre particules à partir des théories de Jauge. Cette description se développe particulièrement à partir des années 1950 suite aux travaux de Chen Ning Yang et de Robert Mills, elle forme le corpus théorique majeur du Modèle Standard. En préliminaire, on va faire quelques rappels mathématiques sur les groupes de rotations $SU(n)$.

Chapitre V Rappels mathématiques sur les groupes de rotations $SU(n)$, applications physiques aux transformations de Jauge

Objet du chapitre

Les théories de Jauge nécessitent un important bagage mathématique. On fera dans ce chapitre quelques rappels mathématiques sur les groupes de rotations $SU(n)$ permettant de décrire les transformations de Jauge. On s'intéressera également aux nombres quantiques (en particulier aux charges) intervenant dans les réactions entre particules et dans les transformations de Jauge.

V.1 Généralités sur les théories de Jauge et les nombres quantiques

V.1.1 Invariances et transformations de Jauge

Les expressions invariances et transformations de Jauge sont introduites en 1918 par H. Weyl. Celui-ci s'inspire des idées d'A. Einstein d'une invariance des lois de la Nature quelle que soit la transformation, en l'occurrence une transformation de Jauge à rapprocher d'un changement de référentiels.

Dans le premier mémoire de cet essai, on a souligné que les théories de Jauge s'appuient, comme la mécanique newtonienne, sur :

- des notions de quantités annulées et de quantités conservées lors d'une transformation de Jauge locale (ou lors d'un changement de référentiels),
- des termes « d'inertie » à ajouter dans l'équation d'onde ou dans le principe fondamental de la dynamique de Newton, afin de rendre ces 2 lois invariantes (termes « d'inertie » du type énergie impulsion potentielle ou du type force d'inertie).

Nota

Dans les théories de Jauge, on ajoute des termes du type énergie impulsion potentielle dans l'équation d'onde et du type énergie d'interaction dans le Lagrangien.

V.1.2 Rappels historiques, marche des idées

La théorie de Jauge formulée par H. Weyl dans les années 1920, décrit l'interaction électromagnétique, les transformations de Jauge appartiennent au groupe des rotations $U(1)_Q$, avec Q la charge électrique.

En 1954, pour expliquer l'interaction forte, Chen Ning Yang et Robert Mills introduisent une théorie de Jauge non abélienne où les transformations de Jauge appartiennent aux groupes de rotations $SU(2)_I$, avec l'isospin I présenté comme la charge forte.

A la fin des années 1950, début des années 1960, à travers le Modèle des quarks, M. Gell-Mann perfectionne la théorie de Yang-Mills et propose une théorie de l'interactions forte fondée sur le groupe $SU(3)_{Saveurs}$. La charge forte est fondée sur l'isospin I et un nouveau nombre quantique baptisé l'étrangeté St. Le tout est appelé saveurs.

Au début des années 1960. S. Glashow transcrit la théorie de Yang-Mills, de l'interaction forte à l'interaction faible, toujours fondée sur $SU(2)$. Par analogie avec l'isospin fort I vu comme la charge forte, S. Glashow introduit la notion d'isospin faible ou de charge faible T, avec $SU(2)_T$. A la fin des années 1960, la théorie est complétée par Steven Weinberg et Abdus Salam dans ce qu'on appelle le Modèle électrofaible.

En 1973, pour expliquer l'interaction forte, H. David Politzer, Frank Wilczek et David Gross introduisent la Chromodynamique quantique, une théorie fondée sur $SU(3)_{Couleurs}$, avec la notion de charge de couleur présentée comme la charge forte.

On regroupe ces différentes théories décrivant les interactions électromagnétique, forte et faible, fondées sur des groupes de rotations $SU(n)$, et essentiellement développées dans les années 1950-1970, dans ce qu'on appelle le Modèle standard.

C'est à ces groupes de rotations $SU(n)$, que nous nous intéresserons dans ce chapitre. Nous ferons d'abord quelques rappels mathématiques, puis nous verrons comment cela s'applique physiquement aux particules.

Rappel, différence entre transformation de Jauge globale et locale
On parle de transformation de Jauge globale sur une fonction d'onde ψ :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha q}\psi$$

avec α une constante et q une quantité quantique (par exemple une charge électrique).

On parle de transformation de Jauge locale sur une fonction d'onde ψ lorsque $\alpha(x)$ est fonction de variables locales x, positions et/ou instants :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)q}\psi$$

Les transformation de Jauge globale et locale sont toutes deux des rotations appartenant aux groupes $SU(n)$. Usuellement, on parle de transformations de Jauge version globale et de transformations de Jauge version locale.

V.1.3 2 types de nombres quantiques

En Physique des particules, on note l'existence de quantités quantifiées, auxquelles on associe des nombres quantiques. On peut distinguer 2 types de nombres quantiques.

Premier type : des nombres quantiques de type charge (notée ici Xdans un sens général) qui peuvent générer des champs d'interaction. Dans le Modèle standard, on en répertorie 4 : charge électrique Q, charge faible T, hypercharge faible Y_W, charge forte (ou de couleur) Co.

Dans ce chapitre, on va voir que ces nombres quantiques de type charge sont les générateurs des transformations de Jauge globale (rotations du groupe $SU(n)$), qu'ils sont conservés lors d'une transformation de Jauge globale. On peut les associer à des vitesses et obtenir des quadrivecteurs densité de charge courants qui sont également conservés par transformation de Jauge globale.
On a par exemple le courant électromagnétique j_Q^μ, le courant faible j_T^μ, le courant d'hypercharge faible $j_{Y_W}^\mu$, le courant fort j_{Co}^μ. On reviendra sur les 3 premiers courants lorsqu'on étudiera le Modèle électrofaible.

Sur le modèle des forces d'inertie qui s'ajoutent lors d'un changement de référentiels, afin de conserver l'invariance du principe fondamental de la dynamique de Newton, on ajoute dans le Lagrangien des termes énergie d'interaction composés de ces courants $j_Q^\mu, j_Q^\mu, j_{Y_W}^\mu$ et de quadrivecteurs potentiels, lors d'une transformation de Jauge locale, afin de conserver l'invariance des équations d'onde.

Deuxième type : des nombres quantiques qui interviennent dans des réactions entre particules et qui fréquemment s'inversent ou se modifient. On trouve par exemple, le spin S, l'isospin I, le nombre baryonique Ba, l'étrangeté St, etc. Ces nombres quantiques ne génèrent pas à priori de champs d'interaction. Par exemple, si une charge électrique Q génère un champ électrique, on ne trouve pas de champ de spin ou de champ baryonique.

Pour une particule et sa fonction d'onde associée, on peut lors d'une réaction entre particules, modifier ces nombres quantiques. La particule se transforme alors en sa particule conjointe. Par exemple pour l'isospin I, la réaction permet de passer d'un neutron à un proton. Pour le spin S, la réaction dite de transition hyperfine permet de passer d'un électron droit à un électron gauche.

Généralement, lors des réactions entre particules, la quantité quantique conserve une même valeur totale (au début et à la fin de la réaction). Pour le spin, on a en fait une conservation globale du moment cinétique total.

Nota
L'isospin I est ici classé dans le 2ème type et rapproché du spin S. Suivant les idées originales de W. Heisenberg et la théorie de Jauge de Yangs-Mills, l'isospin I est présenté comme la charge forte de l'interaction forte. Il est donc classé dans le 1er type. Il en est de même pour l'étrangeté St, qui dans le Modèle des quarks, est présentée avec les autres saveurs associées à I, comme la charge forte de l'interaction forte. On proposera une explication à cela dans le prochain mémoire. On suggérera que la charge forte (notée ici Co) est une notion à distinguer de I ou de St, mais qui est toutefois fonction de ces nombres quantiques I et St.

V.2 Rappels mathématiques sur les groupes de rotations $SU(n)$

V.2.1 Eléments de mathématiques sur les groupes de rotations

Le Modèle standard est basé sur des transformations de Jauge appartenant aux groupes de rotations de vecteurs de dimension *n* dans des espaces complexes. Ces groupes de rotations sont appelés $SU(n)$, S comme spécial pour dire que le déterminent de la matrice décrivant la rotation est égal à 1, U comme unitaire et *n* la dimension du vecteur concerné par la rotation.

On classe ces groupes $SU(n)$ dans les groupes de Lie du nom de S. Lie, un mathématicien norvégien à l'origine de ces notations mathématiques et qui publia ses articles dans les années 1870. Ces groupes sont en général non commutatifs.

Les matrices unitaires vérifient la condition :

$$U^*U = UU^* = I_n$$

La matrice adjointe de U est notée U^* (ou $U^\dagger$ en physique, et plus particulièrement en physique quantique).

Nota
Une matrice adjointe d'une matrice M à coefficients complexes est la matrice transposée de la matrice conjuguée de M. On a par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1+i & 13 \\ 3-2i & i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i \\ 13 & -i \end{pmatrix}$$

Le groupe $SO(n)$ est le groupe de rotations de vecteurs de dimension n dans des espaces réels. S comme spécial pour dire que le déterminent de la matrice est égale à 1. O comme orthogonale et qui vérifie la condition ${}^tAA = I_n$ avec ${}^tA$ la matrice transposée.

Dans les paragraphes suivants, on donne quelques exemples de groupes de rotations.

V.2.2 Les rotations du groupe $U(1)$

Un vecteur V complexe de dimension 1 se transforme en un vecteur V' par une rotation d'angle θ :

$$V' = e^{i\theta}V$$

La matrice de rotation est $(e^{i\theta})$.

V.2.3 Les rotations du groupe $SO(2)$

Un vecteur V réel de de dimension 2 se transforme en V' par la matrice de rotation :

$$\begin{pmatrix} V^{x'} \\ V^{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{x} \\ V^{y} \end{pmatrix}$$

Il existe une correspondance entre les rotations $U(1)$ et $SO(2)$ (on parle d'isomorphisme).
On pose :

$$V^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V^x \pm iV^y)$$

On peut réécrire une rotation de $SO(2)$:

$$\begin{pmatrix} V^{+'} \\ V^{-'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{+} \\ V^{-} \end{pmatrix}$$

$$V^{+'} = e^{i\theta}V^+$$

$$V^{-'} = e^{-i\theta}V^-$$

On a une forme générale qui fait partie de $U(1)$, avec α qui est un réel :

$$W' = e^{-i\alpha\theta}W$$

V.2.4 Les rotations du groupe $SO(3)$

Un vecteur V réel de dimension 3 se transforme en un vecteur V' par les matrices de rotations suivantes correspondant à des rotations autour des axes x, y et z :

$$R^x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R^y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R^z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^x(\theta)$ est une rotation d'angle θ dans un plan spatial y, z autour de l'axe des x. $R^y(\theta)$ dans un plan spatial x, z autour de l'axe des y. $R^z(\theta)$ dans un plan spatial x, y autour de l'axe des z.
On oriente toutes les rotations suivant la règle de la main droite.

Nota
Il existe également une correspondance entre les rotations de $SO(3)$ et celles de $SU(2)$ (on parle aussi d'isomorphisme).

V.3 Rappels mathématiques sur les générateurs de groupes $SU(n)$

V.3.1 Généralités

Les générateurs d'un groupe permettent de générer par des combinaisons linéaires tous les éléments d'un groupe. Le nombre de générateurs d'un groupe $SU(n)$ est $n^2 - 1$.

Toute matrice U de rotation d'un groupe $SU(n)$ peut s'écrire comme la combinaison linéaire (au niveau de l'exponentiel) de $n^2 - 1$ générateurs. On a :

$$U = e^{iH} = e^{i\alpha^a T^a} = e^{i(\alpha^1 T^1 + \alpha^2 T^2 + \alpha^3 T^3 + \dots)}$$

avec :
$a = 1,2,3,\dots,n^2 - 1$,
α^a paramètres réels,
T^a matrice n^2 à coefficients complexes appelées générateurs du groupe $SU(n)$.

Nota
On a ici des exponentiels de matrice.

V.3.2 Générateurs du groupe $SU(2)$

Le groupe $SU(2)$ possède 3 générateurs, par exemple les moitiés des 3 matrices de Pauli :

$$\frac{\sigma^1}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sigma^2}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sigma^3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota
On rappelle que les matrices de Pauli, ont été introduites par W. Pauli pour prendre en compte les effets d'un champ magnétique sur un électron. L'électron est modélisé comme un petit aimant doté d'un moment cinétique de spin et d'un moment magnétique de spin. La prise en compte de cette notion de spin dans l'équation d'onde de Schrödinger, donne l'équation d'onde de Pauli.
Dans l'équation d'onde relativiste de Dirac, la notion de spin est directement incorporée.

Une matrice U de $SU(2)$ peut se définir comme une combinaison linéaire de ces 3 générateurs :

$$U(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = e^{\frac{i}{2}(\alpha^1\sigma^1 + \alpha^2\sigma^2 + \alpha^3\sigma^3)}$$

Soit X un doublet qui se transforme en X' par une rotation $U(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ de $SU(2)$.
On a donc :

$$X \to X' = U(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)X$$

$$X \to X' = e^{\frac{i}{2}(\alpha^1\sigma^1 + \alpha^2\sigma^2 + \alpha^3\sigma^3)}X$$

Pour une rotation $R^x(\theta)$ d'angle θ autour de l'axe des x, on démontre qu'on peut la définir à partir du générateur σ^1 :

$$R^x(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^1}$$

$$X \to X' = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^1}X$$

Autour de l'axe des y, on a de même à partir du générateur σ^2 :

$$R^y(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^2}$$

$$X \rightarrow X' = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^2} X$$

Autour de l'axe des z, on a de même à partir du générateur σ^3 :

$$R^z(\theta) = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

$$X \rightarrow X' = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^3} X$$

Par exemple, si $\theta = 2\pi$, on a :

$$e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

V.3.3 Générateurs du groupe $SU(3)$

Dans le Modèle des quarks et dans la Chromodynamique quantique (tous deux décrivant l'interaction forte et inclus dans le Modèle standard), on a des triplets de particules de dimension 3. Les transformations de Jauge sur ces triplets de particules appartiennent au groupe $SU(3)$.

Nota, passage des saveurs aux couleurs
Un peu étrangement, au cours des années 1960, on est passé :

- d'un triplé fondé sur les saveurs up, down et strange proposé par M. Gell-Mann dans le Modèle des quarks (avec une charge forte fondée sur les saveurs),
- à un triplé fondé sur les couleurs rouge, vert et bleu dans la Chromodynamique quantique (avec une charge forte fondée sur les couleurs).

Le groupe $SU(3)$ possède $3^2 - 1 = 8$ générateurs, par exemple les moitiés des 8 matrices de Gell-Mann, $\lambda^1 \ldots \lambda^8$, formées à partir des matrices de Pauli :

$$\frac{\lambda^1}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\lambda^2}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\lambda^3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\lambda^4}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\lambda^5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\lambda^6}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\lambda^7}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \frac{\lambda^8}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Toute transformation d'un triplet de particules peut s'écrire comme une combinaison linéaire des moitiés des 8 matrices de Gell-Mann.

Une matrice U de $SU(3)$ peut se définir comme une combinaison linéaire de ces 8 générateurs :

$$U(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^8) = e^{i\frac{1}{2}(\alpha^1\lambda^1 + \alpha^2\lambda^2 + \ldots + \alpha^8\lambda^8)}$$

Soit X un triplet de particules qui se transforme en X' par une rotation $U(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^8)$ de $SU(3)$.
On a donc :

$$X \rightarrow X' = U(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^8) X$$

$$X \rightarrow X' = e^{\frac{i}{2}(\alpha^1\lambda^1+\alpha^2\lambda^2+\ldots+\alpha^8\lambda^8)}X$$

V.3.4 Eléments sur la constante de structure des groupes de Lie

En théorie des groupes, on définit le commutateur d'un couple x, y :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

x et y commutent si et seulement si $[x, y] = 1$.

Pour trois générateurs d'un groupe de Lie, on a la relation :

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k$$

Cette relation définit l'algèbre du groupe de Lie. Les quantités f_{ijk} appelées constantes de structure, sont des paramètres constants qui caractérisent chaque groupe.

Pour $SU(2)$, groupe non commutatif, la relation de commutation s'écrit :

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$$

où la constante de structure f_{ijk}est égale au tenseur ε_{ijk} de Levi-Civita.

$\varepsilon_{ijk} = +1$ si (ijk) est une permutation paire de (123),
$\varepsilon_{ijk} = -1$ si (ijk) est une permutation impaire de (123),
$\varepsilon_{ijk} = 0$ autrement.

V.4 Application physique, charge définie en tant que générateur de groupe $SU(n)$, multiplets de particules et de fonctions d'onde

V.4.1 Généralités

Dans le Modèle standard, une charge X^a $(a = 1,2,3,\ldots,n^2 - 1)$ est définie comme le générateur d'un groupe $SU(n)$.

On regroupe les particules par multiplet de particules. Le nombre n de $SU(n)$ indique le nombre de particules du multiplet. Il indique aussi le nombre d'états possibles et le nombre de fonctions d'onde associés au multiplet de particules.

Nota
On retient toujours l'idée fondamentale de L. de Broglie d'associer une particule à une onde (ou fonction d'onde ψ).

V.4.2 Charge électrique Q, générateur du groupe $U(1)_Q$

Dans l'interaction électromagnétique, la charge électrique Q est le générateur du groupe $U(1)_Q$.

On a $n = 1$ et donc un multiplet formé d'une seule particule. Une particule dotée d'une charge électrique Q n'a qu'un état possible. Si on raisonne en terme de fonction d'onde ψ et de probabilité, il n'existe qu'une fonction d'onde ψ correspondant à l'amplitude de probabilité d'observer la particule chargée électrique.

V.4.3 Charge forte : isospin I, générateur du groupe $U(2)_I$

Dans la théorie de Yang-Mills décrivant l'interaction forte, la charge forte I est le générateur du groupe $U(2)_I$.

On a $n = 2$ et donc un multiplet formé de 2 particules, par exemple 2 quarks u et d de charges fortes $I^3 = +\frac{1}{2}$ et $I^3 = -\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire de saveurs up et down).
On définit deux fonctions d'onde associées à la charge forte I : ψ_u et ψ_d correspondant à l'amplitude de probabilité d'observer le doublet de particules. On a le doublet de fonctions d'onde : $\psi = \begin{pmatrix}\psi_u \\ \psi_d\end{pmatrix}$.

V.4.4 Charge forte de saveurs, générateur du groupe $U(3)_{saveurs}$

Dans le Modèle initiale des quarks décrivant l'interaction forte, la charge forte est le générateur du groupe $U(3)_{saveurs}$. Par rapport à la théorie de Yang-Mills, on a une saveur de plus qui est strange ou s.

On a $n = 3$ et donc un multiplet formé de 3 particules, par exemple 3 quarks u, d et s de charges fortes de saveurs up, down et strange.
On définit trois fonctions d'ondes correspondant chacune aux amplitudes de probabilité d'observer le triplet de particules. On a le triplet de fonction d'onde : $\psi = \begin{pmatrix}\psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s\end{pmatrix}$.

Nota
Si on ajoute une saveur charme ou c, on a un groupe $U(4)_{saveu}$ et un quadruplet de fonction d'onde : $\psi = \begin{pmatrix}\psi_u \\ \psi_d \\ \psi_c \\ \psi_s\end{pmatrix}$.

V.4.5 Charge faible T, générateur du groupe $U(2)_T$

Dans le Modèle électrofaible décrivant l'interaction faible, la charge faible T est le générateur du groupe $U(2)_T$.

On a $n = 2$ et donc un multiplet formé de 2 particules, par exemple 2 quarks, l'un de charge faible $T^3 = +\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire les quarks de saveurs u, c, t), l'autre de charge faible $T^3 = -\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire les quarks de saveurs d, s, b).
On définit deux fonctions d'onde associées à la charge faible T : $\psi_{u,c,t}$ et $\psi_{d,s,b}$, correspondant à l'amplitude de probabilité d'observer le doublet de particules de charges faibles $T^3 = +\frac{1}{2}$ et $T^3 = -\frac{1}{2}$.
On a le doublet de fonctions d'onde : $\psi = \begin{pmatrix}\psi_{u,c,t} \\ \psi_{d,s,b}\end{pmatrix}$.

Nota 1
Si on s'arrête à la 1ère génération de quarks, c'est-à-dire aux 2 premières saveurs u et d. On a le doublet de fonctions d'onde : $\psi = \begin{pmatrix}\psi_u \\ \psi_d\end{pmatrix}$.

Nota 2
Dans le Modèle électrofaible, cela s'applique seulement aux quarks gauchers (et aux antiquarks droitiers), qui ont une charge faible T non nulle. Les quarks droitiers (et antiquarks gauchers) ont une charge faible T nulle et ne sont donc pas sujets à l'interaction faible. On y reviendra dans un prochain chapitre.

V.4.6 Charge forte de couleurs, générateur du groupe $U(3)_{couleurs}$

Dans la Chromodynamique quantique décrivant l'interaction forte, la charge forte est le générateur du groupe $U(3)_{couleurs}$.

On a $n = 3$ et donc un multiplet formé de 3 quarks, par exemple 3 quarks de charges fortes de couleur R, G, B (rouge, green, bleu).
On définit trois fonctions d'ondes correspondant chacune aux amplitudes de probabilité d'observer le triplet de particules de couleurs R, G, B. On a le triplet de fonction d'onde : $\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix}$.

Nota
Le groupe $SU(3)_{saveurs}$ a été développé par M. Gell-Mann préalablement à $SU(3)_{couleurs}$. Pour cette raison, on retrouve son nom dans les matrices de Gell-Mann utilisées en Chromodynamique quantique.

Que la charge forte soit générateur de $SU(3)_{saveurs}$ ou de $SU(3)_{couleurs}$, le modèle mathématique est le même quant aux groupes.

V.5 Application physique, transformations de Jauge globale et conservation des charges

V.5.1 Généralités

Les rotations de groupe $SU(n)$ permettent de définir des transformations de Jauge globale sur les multiplets de fonctions d'onde associées aux multiplets de particules. On a par exemple la transformation de Jauge globale sur un multiplet de fonctions d'onde $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ définie à partir de la matrice U du groupe $SU(n)$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

V.5.2 Cas de $U(1)_Q$, charge électrique Q

Si U appartient à $U(1)_Q$, alors ψ est un singulet de fonctions d'onde et on a :

$$U = e^{i\alpha Q}$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha Q}\psi$$

On à la transformation de Jauge globale approximée par la transformation infinitésimale :

$$\psi \rightarrow \psi' = (1 + i\alpha Q)\psi$$

Si $\psi \rightarrow \psi' = (1 + i\alpha Q)\psi$ est une symétrie du système, alors la charge électrique Q est conservée par la transformation de Jauge globale.

Explication
Suivant le théorème de Noether, à toute transformation qui laisse invariantes les équations du mouvement ou autrement dit, qui commute avec l'hamiltonien H du système (énergie du système), on peut associer une quantité conservée.

Si la transformation infinitésimale $\psi \to \psi' = (1 + i\alpha Q)\psi$ laisse invariant le mouvement, on a donc la commutation avec l'hamiltonien :

$$[H, (1 + i\alpha Q)] = 0$$

On obtient :

$$[H, Q] = 0$$

La charge électrique Q est ici la quantité conservée par la transformation infinitésimale.

Exemple de transformation de Jauge globale
Pour passer de l'électron de charge électrique -1 à l'antiélectron de charge électrique $+1$, on effectue une rotation de $\pi = \alpha Q$ dans l'espace des charges électriques :

$$\bar{e}^+(+1) = e^{i\pi} e^-(-1)$$

$e^{i\pi}$ appartient au groupe $U(1)_Q$.

V.5.3 Cas de $SU(2)_T$, charge faible T (isospin faible)

Si U appartient à $SU(2)_T$, alors $\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$ est un doublet de fonctions d'onde et on a :

$$U = e^{\frac{i}{2}(\alpha^1\sigma^1 + \alpha^2\sigma^2 + \alpha^3\sigma^3)}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi_u{}' \\ \psi_d{}' \end{pmatrix} = e^{\frac{i}{2}(\alpha^1\sigma^1 + \alpha^2\sigma^2 + \alpha^3\sigma^3)} \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

Nota
On étudie ici uniquement la première génération de quarks.

Les charges faibles $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ $(a = 1,2,3)$ sont considérées comme les générateurs de $SU(2)_T$. On a donc 3 charges faibles.

Si U est une symétrie du système alors les matrices $\frac{\sigma^a}{2}$ sont conservées, c'est-à-dire que les charges faibles $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ sont conservées.

Exemple de transformations de Jauge globale
Soit le doublet de particules du noyau (hadrons) de charges faibles opposées, un quark u_L et un quark d_L (les particules sont toutes deux gauchères, car seules les particules gauchères sont soumises à l'interaction faible) :

$$X = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^3 = \frac{1}{2} \\ T^3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De même, soit le doublet de particules autour du noyau (leptons) de charges faibles opposées, un électron gaucher e_L^- et un neutrino gaucher ν_L :

$$Y = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^3 = \frac{1}{2} \\ T^3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dans l'espace des charges faibles T, pour passer du doublet de quarks $X = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ au doublet $X' = \begin{pmatrix} u_L{}' \\ d_L{}' \end{pmatrix}$, on effectue une rotation $R^z(\theta) = e^{\frac{i}{2}\alpha^3\sigma^3}$ de $SU(2)_T$ d'angle $\alpha^3 = 2\pi$ avec $\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

On a :

$$X' = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} X = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X' = \begin{pmatrix} u_L{}' \\ d_L{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_L \\ u_L \end{pmatrix}$$

On a un traitement identique avec le doublet Y de leptons :

$$Y' = \begin{pmatrix} \nu_L{}' \\ e_L^-{}' \end{pmatrix} = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix}$$

Nota 1
Une rotation autour de l'axe des z avec $\alpha^3 = 2\pi$, inverse la charge faible T. Une rotation autour de l'axe des z avec $\alpha^3 = 4\pi$, laisse invariante la charge faible T. On a le même constat pour le spin et l'isospin I qui partagent avec la charge faible un même formalisme mathématique. On y reviendra à la fin de ce chapitre.

Nota 2
Ce qu'on vient d'expliquer dans le précédent exemple sur les quarks gauchers, les leptons gauchers et la charge faible T, s'applique aussi aux quarks (à la fois les gauchers et les droitiers) et à l'isospin I, lorsque ce dernier est considéré comme une charge forte (c'est le cas dans la théorie de Yang-Mills que nous étudierons dans un prochain chapitre). La charge forte est alors conservée par transformation de Jauge du groupe $SU(2)_I$.
Cela ne s'applique pas aux leptons qui ne sont pas sujets à l'interaction forte.

V.5.4 Cas de $SU(3)_{Couleurs}$, charge forte de couleurs

Si U appartient à $SU(3)_{Couleurs}$, alors $\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_V \\ \psi_B \end{pmatrix}$ est un triplet de fonctions d'onde et on a :

$$U(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^8) = e^{i\frac{1}{2}(\alpha^1\lambda^1 + \alpha^2\lambda^2 + \dots + \alpha^8\lambda^8)}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_V \\ \psi_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_R{}' \\ \psi_V{}' \\ \psi_B{}' \end{pmatrix} = e^{i\frac{1}{2}(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \dots + \alpha_8\lambda_8)} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_V \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

Si U est une symétrie du système alors les matrices $\frac{\lambda^a}{2}$ sont conservées, c'est-à-dire que les charges fortes de couleur sont conservées par transformation de Jauge globale.

Nota sur la charge forte de saveurs
Cela s'applique aussi à $SU(3)_{saveurs}$, puisqu'on a un même formalisme mathématique quant aux groupes $SU(3)$. Les charges fortes de saveur sont également conservées par transformation de Jauge globale.

V.6 Application physique, quadrivecteur charge courants conservé lors d'une transformation de Jauge globale, théorème de Noether

V.6.1 Courants électromagnétiques

Dans le mémoire 2, on a évoqué qu'en utilisant le théorème de Noether, on obtient la conservation d'un quadrivecteur charge courants électromagnétiques lors d'une transformation de Jauge globale. On rappelle cela succinctement.

On a la transformation de Jauge globale appartenant au groupe $U(1)_Q$:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha Q}\psi(x)$$

α peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

On a le Lagrangien d'un électron libre décrit par la fonction d'onde ψ :

$$L = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi$$

Ce Lagrangien est invariant par la transformation de Jauge globale $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha Q}\psi(x)$.
Suivant le théorème de Noether, il existe une quantité conservée lors de le la transformation de Jauge globale.

La densité de charge électrique est la quantité conservée avec $\mu = t$:

$$j_Q^t = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(\alpha)} \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}$$

La densité de courants électriques est la quantité conservée avec $\mu = x, y, z$:

$$j_Q^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\vec{\nabla}\psi(\alpha))} \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}$$

En développant ces deux équations, on obtient comme quantité conservée le quadrivecteur densité de charge courants électromagnétiques :

$$j_Q^\mu = -eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

avec $\mu = t, x, y, z$

avec e la charge électrique élémentaire et Q le nombre de charges électriques élémentaires.

On a également la conservation charge courants électromagnétiques :

$$\partial_\mu j_Q^\mu = 0$$

avec $\mu = t, x, y, z$

V.6.2 Courants portant une charge X^a

Ce qu'on vient d'énoncer sur les courants électromagnétiques et le groupe $U(1)_Q$, peut se généraliser aux groupes $SU(n)_X$, avec X^a les charges générateurs du groupe $SU(n)$. On a alors $n^2 - 1$ courants $j^\mu_{X^a}$ transportant une charge X^a qui vérifient la conservation charge courants :

$$\partial_\mu j^\mu_{X^a} = 0$$

$$\text{avec } a = 1, \dots, n^2 - 1 \text{ et } \mu = t, x, y, z$$

Par exemple, dans les cas de l'interaction forte du groupe $SU(2)_I$ et de l'interaction faible du groupe $SU(2)_T$, on parle respectivement de courants forts $j^\mu_{I^a}$ et de courants faibles $j^\mu_{T^a}$. On a 3 courants forts : $j^\mu_{I^1}, j^\mu_{I^2}, j^\mu_{I^3}$ et 3 courants faibles : $j^\mu_{T^1}, j^\mu_{T^2}, j^\mu_{T^3}$.

On reviendra sur ce type de courants faibles dans le chapitre traitant du Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam.

V.7 Application physique, transformations de spin *S* et d'isospin *I* fondées sur $SU(2)$

Dans les précédents paragraphes, on a essentiellement évoqué les nombres quantiques de type charge, générateur des rotations de $SU(n)$.
Notons que pour les nombres quantiques de l'autre type, comme le spin S et l'isospin *I*, on a également des transformations de $SU(2)$. Ces transformations peuvent inverser ces nombres quantiques et décrivent certaines modifications observées lors d'une transition hyperfine ou d'une désintégration béta. On va voir que le traitement mathématique est identique pour le spin et l'isospin.

V.7.1 Transition hyperfine, inversion du spin S^3

Soit un doublet d'électrons de spins opposés, de même impulsion et d'hélicités opposées $X = \begin{pmatrix} e^-_R \\ e^-_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^3 = \frac{1}{2} \\ S^3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (un électron droit et un électron gauche).

On peut symboliser une transition hyperfine qui inverse les états de spin des deux électrons par une rotation $R^z(\alpha = 2\pi)$ autour de l'axe des z :

$$X' = \begin{pmatrix} e^{-\prime}_R \\ e^{-\prime}_L \end{pmatrix} = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} X = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a :

$$e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X' = \begin{pmatrix} e^{-\prime}_R \\ e^{-\prime}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^-_L \\ e^-_R \end{pmatrix}$$

Le doublet d'électrons X' a les spins inversés par rapport au doublet d'électrons X.

Plus généralement, toute transformation d'un doublet de spins peut s'écrire comme une combinaison linéaire des 3 matrices de Pauli. On verra dans l'exemple suivant qu'il en est de même pour les doublets d'isospins.

V.7.2 Désintégration béta, inversion de l'isospin I^3

Soit le doublet de particules du noyau (hadrons) d'isospins opposés, un quark u et un quark d :

$$X = \binom{u}{d} = \begin{pmatrix} I^3 = \frac{1}{2} \\ I^3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On peut symboliser une désintégration béta qui inverse les états d'isospin d'un quark u et d'un quark d par une rotation $R^z(\alpha = 2\pi)$ autour de l'axe des z.

Nota
Au lieu d'avoir un doublet $\binom{u}{d}$, on peut aussi raisonner sur un doublet proton neutron :

$$X = \binom{p}{n} = \begin{pmatrix} I^3 = \frac{1}{2} \\ I^3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dans l'espace des isospins, pour passer du doublet de quarks $X = \binom{u}{d}$ au doublet $X' = \binom{u'}{d'}$, on effectue une rotation $R^z(\alpha) = e^{\frac{i}{2}\alpha\sigma^3}$de $SU(2)$ d'angle $\alpha = 2\pi$ avec $\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A l'instar du spin, on a :

$$X' = \binom{u'}{d'} = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} X = e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{i}{2}2\pi\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X' = \binom{u'}{d'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \binom{d}{u}$$

Nota, avant-goût sur l'interaction hyper et le boson B
Dans le cas de la transition hyperfine, le nombre de spin S^3 est conservé via le photon γ rayonné qui transporte la différence de spins entre les électrons droitier et gaucher.
Dans le cas de la désintégration béta, on proposera dans le prochain mémoire que le nombre d'isospin I^3 est conservé via le boson B rayonné qui transporte la différence d'isospins entre le neutron et le proton.

A l'instar du photon γ (transportant des spins S^3) qui est la particule médiatrice de l'interaction électromagnétique de charge électrique Q, on proposera que le boson B (transportant des isospins I^3) soit la particule médiatrice de l'interaction hyper d'hypercharge faible Y_W.

V.8 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a fait d'abord quelques rappels mathématiques sur les groupes de rotations $SU(n)_X$ utilisés par le Modèle standard. On a ensuite évoqué en tant qu'applications physiques, les charges X^a définies dans le Modèle standard, et générateurs de ces groupes de rotations $SU(n)_X$.
Ces charges X^a sont conservées par transformation de Jauge globale. Elles sont chacune associées à un courant $j^{\mu}_{X^a}$ qui selon le théorème de Noether, est lui-aussi conservé par transformation de Jauge globale.

Après ces rappels mathématiques et ces applications physiques, on va revenir plus en détail sur la 1ère théorie de Jauge utilisant une charge X^a à plus d'une dimension : la théorie de Jauge de Yang-Mills décrivant l'interaction forte et ayant comme charge forte l'isospin.

Chapitre VI Théorie de Jauge locale de Yang-Mills sur l'interaction forte (1954)

Objet du chapitre
On rappelle dans ses grandes lignes la théorie de Jauge locale de Yang-Mills qui décrit l'interaction forte. Dans le 1[er] mémoire, on a comparé les transformations de Jauge de Weyl à des annulations (ou des modifications) de vecteurs rotations dans deux dimensions d'un espace réel (ou une dimension d'un espace complexe).
On peut voir la théorie de Jauge locale de Yang-Mills comme la généralisation de une à deux dimensions complexes de la théorie de Jauge de Weyl. Ainsi, les transformations de Jauge locale de Yang-Mills peuvent être comparées à des annulations (ou des modifications) de vecteurs rotations dans deux dimensions d'un espace complexe.

VI.1 Préambule

En 1954, s'inspirant des idées d'A. Einstein et de H. Weyl, Chen Ning Yang et Robert Mills publient une théorie de Jauge locale décrivant l'interaction forte.

La théorie de Jauge locale de Yang-Mills est basée sur le même principe que la théorie de Jauge locale de H. Weyl décrivant l'électromagnétisme. L'objectif est d'obtenir l'invariance de grandes lois de la Nature, en l'occurrence :

- l'équation d'onde relativiste de Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ avec $\mu = t, x, y, z$,
- le Lagrangien $L = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu)\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$ qui permet de retrouver via l'équation d'Euler-Lagrange cette équation d'onde relativiste.

La théorie de Yang-Mills se distingue essentiellement de celle de Weyl par le nombre de dimensions utilisée, avec 1 dimension complexe chez Weyl et 2 dimensions complexes chez Yang-Mills. Par exemple, chez Weyl, la charge électrique Q possède 1 composante, chez Yang-Mills, la charge forte identifiée à l'isospin I^a $(a = 1,2,3)$ possède 2 composantes. Chez Weyl, la fonction d'onde est un singulet, chez Yang-Mills la fonction d'onde est un doublet. Chez Weyl, les transformations de Jauge locale sur la fonction d'onde appartiennent aux rotations de groupe $U(1)_Q$, chez Yang-Mills, les transformations de Jauge locale sur la fonction d'onde appartiennent aux rotations de groupe $SU(2)_I$.

Le passage de 1 à 2 dimensions a des conséquences importantes, car alors que $U(1)$ est un groupe commutatif, $SU(2)$ ne l'est pas. Cela introduit dans la transformée de Jauge du quadrivecteur potentiel et dans le Lagrangien de Yang-Mills des termes supplémentaires. On verra cela dans les paragraphes suivants.

Comme la théorie de Yukawa sur les interactions nucléaires, la théorie de Yang-Mills utilise des particules médiatrices appelées mésons pions, et qui sont représentées par des quadrivecteurs potentiels (appelés également champs de Jauge).
Le principal handicap de Yang-Mills, c'est que contrairement au mésotron de Yukawa, les particules médiatrices doivent être sans masse pour obtenir l'invariance des lois de la Nature (en particulier l'invariance du Lagrangien par transformation de Jauge locale). Ainsi, la très courte portée des interactions nucléaires n'est pas expliquée chez Yang-Mills.

La théorie de Yang-Mills possède une grande importance historique. Dans les 2 décennies qui suivent sa publication, ses idées sont abondamment reprises dans le Modèle standard, qui s'en inspire aussi bien pour décrire l'interaction forte que l'interaction faible.

A la fin du prochain chapitre, on verra succinctement comment dans le Modèle standard, une masse est attribuée aux particules médiatrices via le mécanisme BEH (ou de Higgs), et comment la faible portée des interactions nucléaires est ainsi expliquée.

Dans les prochains paragraphes, nous allons rappeler les principales caractéristiques d'une théorie de Jauge locale de Yang-Mills, prérequis indispensable pour mieux comprendre le Modèle Standard.

VI.2 Transformation de jauge locale, analogie interaction électromagnétique et interaction nucléaire forte

VI.2.1 Transformation de Jauge locale dans le cas de l'interaction électromagnétique

Dans le cas de l'interaction électromagnétique, on a la transformation de Jauge locale de la fonction d'onde :

$$\psi \rightarrow \psi' = exp(\, ieQ\alpha(x))\psi$$

avec $\alpha(x)$ fonction de variable locale x (positions et/ou instants).

La transformation de Jauge locale appartient au groupe des rotations :

$$exp(\, ieQ\alpha(x)) \in U(1)_Q$$

Q est le nombre de charges électriques élémentaires. C'est un nombre entier puisque la charge électrique est quantifiée en multiple de charges électriques élémentaires e. On peut considérer Q comme une matrice 1×1.

On a la transformée de Jauge locale du quadrivecteur potentiel électromagnétique :

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu\prime} = A^{\mu} + \partial_{\mu}\alpha(x)$$

avec $\mu = t, x, y, z$

Dans la théorie de Jauge locale de l'électromagnétisme, le quadrivecteur potentiel électromagnétique est associé à un photon γ, particule médiatrice de l'interaction électromagnétique.

VI.2.2 Dérivée covariante de l'interaction électromagnétique

Dans le 1[er] mémoire, on a vu que pour obtenir l'invariance de l'équation d'onde relativiste de Dirac, il faut définir une dérivée covariante :

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqQA^{\mu}$$

avec $\mu = t, x, y, z$ et q la charge élémentaire.

On a l'équation d'onde relativiste de Dirac dans le référentiel R^A où l'on a effectué la transformation de Jauge locale :

$$(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

Nota

Dans le cas d'un électron, $q = -e$, on a alors :

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieQA^{\mu}$$

$$(i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieQA^{\mu}) - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

VI.2.3 Transformation de Jauge locale de la fonction d'onde dans le cas de l'interaction forte

Dans le cas de l'interaction forte, suivant la théorie de Yang-Mills, on a la transformation de Jauge locale d'un doublet de fonctions d'onde :

$$\psi \to \psi' = exp(\, ig_I I^a \cdot \alpha^a(x))\psi$$

$$(a = 1{,}2{,}3)$$

avec $\alpha^a(x)$ fonction de la variable locale x (instant, positions).

ψ et ψ' sont ici des doublets de fonctions d'onde.
g_I est la charge forte élémentaire en analogie avec la charge électrique élémentaire e.
I^a est le nombre de charges fortes élémentaires (ou plus simplement la charge forte). Chez Yang-Mills, la charge forte est identifiée à l'isospin.
I^a $(a = 1{,}2{,}3)$ sont les 3 composantes de l'isospin. Ce sont des matrices 2×2 fréquemment définies à partir des matrices de Pauli : $I^a = \frac{\sigma^a}{2}$, avec σ^a les 3 matrices de Pauli.

La transformation de Jauge locale appartient au groupe des rotations :

$$exp(\, ig_I I^a \cdot \alpha^a(x)) \in SU(2)$$

$$(a = 1{,}2{,}3)$$

Nota 1
Dans le prochain chapitre qui décrit le Modèle électrofaible et l'interaction faible, on verra que le modèle proposé s'inspire très largement de celui de Yang-Mills. Puisque l'interaction décrite est faible, on utilisera la charge faible T, définie par S. Glashow en analogie avec la charge forte I de Yang-Mills.

Dans le tableau ci-dessous, on synthétise les analogies entre les charges électriques, fortes et faibles :

	Interaction électromagnétique Théorie de Weyl	**Interaction forte Théorie de Yang-Mills**	**Interaction faible Modèle électrofaible**
Nombre de charges conservé par transformation de Jauge globale	Q (charge électrique)	I^a (charge forte) $a = 1{,}2{,}3$	T^a (charge faible) $a = 1{,}2{,}3$
Charge élémentaire	$g_Q = e$	g_I	g_T
Charge totale	eQ	$g_I I^a$	$g_T T^a$

Nota 2
Comme on l'a déjà évoqué, l'isospin I est aussi à rapprocher du spin S. Tous deux s'inversent lors de réactions entre particules, désintégration β pour l'isospin Iet transition hyperfine pour le spin S.

Dans le prochain mémoire, on proposera de distinguer la charge forte qu'on note ici Co (comme une charge forte de couleur) de l'isospin I.
Cependant, dans le cas des nucléons et des quarks de 1ère génération, la charge forte Co reste justement égale (sans doute avec une très bonne approximation) à l'isospin I. On comprend mieux alors pourquoi la théorie de Yang-Mills prend pour charge forte l'isospin I.

VI.2.4 Transformation de Jauge locale des quadrivecteurs potentiels dans le cas de l'interaction forte

Dans la théorie de de Yang-Mills, on n'a pas un seul quadrivecteur potentiel A^{μ}, mais trois notés : $A^{1\mu}$, $A^{2\mu}$, $A^{3\mu}$qui chacun interagisse avec un courant fort $j^{\mu}_{I^a}$ $(a = 1{,}2{,}3)$ portant respectivement une charge forte I^1 , I^2 , I^3 .

On a la transformation de Jauge locale des 3 quadrivecteurs potentiels (on la donne ici pour $A^{1\mu}$) :

$$A^{1\mu} \rightarrow A^{1\mu\prime} = A^{1\mu} + \partial_{\mu}\alpha^{1}(x) + g_I f_{123}\alpha^{2}(x)A^{3\mu}$$

avec f_{123} la constante de structure du groupe. Pour $SU(2)$, f_{123} sont les composantes du tenseur ε^{123} de Levi-Civita.

Nota 1
Pour un groupe de rotations $SU(n)$, le nombre de quadrivecteurs potentiels est égale à $n^2 - 1$, identique donc au nombre de générateur du groupe $SU(n)$, au nombre de charges X^a et au nombre de courants $j^{\mu}_{X^a}$.

Nota 2
Chez Yang-Mills, les 3 quadrivecteurs potentiels de l'interaction forte correspondent aux particules médiatrices de l'interaction, c'est-à-dire à trois mésons A^1 , A^2 , A^3 .

Pour passer des mésons A^1 , A^2 , A^3 de la théorie, aux pions chargés électriquement π^+, π^- que l'on observe, on pose les relations entre les quadrivecteurs potentiels des mésons :

$$\pi^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{1\mu} + iA^{2\mu})$$

$$\pi^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{1\mu} - iA^{2\mu})$$

Contrairement au photon γ qui ne porte pas de charge électrique, les pions π^+, π^- portent une charge forte (en l'occurrence l'isospin I^3). Les pions π^+, π^- sont de type opérateur d'échelle, ils peuvent augmenter ou diminuer d'un I^3, la charge forte de la particule avec laquelle ils interagissent.

VI.2.5 Dérivée covariante de l'interaction forte

Pour obtenir l'invariance de l'équation d'onde relativiste de Dirac, la théorie de Yang-Mills définit une dérivée covariante :

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + ig_I I^a \cdot A^{a\mu}$$

$$(a = 1{,}2{,}3)$$

$g_I I^a$ sont les quantités conservées lors de la transformation de Jauge.
A^{μ}_1, A^{μ}_2, A^{μ}_3 : sont les trois quadrivecteurs potentiels annulés lors de la transformation de Jauge locale.

On a l'équation d'onde relativiste de Dirac dans le référentiel R^A où l'on effectue la transformation de Jauge locale :

$$(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

$$(i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + ig_I I^a \cdot A^{a\mu}) - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

$$(a = 1,2,3)$$

Nota
A voir si l'on peut associer dans une théorie plus englobante :
- les rotations de $SU(2)$ (ou de $SU(n)$ si on généralise) correspondant aux transformations de Jauge locale de Yang-Mills,
- les vecteurs rotations généralisées dans un plan spatial ou spatiotemporel que l'on a proposés dans le 2ème mémoire et qui sont annulés lors d'un changement de référentiels.

Il s'agissait alors de rotations dans un espace réel à deux dimensions ou dans un espace complexe à une dimension. Avec $SU(n)$, on passe à des rotations dans n dimensions complexes.

VI.3 Rappels sur les Lagrangiens utilisés en électromagnétisme et dans l'Electrodynamique quantique relativiste

VI.3.1 Lagrangien d'Alembert

On rappelle le Lagrangien d'Alembert :

$$[L]_{R^0} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu})\psi$$

avec $\mu = 0,1,2,3$ et $\mu = ct, x, y, z$.

Le référentiel du Lagrangien est le vide R^0.

Rappel
On définit le conjugué de la fonction d'onde par :

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$$

En appliquant l'équation d'Euler Lagrange : $\partial_{\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$ ou $\partial_{\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = 0$ sur le Lagrangien d'Alembert, en mettant ensuite au carrée, on retrouve l'équation d'onde d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

En forme compacte :

$$\partial_{\mu}^2 \psi = 0$$

avec $\mu = ct, x, y, z$

VI.3.2 Lagrangien de Dirac libre

On rappelle le Lagrangien de Dirac libre :

$$[L]_{R^c} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu})\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

Le référentiel R^c du Lagrangien de Dirac libre n'est plus le vide puisqu'il a des masses.

En appliquant l'équation d'Euler Lagrange : $\partial_{\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$ ou $\partial_{\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = 0$ sur le Lagrangien de Dirac libre, on retrouve l'équation de Dirac libre dans le référentiel R^c :

$$(\beta[\partial_{ct}]_{R^c} + \beta\vec{\alpha} \circ [\vec{\partial}_x]_{R^c} + i\frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

En forme compacte :

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$$

En mettant ensuite au carré, on retrouve l'équation d'onde de Klein Gordan dans R^{c} :

$$([\partial_{ct}^{2}]_{R^{c}} - [\partial_{x}^{2}]_{R^{c}} + \frac{m^{2}c^{2}}{\hbar^{2}})\psi = 0$$

VI.3.3 Lagrangien de Dirac dans un champ électromagnétique

On rappelle le Lagrangien de Dirac dans un champ électromagnétique :

$$[L]_{R^{A}} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}(D_{\mu})\psi - mc^{2}\bar{\psi}\psi$$

avec R^{A} le référentiel où on annule le quadrivecteur potentiel électromagnétique A^{μ}, avec $\mu = 0,1,2,3$ ou $\mu = ct, x, y, z$.

On a la dérivée covariante (dans le cas d'un électron) :

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA^{\mu}$$

On obtient le Lagrangien de Dirac dans un champ électromagnétique :

$$[L]_{R^{A}} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc^{2})\psi + \hbar ce\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A^{\mu}$$

$-e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A^{\mu}$ est l'énergie potentielle généralisée électromagnétique, appelée aussi énergie d'interaction électromagnétique. C'est le terme d'interaction entre la particule (fermion) de quadrivecteur charge courants $j_{Q}^{\mu} = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ et le quadrivecteur potentiel électromagnétique A^{μ} (représentant le photon γ).

On a la densité de charge électrique :

$$j_{Q}^{t} = -e\bar{\psi}\gamma^{0}\psi = -e\psi^{\dagger}\psi$$

On retrouve l'énergie potentielle électrostatique :

$$Ep^{t} = -eA^{t}$$

On a les courants électriques :

$$j_{Q}^{\mu} = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

avec $\mu = x, y, z$

On retrouve l'énergie potentielle généralisée magnétique :

$$Ep^{t} = j_{Q}^{\mu}A^{\mu} = -e\vec{v}^{\mu} \cdot \vec{A}^{\mu}$$

avec $\mu = x, y, z$

On retrouve l'énergie potentielle généralisée électromagnétique (au signe près, car on a inversé les signes du potentiel vecteur magnétique) :

$$Ep^{t} = -e(A^{t} - (\vec{v}^{\mu} \cdot \vec{A}^{\mu})$$

avec $\mu = x, y, z$

Nota sur l'énergie potentielle magnétique
Rappelons que l'énergie potentielle magnétique est nulle, la force magnétique de Lorentz ne travaille pas. C'est parce qu'il existe une impulsion potentielle magnétique $e\vec{A}^{\mu}$ $(\mu = x, y, z)$ qu'on a cette énergie potentielle *généralisée* magnétique.

Nota
Pour passer du lagrangien $[L]_{R^c}$ au lagrangien $[L]_{R^A}$, on effectue le changement de référentiels ou transformation de jauge locale :

$$\psi \to \psi' = exp(\, ieQ\alpha(x))\psi$$

$$A^{\mu} \to A^{\mu\prime} = A^{\mu} + \partial_{\mu}\alpha(x)$$

$$\partial_{\mu}(exp(\, ieQ\alpha(x))\psi) = \; -i(\partial_{\mu}\alpha(x))$$

$$[L]_{R^c} \to [L]_{R^A} = [L]_{R^c} + (\partial_{\mu}\alpha(x))\, \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

En Electrodynamique quantique relativiste, il y a de plus un Lagrangien décrivant la dynamique du photon :

$$L_{jauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}A^{\mu}$ est le tenseur de Maxwell Faraday, le tenseur du champ électromagnétique ou le tenseur de champ du photon.

On obtient le Lagrangien total dans le référentiel R^A où on annule le quadrivecteur potentiel électromagnétique A^{μ} :

$$[L]_{R^A} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc^2)\psi + \hbar ce\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A^{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

VI.4 Lagrangiens intervenant dans l'interaction forte

VI.4.1 Lagrangien d'Alembert

Dans la théorie de Yang-Mills, les Lagrangiens utilisés pour l'interaction nucléaire forte se construisent sur le même modèle que celui de l'interaction électromagnétique.

Dans le référentiel R^0 le vide, on a un Lagrangien pour un doublet de particules (du noyau) correspondant à l'équation d'onde de d'Alembert :

$$[L]_{R^0} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial^{\mu})\psi$$

Nota : ψ est ci-dessus un doublet de fonctions d'onde.

VI.4.2 Lagrangien de Dirac libre

Dans le référentiel R^c (avec des masses), on a le Lagrangien correspondant à Dirac libre :

$$[L]_{R^c} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial^{\mu})\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

VI.4.3 Lagrangien de Dirac dans un champ nucléaire fort

Dans le référentiel R^A où on annule les quadrivecteur potentiels $A^{a\mu}$, on remplace ∂^μ par D^μ pour que l'équation d'onde soit toujours respectée (principe d'invariance de Jauge). La théorie de Yang-Mills donne le Lagrangien pour les particules du noyau dans un champ nucléaire fort :

$$[L]_{R^A} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu(D_\mu)\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

On a la dérivée covariante :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_I I^a \cdot A^{a\mu}$$

$$(a = 1,2,3)$$

On obtient :

$$[L]_{R^A} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_I I^a \cdot A^{a\mu})\psi - mc^2\bar{\psi}\psi$$

$$[L]_{R^A} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi - \hbar c g_I I^a\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \cdot A^{a\mu}$$

$-\hbar c g_I I^a\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \cdot A^{a\mu}$ est le terme d'interaction forte entre les particules (fermion) de quadrivecteur densité de charge courants forts $j^\mu_{I^a} = g_I I^a\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ et les quadrivecteurs potentiels forts $A^{a\mu}$ (représentant les particules médiatrices mésons de l'interaction forte).

Il y a également un Lagrangien pour décrire la dynamique des mésons de Jauge :

$$L_{jauge} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

On a trois tenseurs $F^1_{\mu\nu}, F^2_{\mu\nu}, F^3_{\mu\nu}$ analogues au tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ de Maxwell-Faraday.

On donne l'expression du tenseur $F^3_{\mu\nu}$:

$$F^3_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{3\nu} - \partial_\nu A^{3\mu} + g_I\varepsilon^{123}A^{1\mu}A^{2\nu}$$

ε^{123} est la constante de structure du groupe $SU(2)$. Pour $SU(2)$, ce sont les composantes du tenseur ε^{123} de Levi-Civita.

Nota 1
Le groupe $SU(2)$ de l'isospin I est non commutatif, la combinaison $g_I\varepsilon^{123}A^{1\mu}A^{2\nu}$ implique des interactions entre les mésons A^1 , A^2 , A^3 avec échange de quantités portées par les mésons.

Nota 2
L'invariance de Jauge requiert que les mésons A^1 , A^2 , A^3 soient sans masse. Or, pour expliquer la faible portée des interactions nucléaires, suivant les idées de H. Yukawa, il faut que les particules médiatrices aient une masse.

Cela implique que le Lagrangien inclut des termes de masse de la forme : $L_{masse} = {m_{mes}}^2 A^\mu A_\mu$ avec m_{mes} la masse des mésons.
Or ce Lagrangien L_{masse} n'est pas invariant de Jauge locale. Pour pallier ce problème, on étudiera dans un prochain chapitre le mécanisme BEH utilisé par le Modèle électrofaible.

VI.5 Conclusion du chapitre, résumé sur les transformations de Jauge globale et locale

Lors d'une transformation de Jauge globale de $SU(n)$, on a les charges X^a (comme la charge électrique, la charge forte d'isospin, la charge forte de saveur, la charge faible du Modèle électrofaible,

la charge forte de couleur, etc.) qui sont conservées. On a aussi les quadrivecteurs densité de charge courants (électromagnétiques, fort, faible) qui sont conservés et qui satisfont à l'équation de conservation : $\partial_\mu j^\mu_{X^a} = 0$ avec X^a la charge génératrice du groupe $SU(n)_X$, $a = 1, \dots, n^2 - 1$ et $\mu = t, x, y, z$.

Lors d'une transformation de Jauge locale de $SU(n)$, on obtient suivant un principe d'Invariance des grandes lois de Nature, des dérivées covariantes et des termes d'interaction à ajouter dans le Lagrangien. On a $n^2 - 1$ quadrivecteurs potentiels (ou champs de Jauge) qui sont annulés lors de la transformation de Jauge locale. A ces $n^2 - 1$ quadrivecteurs potentiels, on associe $n^2 - 1$ particules médiatrices. Ces $n^2 - 1$ particules médiatrices de quadrivecteurs potentiels $A^{a\mu}$ réagissent via les termes d'interaction avec les fermions porteurs de charges X^a associées aux courants $j^\mu_{X^a}$. Si $n \geq 2$, les $n^2 - 1$ particules médiatrices réagissent entre elles.

Dans le prochain chapitre, on va continuer à s'intéresser aux travaux de Chen Ning Yang. Cette fois-ci, les travaux porteront sur l'interaction faible et sur la violation de parité qu'on y rencontre.

Chapitre VII La violation de parité de Lee Yang Wu (1957) et l'hélicité négative du neutrino de Golhaber (1958)

Objet du chapitre

A l'instar des particules de charge électrique nulle qui ne subissent pas l'interaction électromagnétique, à l'instar des leptons de charge forte nulle qui ne subissent pas l'interaction forte, on va ici s'intéresser aux particules de charges faibles nulles qui ne subissent pas l'interaction faible.

Les symptômes d'une charge faible nulle se manifestent dans la violation de parité rencontrée dans l'interaction faible. Une violation de parité qui sous-entend que certaines particules distinguent la droite de la gauche.

On définit l'hélicité comme la projection du spin d'une particule sur sa direction de propagation. On étudie l'absence de neutrino d'hélicité positive (ou de neutrino droitier), ainsi que la non-participation de certaines particules à l'interaction faible en fonction de leur hélicité et donc par-là, possédant une charge faible nulle.

VII.1 Rappels sur l'hélicité

VII.1.1 Définition

On appelle hélicité H d'une particule, la projection du spin de cette particule sur sa direction de propagation :

$$H = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

avec $\vec{S}$ le spin (suivant z généralement) et $\vec{p}$ l'impulsion.

La figure suivante schématise pour un électron et un antineutrino, l'impulsion $\vec{p}$ par une flèche fine et le spin $\vec{S}$ par une flèche épaisse.

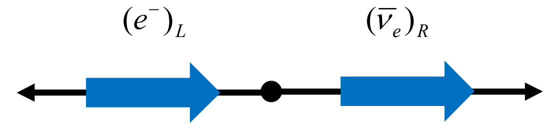


Figure 12 : hélicité d'un électron et d'un antineutrino

Sur la figure ci-dessus, on a les hélicités suivantes pour l'électron et l'antineutrino :

$$H_{e^-} = -\frac{1}{2}$$

avec $S_{e^-} = \frac{1}{2}$

$$H_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{2}$$

avec $S_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{2}$

Si l'hélicité est positive, c'est-à-dire si le spin a la même direction que l'impulsion, on parle de particule droite ou droitière (right ou R). Si l'hélicité est négative, c'est-à-dire si le spin a une direction opposée à l'impulsion, on parle de particule gauche ou gauchère (left ou L). On a sur la figure ci-dessus un électron gaucher $(e^-)_L$ et un antineutrino droitier $(\bar{\nu}_e)_R$.

VII.1.2 Exemple de la transition hyperfine

La notion d'hélicité permet de distinguer les deux faces, au niveau du spin, d'une même particule.
Par exemple, si un proton droitier p_R possède un spin (en fait la 3ème composante du spin) $S^3 = +\frac{1}{2}$, un proton gaucher p_L de même impulsion possède un spin $S^3 = -\frac{1}{2}$. De même, si un électron droitier $(e^-)_R$ possède un spin $S^3 = +\frac{1}{2}$, un électron gaucher $(e^-)_L$ de même impulsion possède un spin $S^3 = -\frac{1}{2}$.

Généralement, lors d'une transition hyperfine, l'électron conserve la même impulsion. Le spin et l'hélicité s'inversent. On passe par exemple d'un électron droitier à un électron gaucher. On a la réaction :

$$(e^-)_R(S^3 = \frac{1}{2}) \to (e^-)_L(S^3 = -\frac{1}{2}) + \gamma(S^3 = 1)$$

VII.2 Rappels historiques sur la violation de parité et l'hélicité négative du neutrino

VII.2.1 Violation de parité dans l'interactions faible

Au début des années 1950, on constate une anomalie dans la désintégration par interaction faible de deux mésons dits étranges θ^+ et τ^+ (aujourd'hui tous deux connus sous le nom de kaon positif K^+) en pions π.
En 1956, pour expliquer cette anomalie, Tsung-Dao Lee and Chen Ning Yang prévoient une violation de la parité dans l'interaction faible.

Rappel sur l'opérateur de parité $\hat{P}$
L'opérateur de parité $\hat{P}$ inverse les coordonnées d'Espace :

$$x \to x' = -x$$

Le moment cinétique orbital L et le moment cinétique de spin S ne sont pas affectés par l'opération de Parité. L'énergie E et l'impulsion p sont inversées. On a les transformations suivantes par $\hat{P}$:

$$L \to L' = L$$
$$S \to S' = S$$
$$p \to p' = -p$$
$$E \to E' = -E$$

En 1957, les expériences de Chien-Shiung Wu sur le cobalt 60 étudient la possible violation de la parité. Lors de la désintégration β^- du cobalt 60, on a la réaction suivante :

$$^{60}_{27}Co \to {}^{60}_{28}Ni + e^- + \bar{\nu}_e$$

Graphiquement, cela correspond au schéma suivant, avec l'impulsion $\vec{p}$ toujours symbolisée par une flèche fine et le spin $\vec{S}$ symbolisé par une flèche épaisse. On note que l'antineutrino $\bar{\nu}_e$ possède une hélicité positive.

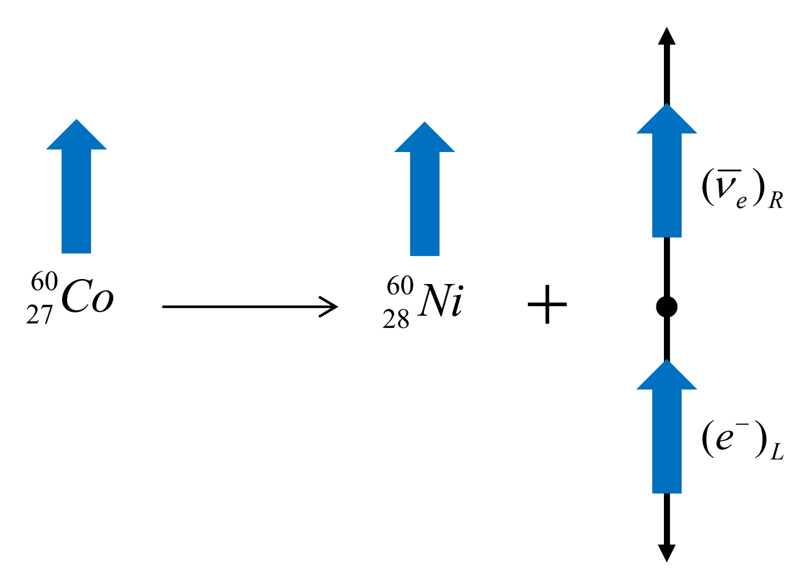


Figure 13 : schéma observé de la désintégration du cobalt $^{60}_{27}Co$

On donne le schéma symétrique obtenu par opération de parité $\hat{P}$, avec des rôles inversés pour l'électron et l'antineutrino : l'électron e^- est émis vers l'avant, l'antineutrino $\bar{\nu}_e$ est émis vers l'arrière. Dans ce cas, l'antineutrino $\bar{\nu}_e$ devrait avoir une hélicité négative. Ce schéma n'est pas observé puisqu'il y a un maximum de violation de la parité.

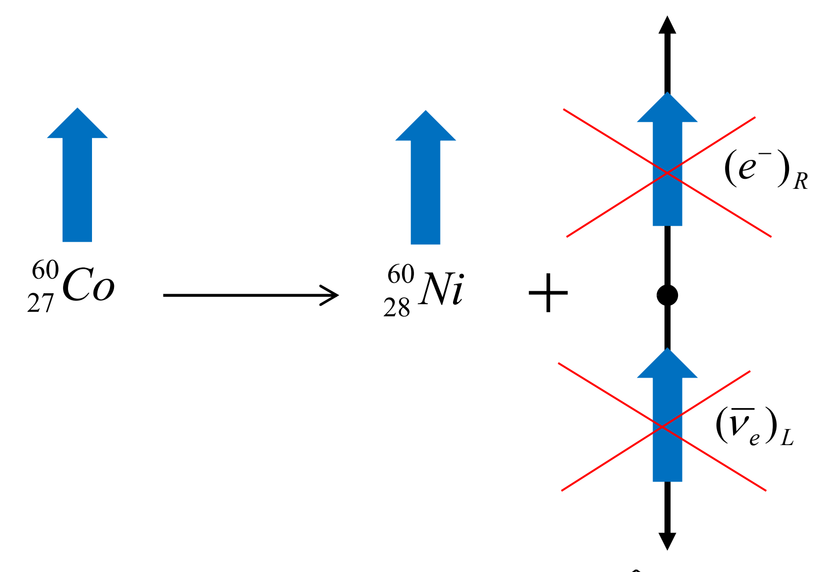


Figure 14 : schéma obtenu par opération de parité $\hat{P}$sur le précédent schéma, schéma non observé

Les expériences de Chien-Shiung Wu sur le cobalt 60 concluent donc à un maximum de la violation de la parité (on reviendra sur cette expérience dans le 6ème mémoire).

VII.2.2 L'hélicité négative du neutrino et positive de l'antineutrino

Inspirés par ces faits, en 1957 et 1958, Maurice Goldhaber, Lee Grodzins et Andrew Sunyar mettent en place une expérience de mesure de l'hélicité du neutrino. Le principe de l'expérience repose sur le transfert de l'helicité du neutrino à une particule plus aisément détectable : le photon.

Le trio constate que l'hélicité du neutrino est toujours négative (neutrino toujours gaucher), avec un degré de précision toutefois assez faible : de l'ordre de 10%. De même, il sera constaté que l'hélicité de l'antineutrino est toujours positive (antineutrino toujours droitier).

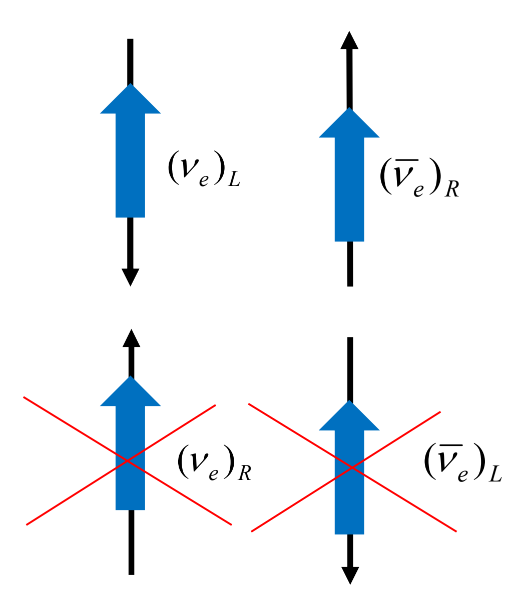


Figure 15 : neutrino et antineutrino observés, neutrino et antineutrino non observés

Nota sur l'antimatière
Notons que lors du passage de la matière à l'antimatière, il y a inversion de l'impulsion, mais pas du spin. L'hélicité s'inverse donc. L'antiparticule d'un électron droitier $(e^-)_R$ est un antiélectron gaucher $(\bar{e}^+)_L$. Ils ont tous les deux le même spin, par exemple $S^3 = \frac{1}{2}$, une impulsion et une hélicité opposées.
De même, l'antiparticule d'un neutrino gaucher $(\nu_e)_L$ est l'antineutrino droitier $(\bar{\nu}_e)_R$.

VII.2.3 Hélicité et charge faible *T*

L'expérience de Goldhaber Grodzins Sunyara révèle qu'il existe uniquement des neutrinos gauchers (et pas de neutrinos droitiers). Par contre, il existe des protons ou des électrons à la fois droitiers et gauchers.
Néanmoins, on constate expérimentalement que seules les particules gauchères (et les antiparticules droitières) interviennent dans l'interaction faible. Les particules droitières (et les antiparticules gauchères) ne sont pas sujettes à l'interaction faible.

Pour expliquer cela, on attribue aux particules droitières une charge faible (T, T^3) nulle.
Par exemple, pour le proton droitier $(p)_R$, le neutron droitier $(n)_R$ ou l'électron droitier $(e^-)_R$, on a $(T, T^3) = (0,0)$.
De même, pour l'antiproton gaucher $(\bar{p})_L$, l'antineutron gaucher $(\bar{n})_L$ ou l'antiélectron gaucher $(\bar{e})_L$, on a $(T, T^3) = (0,0)$.

Nota
La charge faible T est fonction de l'hélicité et donc du spin de la particule. En effet, suivant leur hélicité, certaines particules ne participent pas à l'interaction faible et ont une charge faible T nulle.

VII.3 Nombres quantiques de particules

Dans les tableaux ci-dessous, on donne la charge électrique Q, le spin (S, S^3), l'hélicité $\boldsymbol{H}$ et la charge faible (T, T^3) pour quelques particules et antiparticules.
On considère que les particules ont toutes une impulsion de même direction et de même sens, que les antiparticules ont toutes une impulsion de même direction et de sens opposé.

VII.3.1 Leptons gauchers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S, S^3)	Hélicité H	Charge faible (T, T^3)
$(e^-)_L$	-1	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$(\nu_e)_L$	0	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$

VII.3.2 Leptons droitiers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S, S^3)	Hélicité H	Charge faible (T, T^3)
$(e^-)_R$	-1	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)
$(\nu_e)_R$ (non observé)	0	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)

VII.3.3 Anti leptons gauchers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S, S^3)	Hélicité H	Charge faible (T, T^3)
$(\bar{e}^+)_L$	$+1$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)
$(\bar{\nu}_e)_L$ (non observé)	0	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)

VII.3.4 Anti leptons droitiers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S, S^3)	Hélicité H	Charge faible (T, T^3)
$(\bar{e}^+)_R$	$+1$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$
$(\bar{\nu}_e)_R$	0	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

VII.3.5 Nucléons gauchers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S, S^3)	Hélicité H	Charge faible (T, T^3)
$(p)_L(uud)_L$	$+1$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$
$(n)_L(udd)_L$	0	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

VII.3.6 Nucléons droitiers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S, S^3)	Hélicité H	Charge faible (T, T^3)
$(p)_R(uud)_R$	$+1$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)

$(n)_R(udd)_R$	0	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)

VII.3.7 Anti nucléons gauchers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S,S^3)	Hélicité H	Charge faible (T,T^3)
$(\bar{p})_L(\bar{u}\bar{u}\bar{d})_L$	-1	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)
$(\bar{n})_L(\bar{u}\bar{u}\bar{d})_L$	0	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{2}$	(0,0)

VII.3.8 Anti nucléons droitiers

Particule	Charge électrique Q	Spin (S,S^3)	Hélicité H	Charge faible (T,T^3)
$(\bar{p})_R(\bar{u}\bar{u}\bar{d})_R$	-1	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
$(\bar{n})_R(\bar{u}\bar{u}\bar{d})_R$	0	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$

VII.3.9 Charge des particules suivant l'interaction

Dans le tableau ci-dessous, on ordonne les particules suivant leurs participations aux interactions décrites par le Modèle Standard. On note que les neutrinos droitiers ne participent à aucune interaction et ont toutes leurs charges nulles. Ils n'ont jamais été détectés et à priori n'existent pas.

Ne participe pas à l'interaction si charge nulle	Interaction électromagnétique	Interaction faible	Interaction forte
Proton gaucher $(p)_L$	x	+x	+x
Neutron gaucher $(n)_L$		-x	-x
Proton droitier $(p)_R$	x		+x
Neutron droitier $(n)_R$			-x
Electron gaucher $(e^-)_L$	-x	-x	
Neutrino gaucher $(\nu_e)_L$		+x	
Electron droitier $(e^-)_R$	-x		
Neutrino droitier $(\nu_e)_R$ (non observé)			

Nota
Si comme dans le Modèle des quarks, on suppose que le neutron est une particule composite formée de quarks chargés électriquement, alors le neutron est également sujet à l'interaction électromagnétique.

VII.4 Conclusion du chapitre

L'interaction faible possède une charge faible T analogue de la charge électrique Q de l'interaction électromagnétique.

Pour certaines particules, suivant leur spin et leur hélicité, cette charge faible T est nulle. Ces particules n'interviennent pas dans l'interaction faible, ou même n'existent pas à priori comme les antineutrinos gauches. C'est la cause de la violation de parité dans les interactions faibles.

Dans le prochain chapitre, on s'intéresse au Modèle électrofaible, qui pour décrire l'interaction faible, reprend le modèle mathématique de Yangs-Mills développé pour l'interaction forte, et l'adapte aux particules sujettes ou non à l'interaction faible suivant leur hélicité.

Chapitre VIII Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam (années 1960)

Objet du chapitre
On présente le Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam fortement inspiré de la théorie de Jauge de Yang-Mills, retranscrite de l'interaction forte à l'interaction faible. Le Modèle électrofaible regroupe dans une même théorie l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et une interaction possédant une hypercharge faible Y_W. Grâce au mécanisme de Higgs, une masse est attribuée aux bosons médiateurs de l'interaction faible et explique ainsi la très faible portée de cette interaction.

VIII.1 Historique du Modèle électrofaible

Le Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam est développé durant la décennie 1960. Il s'inspire de la théorie de Jauge de Yang-Mills que l'on a vue précédemment. Au début des années 1960, Sheldon Glashow propose un premier modèle réunissant interaction électromagnétique et interaction faible fondé sur une théorie de Jauge du type $U(1)_Q \times U(1)_{Y_W} \times SU(2)_T$.
Cependant, ce modèle ne concerne que les leptons (électron, neutrinos, etc., c'est-à-dire les particules hors du noyau non soumises à l'interaction forte). La désintégration du neutron en proton n'est pas prise en compte. De plus, les bosons médiateurs de l'interaction faible n'ont pas de masse (comme le photon). Sous-entendu, l'interaction faible possède une très grande portée, ce qui n'est expérimentalement pas le cas.

A la fin des années 1960, Steven Weinberg et Abdus Salam ont l'idée d'utiliser le mécanisme de Brout-Englert - Higgs (BEH) pour donner une masse aux bosons médiateurs de l'interaction faible et donc d'expliquer la faible portée. Les hadrons (c'est-à-dire les particules du noyau formées de quarks soumises à l'interaction forte) sont cette fois intégrés dans le Modèle électrofaible. Le mécanisme BEH permet également d'attribuer une masse aux leptons et aux quarks.

Dans les prochains paragraphes, on présentera les principales caractéristiques du Modèle électrofaible. La présentation s'inspire d'un article de S. Glashow et Howard Georgi paru dans *Physics Today* de septembre 1980. S. Glashow part d'une analogie entre la force électrostatique de Coulomb et l'interaction faible pour définir des constantes de couplage. Nous y viendrons dans quelques paragraphes. Préalablement, faisons un rappel sur les nombres quantiques des particules utilisés dans le Modèle électrofaible.

VIII.2 Nombres quantiques du Modèle électrofaible, analogies entre interactions forte et faible

VIII.2.1 Généralités

Précédemment, on a vu dans la théorie de Yang-Mills décrivant l'interaction forte que l'isospin I est présenté comme la charge forte. Par analogie entre interactions forte et faible, on va voir maintenant que S. Glashow définit un isospin ou charge faible T. De même, il définit une hypercharge faible Y_W en analogie avec l'hypercharge forte Y que l'on rencontre dans le Modèle des quarks.

VIII.2.2 Hypercharge forte Y et isospin I^3 , relation de Gell-Mann Nishijima

A partir de données expérimentales sur des collisions entre particules faisant intervenir l'interaction forte, K. Nishijima (1953) et M. Gell-Mann (1956) proposent une formule reliant la charge Q à l'hypercharge forte Y et à l'isospin I^3 pour des particules de même hypercharge forte Y regroupées dans un multiplet.

Pour chaque particule du multiplet, on a la relation de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2}$$

De plus, on a :

$$Y = B + St$$

avec B le nombre baryonnique et St le nombre d'étrangeté de la particule.

On obtient :

$$Q = I^3 + \frac{B + St}{2}$$

Les particules du multiplet ont généralement des isospins opposés. Ainsi, en moyenne pour le multiplet, les isospins s'annulent.

$$moy(I^3) = 0$$

On a l'hypercharge forte de chaque particule égale à celle caractérisant le multiplet. On a donc une moyenne :

$$moy(Y) = Y$$

Suivant $Q = I^3 + \frac{Y}{2}$, on a alors :

$$moy(Q) = moy(I^3) + moy(\frac{Y}{2}) = \frac{Y}{2}$$

On a l'hypercharge forte de chaque particule égale à celle caractérisant le multiplet, égale à deux fois la moyenne des charges des particules du multiplet.

Exemple de doublet

Pour un doublet de proton neutron, on a les valeurs :

Particule	**Charge électrique** Q	**Hypercharge forte** Y	**Isospin identifié à la charge forte** I^3
p	1	1	$+\frac{1}{2}$
n	0	1	$-\frac{1}{2}$

Pour chaque particule du doublet, on a d'après la relation de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} = \pm\frac{1}{2} + 1$$

En moyenne, on a :

$$moy(Q) = \frac{Y}{2} = \frac{1}{2}$$

VIII.2.3 Hypercharge faible Y_W et charge faible T^3

Au début des années 1960, Sheldon Glashow est à la recherche d'une théorie de Jauge locale qui puisse unifier les interactions électromagnétiques et faibles. Par analogie avec la relation de Gell-Mann–Nishijima, il propose une relation entre la charge électrique, un isospin faible (ou charge faible) T^3 et une hypercharge faible Y_W. Pour chaque particule d'un multiplet, on a la relation de Glashow :

$$Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$$

En moyenne pour le multiplet, on a :

$$moy(Q) = \frac{Y_W}{2}$$

Puisque les leptons sont sujets à l'interaction faible, S. Glashow leur attribue une charge faible T^3 identique à celle du nucléon correspondant. Par contre, il différentie particules gauchères et droitières puisque ces dernières ne sont pas sujettes à l'interaction faible.

Exemples de doublet gaucher

Pour un doublet de leptons gauchers (électron $(e^-)_L$, neutrino $(\nu_e)_L$), on a les valeurs :

Particule	**charge** Q	**Hypercharge faible** Y_W	**Charge faible** T^3
$(e^-)_L$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$
$(\nu_e)_L$	0	-1	$+\frac{1}{2}$

En moyenne, on a bien :

$$moy(Q) = \frac{Y_W}{2} = -\frac{1}{2}$$

Même si le modèle initial de S. Glashow ne contient pas les hadrons, ces derniers sont inclus par la suite sous une forme analogue aux leptons. Pour un doublet de proton neutron gauchers, on a les valeurs :

Particule	**Charge électrique** Q	**Hypercharge forte** Y	**Isospin** I^3	**Hypercharge faible** Y_W	**Charge faible** T^3
$(p)_L$	1	1	$+\frac{1}{2}$	1	$+\frac{1}{2}$
$(n)_L$	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

En moyenne, on a bien :

$$moy(Q) = \frac{Y_W}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemple de singulet droitier

On définit des groupements de particules contenant une seule particule. Dans ce cas, la particule unique possède une charge faible T^3 nulle et n'est pas soumise à l'interaction faible.

Par exemple, on a l'électron d'hélicité droite $(e^-)_R$:

Particule	**charge**	**Hypercharge**	**Charge faible**

	Q	**faible** Y_W	T^3
$(e^-)_R$	-1	-2	0
$(\nu_e)_R$ non observé			

VIII.2.4 Nombres quantiques du Modèle électrofaible

On récapitule dans le tableau ci-dessous les nombres quantiques des particules intervenant dans le Modèle électrofaible. Ba est le nombre baryonique, L_e est le nombre leptonique.

				Charges		
	Générations de particules	(S, S^3)	Ba L_e	Q	(T, T^3)	$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$
Quarks gauchers	u_L, c_L, t_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
	d_L, s_L, b_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
Quarks droitiers	u_R, c_R, t_R	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$(0,0)$	$+\frac{4}{3}$
	d_R, s_R, b_R	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$(0,0)$	$-\frac{2}{3}$
Leptons gauchers	e_L^-, μ_L^-, τ_L^-	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	-1	-1	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	-1
	$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	-1	0	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	-1
Leptons droitiers	e_R^-, μ_R^-, τ_R^-	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	-1	-1	$(0,0)$	-2
	$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ non observés			0	$(0,0)$	0

Observons que :

- les 3 générations de particules (quarks et leptons) ont les mêmes nombres de charges (ce ne serait plus le cas si on incluait la charge forte dans le tableau ci-dessus),
- la charge faible (T, T^3) et l'hypercharge faible Y_W sont fonctions de l'hélicité et donc du spin.

A l'instar de l'interaction forte qui différentie hadrons et leptons suivant qu'ils sont sujets ou non à l'interaction forte, l'interaction faible différentie particules gauchères et droitières suivant qu'elles sont sujettes ou non à l'interaction faible.

VIII.3 Constantes de couplage

VIII.3.1 Analogie avec l'électrostatique

Pour définir les constantes de couplage qui interviennent dans le Modèle électrofaible, S. Glashow part de la force électrostatique de Coulomb :

$$F_{el} = \frac{QQ'e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Q et Q' sont des nombres entiers qui indiquent le nombre de charges électriques élémentaires.

La force électrostatique est réécrite à partir de la constante de couplage électromagnétique α_{em} :

$$\frac{F_{el}}{\hbar c} = \alpha_{em} \frac{QQ'}{r^2}$$

VIII.3.2 Constantes de couplage α_Y et α_T

Sur le modèle de α_{em}, le Modèle électrofaible définit deux constantes de couplage supplémentaires.

On rappelle la constante de couplage de l'interaction électromagnétique avec une charge électrique élémentaire $e = g_Q$:

$$\alpha_{em} = \alpha_Q = \frac{{g_Q}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

Sur ce modèle, S. Glashow définit une constante de couplage α_Y et une charge élémentaire g_Y associées à l'hypercharge faible Y^W :

$$\alpha_Y = \frac{{g_Y}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

Il définit également une constante de couplage α_T et une charge élémentaire g_T associées à la charge faible T :

$$\alpha_T = \frac{{g_T}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

Nota
A l'instar de $\alpha_{em} = \alpha_Q$, les constantes de couplage α_Y et α_T sont sans dimension.

Numériquement, on a les valeurs suivantes (pour l'énergie équivalente à $M_Z \approx 90GeV$) :

$$\alpha_{em} = \alpha_Q = \frac{{g_Q}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$\alpha_T = \frac{{g_T}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{30}$$

$$\alpha_Y = \frac{{g_Y}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{100}$$

Nota
On utilise aussi les notations alternatives suivantes pour les constantes de couplage α_T et α_Y :

$$\alpha_Y = \alpha_1 = \alpha'$$
$$\alpha_T = \alpha_2 = \alpha$$

$$g_Y = g_1 = g'$$
$$g_T = g_2 = g$$

On préfère ici utiliser les indices Q, Y et T pour marquer le lien entre la constante de couplage et le nombre quantique de charges (électrique, hyper faible ou faible).

VIII.4 Transformations de Jauge locale et dérivées covariantes

VIII.4.1 Groupe $SU(2)_T$

Comme précédemment, S. Glashow s'inspire de la théorie de Yang-Mills décrivant l'interaction forte, retranscrite pour l'interaction faible.

Il propose que la charge faible T soit le générateur d'un groupe de rotations $SU(2)_T$ avec $exp(\, ig_T T^a \cdot \alpha^a(x)) \in SU(2)_T$.

Il propose également une transformation de Jauge locale sur un doublet de fonctions d'onde ψ_L, associé à des particules gauchères :

$$\psi_L \rightarrow \psi_L{}' = exp(\, ig_T T^a \cdot \alpha^a(x))\psi_L$$

$$(a = 1,2,3)$$

Nota
Comme chez Yang-Mills, on prend usuellement une charge faible $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ $(a = 1,2,3)$ avec σ^a les 3 matrices de Pauli.

Il définit 3 quadrivecteurs potentiels faibles $W^{1\mu}$, $W^{2\mu}$, $W^{3\mu}$, correspondant à trois bosons massifs W^1, W^2, W^3 particules médiatrices de l'interaction faible.

On a la transformation de Jauge locale des 3 quadrivecteurs potentiels :

$$W^{1\mu} \rightarrow W^{1\mu\prime} = W^{1\mu} + \partial_\mu \alpha^1(x) + g_T f_{123} \alpha^2(x) W^{3\mu}$$

avec $f_{123} = \varepsilon_{123}$ la constante de structure du groupe.

VIII.4.2 Groupe $U(1)_{Y_W}$

Pour l'hypercharge faible Y_W à une dimension (comme la charge électrique Q), S. Glashow propose qu'elle soit le générateur d'un groupe de rotations $U(1)_{Y_W}$ avec $exp(\, ig_Y Y_W \cdot \alpha(x)) \in U(1)_{Y_W}$.

Il propose également une transformation de Jauge locale sur une fonctions d'onde ψ :

$$\psi \rightarrow \psi' = exp(\, ig_Y Y_W \cdot \alpha(x))\psi$$

S. Glashow définit un quadrivecteur potentiels $B^{\ \mu}$ correspondant à un boson B. On a la transformation de Jauge locale du quadrivecteur potentiel :

$$B^\mu \rightarrow B^{\mu\,\prime} = B^\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

VIII.4.3 Hypercharge $\frac{Y_W}{2}$, dérivée covariante et interaction hyper

Pour un multiplet de particules, on a en moyenne :

$$moy(Q) = \frac{Y_W}{2}$$

Puisque la charge Q est conservée lors d'une transformation de jauge globale, $moy(Q)$ doit aussi être conservée, et donc $\frac{Y_W}{2}$ également.

Pour l'interaction électromagnétique, après une transformation de Jauge locale, on a une dérivée covariante de la forme :

$$D^\mu = \partial^\mu + ieQ \cdot A^\mu$$

Pour l'hypercharge faible Y_W, après une transformation de Jauge locale, on pose une dérivée covariante de la forme :

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} + ig_Y \frac{Y_W}{2} \cdot B^{\mu} + \ldots$$

On met trois petits points car on ne tient pas encore compte dans la dérivée covariante du terme interaction faible.

On peut avoir l'impression de définir une nouvelle interaction fondée sur la particule médiatrice le boson B et sur l'hypercharge Y_W. On propose ici que c'est effectivement le cas. On parlera dans ce mémoire et dans le suivant d'interaction hyper.

VIII.4.4 Charge faible T^3 , dérivée covariante et interaction faible

Pour chaque particule d'un multiplet, on a la relation de Glashow entre les 3 charges :

$$Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$$

Puisque la charge Q et l'hypercharge faible Y_W sont des quantités conservées lors d'une transformation de Jauge globale, la charge faible T^3 l'est aussi.

On peut donc définir un quadrivecteur de Jauge $W^{3\mu}$ qui est annulé lors d'une transformation version Jauge locale et qui est associé à la quantité conservée T^3.
On généralise aux quadrivecteurs potentiels $W^{a\mu}$ et aux charges faibles T^a, avec $a = 1,2,3$.

Pour les fermions gauchers sujets à l'interaction faible, le Modèle électrofaible pose une dérivée covariante, après transformation de Jauge locale :

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} + ig_Y \frac{Y_W}{2} \cdot B^{\mu} + ig_T T^a \cdot W^{a\mu}$$

avec $a = 1,2,3$

$g_Y \frac{Y_W}{2}$ et $g_T T^a$ sont les quantités conservées lors de la transformation de Jauge globale.
$W^{1\mu}$, $W^{2\mu}$ et $W^{3\mu}$ sont les trois quadrivecteurs annulés lors de la transformation de Jauge version locale que l'on fait correspondre aux particules médiatrices de l'interaction faible, c'est-à-dire aux trois bosons faibles W^1, W^2, W^3.
B^{μ} est un quadrivecteur annulé que l'on fait correspondre au boson B.

Nota
Pour les particules droitières non sujettes à l'interaction faible, on pose une dérivée covariante du genre : $D^{\mu} = \partial^{\mu} + ig_Y \frac{Y_W}{2} \cdot B^{\mu}$.

VIII.5 Etude des Lagrangiens intervenant dans le Modèle électrofaible

Pour ne pas alourdir les expressions, on choisit comme le veut l'usage $\hbar = 1$ et $c = 1$.

VIII.5.1 Lagrangien d'Alembert

Les Lagrangiens utilisés pour l'interaction faible se construisent sur le modèle de ceux de l'interaction électromagnétique et de ceux de Yang-Mills.

Dans le référentiel R^0 (le vide), on a un Lagrangien pour l'électron gaucher correspondant à l'équation d'onde d'Alembert :

$$[L]_{R^0} = i\bar{\psi}_L \gamma_{\mu} (\partial^{\mu}) \psi_L$$

Nota
L'antiparticule associée à la fonction d'onde $\bar{\psi}_L$ est en fait une antiparticule droitière. Elle est bien sujette à l'interaction faible.

VIII.5.2 Lagrangien de Dirac libre

Dans le référentiel R^c (avec des masses), on a le Lagrangien pour l'électron gaucher correspondant à Dirac libre :

$$[L]_{R^c} = i\bar{\psi}_L\gamma_\mu(\partial^\mu)\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_L$$

VIII.5.3 Lagrangien de Dirac dans un champ faible

Dans le référentiel R^{B+W} où on annule les quadrivecteur potentiels B^μ et $W^{a\mu}$, on remplace ∂^μ par D^μ pour que l'équation d'onde soit toujours respectée (principe d'invariance de Jauge), le Modèle électrofaible donne le Lagrangien pour les fermions gauchers :

$$[L]_{R^{B+W}} = i\bar{\psi}_L\gamma_\mu(\partial^\mu + ig_Y\frac{Y_W}{2}\cdot B^\mu + ig_T T^a \cdot W^{a\mu})\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_L$$

Le Modèle électrofaible donne le Lagrangien pour les fermions droitiers :

$$[L]_{R^{B+W}} = i\bar{\psi}_R\gamma_\mu(\partial^\mu + ig_Y\frac{Y_W}{2}\cdot B^\mu)\psi_R - m\bar{\psi}_R\psi_R$$

A l'instar de Yang-Mills, il y a en plus un Lagrangien pour décrire la dynamique des bosons de Jauge :

$$L_{jauge} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu}$$

(sommation sur $a = 1,2,3$)

On a pour le tenseur $B_{\mu\nu}$:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B^\nu - \partial_\nu B^\mu$$

avec $B_{\mu\nu}$ du même type que le tenseur de Maxwell Faraday$F_{\mu\nu}$.

On a pour les 3 tenseurs $W^1_{\mu\nu}$, $W^2_{\mu\nu}$, $W^3_{\mu\nu}$:

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{3\nu} - \partial_\nu W^{3\mu} + g_T\varepsilon^{123}W^{1\mu}W^{2\nu}$$

Nota 1
Le groupe $SU(2)_T$ de l'isospin faible est non commutatif. Comme chez Yang-Mills, la combinaison $g_T\varepsilon^{123}W^{1\mu}W^{2\nu}$ implique des interactions entre les bosons faibles W^1, W^2, W^3.

Nota 2
Comme chez Yang-Mills, l'invariance de Jauge locale requiert que les quatre bosons B et W^1, W^2, W^3 soient sans masse. Or, pour expliquer la faible portée des interactions nucléaires, il faut que les bosons W^1, W^2, W^3, ainsi que les bosons observés W^+, W^-, $W^0 = Z^0$ aient une masse.

W^+ et W^- sont les deux bosons transportant une charge électrique et intervenant dans les désintégrations β^+ et β^-.

Cela implique que le Lagrangien inclut des termes de masse de la forme :

$$L_{masse} = {M_W}^2 W^{+\mu} W_\mu^+ + {M_W}^2 W^{-\mu} W_\mu^- + {M_Z}^2 Z^{0\mu} Z_\mu^0$$

Or ce Lagrangien L_{masse} n'est pas invariant de Jauge. Pour pallier à ce problème, on verra plus loin que l'idée du Modèle électrofaible, c'est d'utiliser le mécanisme BEH.

VIII.6 Les bosons faibles W^+, W^- et Z^0

VIII.6.1 Les bosons faibles W^+ et W^- chargés électriquement

Comme on l'a évoqué, les désintégrations β^+ et β^- sont connues depuis la fin du 19ème siècle avec la découverte par H. Becquerel de la radioactivité. Suivant l'idée de particules médiatrices, à la fin des années 1940, on conjecture pour les désintégrations β^+ et β^- des particules médiatrices chargées électriquement qui interagissent avec les courants faibles proposés par E. Fermi.
Intervenant respectivement dans les désintégrations β^+ et β^-, ces particules médiatrices seront par la suite baptisées bosons faibles W^+ et W^-. D'après H. Yukawa, ces bosons faibles doivent être massiques.

VIII.6.2 Le boson faible neutre Z^0

Au début des années 1950, les expérimentateurs remarquent l'existence de réactions mettant en jeu les interactions faibles, mais dont les échanges entre les particules de la réaction ne semblent comporter aucune charge électrique (au contraire des désintégrations β^+ et β^-). Par exemple, des neutrinos muoniques ν_μ semblent réagir avec de la matière, et donnent ensuite des neutrinos muoniques ν_μ à énergie légèrement différente.

En 1958, suivant une certaine analogie avec le méson pion π^0 particule médiatrice neutre électriquement de l'interaction forte, Sydney Bludman émet l'idée d'un courant faible neutre électriquement qui interagit avec un boson faible, à la fois massique et neutre électriquement, appelé par la suite le boson Z^0 .

Le photon γ et le boson Z^0 présentent des caractéristiques assez proches. Tous deux sont neutres électriquement, c'est-à-dire qu'ils ne transportent pas de charges électriques.

Nota
On trouve aussi la notation W^0 pour le boson Z^0 .

VIII.6.3 Quadrivecteurs des bosons faibles W^+ et W^-

Pour son Modèle électrofaible, S. Glashow cherche à obtenir, à partir des bosons W^1 et W^2, les bosons W^+ et W^-, qui portent respectivement une charge électrique $+$ et $-$. Puisque ces bosons faibles chargés électriquement peuvent augmenter ou diminuer la charge faible d'une T^3 des fermions avec lesquels ils interagissent, S. Glashow les définit tels des opérateurs d'échelle.

On donne les quadrivecteurs potentiels des bosons faibles chargés électriquement :

$$W^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^{1\mu} + iW^{2\mu})$$

$$W^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^{1\mu} - iW^{2\mu})$$

On donne les charges faibles portées par les courants faibles (c'est-à-dire les fermions) avec lesquels interagissent les bosons faibles chargés électriquement :

$$T^+ = T^1 + iT^2$$

$$T^- = T^1 - iT^2$$

Si on construit les charges faibles T^+ et T^- à partir des matrices de Pauli, on obtient :

$$T^+ = T^1 + iT^2 = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^- = T^1 - iT^2 = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota 1, rappel sur les opérateurs d'échelle

Rappelons succinctement la théorie des opérateurs d'échelle utilisée à l'origine pour le moment cinétique quantique J ou pour le spin S. On parle aussi d'opérateurs de création et d'annihilation. On définit les opérateurs d'échelle de moment cinétique $J^{\pm}$ à partir des opérateurs J^1 et J^2 :

$$J^+ = J^1 + iJ^2$$

$$J^- = J^1 - iJ^2$$

J^+ et J^- sont des opérateurs d'échelle pour la valeur propre $\hbar m$ de l'opérateur J^3.

$|m\rangle$ est un vecteur propre commun aux opérateurs $(J)^2$ et J^3. On a pour l'opérateur J^3 :

$$J^3\,|m\rangle = \hbar m|m\rangle$$

Soit j la valeur maximale de m.
Les opérateurs $J^{\pm}$ permettent d'augmenter ou de diminuer les valeurs propres de l'opérateur J^3 :

$$J^-|m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|m-1\rangle$$

$$J^+|m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|m+1\rangle$$

La théorie peut être utilisée pour le spin S, l'isospin I ou pour la charge faible T, qui présentent tous des analogies formelles avec le moment cinétique quantique J.

T^+ et T^- sont des opérateurs d'échelle pour la valeur propre $m\hbar$ de l'opérateur T^3.
$|m\rangle$ est un vecteur propre commun à $(T)^2$ et T^3. On a pour l'opérateur T^3 :

$$T^3\,|m\rangle = m\hbar|m\rangle$$

Soit j la valeur maximale de m.
On a :

$$T^-|m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|m-1\rangle$$

$$T^+|m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|m+1\rangle$$

Les opérateurs T^+ et T^- peuvent être associés à des bosons W^+ et W^- qui augmentent ou diminuent la charge faible T^3 de la particule. Ces bosons W^+ et W^- transportent donc des charges faibles T^3 et sont chargés électriquement suivant la relation de Glashow $Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$.

A noter que le boson faible W^3 associé à T^3 n'est pas un opérateur d'échelle pour T^3. W^3 ne peut donc augmenter ou diminuer la charge faible T^3 d'un fermion. Il ne transporte pas de charge faible T^3.

Nota 2 sur l'indice haut des particules médiatrices
Les particules médiatrices sont usuellement indicées non pas par la quantité quantique qu'elles transportent, mais par la charge portée par les fermions (les courants faibles) avec lesquels elles interagissent.

Par exemple, les bosons W^+ et W^- interagissent avec les fermions de charge faible T^+ et T^-. Eux-mêmes portent comme charge faible T^3.

Les bosons W^1, W^2, W^3 interagissent avec les fermions de charge faible T^1, T^2, T^3.

Nota 3, analogie pions (ou méson pi) π^+, π^-, π^0 et bosons faibles W^+, W^-, $W^0 = Z^0$
Si on ne tient compte que de la 1[ère] génération de quarks gauchers, suivant une stricte analogie avec les pions π^+, π^-, π^0, on devrait avoir pour les bosons faible W^+, W^-, $W^0 = Z^0$:

$$\left|T = 1, T^3 = 1\right\rangle = \left|t = \frac{1}{2}, t^3 = \frac{1}{2}; t' = \frac{1}{2}, t^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle = \left|u_L; -\bar{d}_L\right\rangle = |W^+\rangle$$

$$\left|T = 1, T^3 = 0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|t = \frac{1}{2}, t^3 = \frac{1}{2}; t' = \frac{1}{2}, t^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle + (\left|t = \frac{1}{2}, t^3 = -\frac{1}{2}; t' = \frac{1}{2}, t^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_L; \bar{u}_L\rangle + \left|d_L; -\bar{d}_L\right\rangle) = |Z^0\rangle$$

$$\left|T = 1, T^3 = -1\right\rangle = \left|t = \frac{1}{2}, t^3 = -\frac{1}{2}; t' = \frac{1}{2}, t^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle = |d_L; \bar{u}_L\rangle = |W^-\rangle$$

$$\left|T = 0, T^3 = 0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|t = \frac{1}{2}, t^3 = \frac{1}{2}; t' = \frac{1}{2}, t^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle - (\left|t = \frac{1}{2}, t^3 = -\frac{1}{2}; t' = \frac{1}{2}, t^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_L; \bar{u}_L\rangle + \left|d_L; \bar{d}_L\right\rangle)$$

Si on souhaite tenir compte de la 2[ème] génération de quarks, il faudrait à priori remplacer d_L par $d_L' = -d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c$, avec θ_c l'angle de Cabibbo (pour le modèle de N. Cabibbo, voir mémoire 5).

Nota 4 sur l'hypercharge faible
Suivant la relation $Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$, on note que les bosons W^+, W^-, $W^0 = Z^0$ ont tous une hypercharge faible nulle.

VIII.7 Les courants faibles transportant une charge faible *T*

VIII.7.1 Définition

On rappelle le quadrivecteur densité de charge courants électromagnétique (on distingue ici particules droitière et gauchère, même s'il n'y a pas lieu pour l'interaction électromagnétique) :

$$j_Q^\mu = Q(\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L)$$

avec $\mu = t, x, y, z$

En analogie avec ce courant et suivant les idées d'E. Fermi, le Modèle électrofaible définit 3 courants faibles, qui chacun porte une charge faible T^a et interagit avec un boson faible W^a ($a = 1,2,3$) :

$$j^{\mu}_{T^a} = T^a \bar{\psi}_L \gamma^{\mu} \psi_L$$

$$\text{avec } \mu = t, x, y, z$$

Nota
Le courant faible ne s'applique qu'aux fermions gauchers, puisqu'ils sont les seuls sujets à l'interaction faible.

A partir de $j^{\mu}_{T^1}$ et $j^{\mu}_{T^2}$, on définit des courants faibles portant une charge $T^{\pm}$, qui chacun interagit avec un boson W^+ et W^- :

$$j^{\mu}_{T^+} = j^{\mu}_{T^1} + i j^{\mu}_{T^2}$$

$$j^{\mu}_{T^-} = j^{\mu}_{T^1} - i j^{\mu}_{T^2}$$

Nota
On a donc :
- 2 bosons W^+ et W^- qui interagissent avec les courants faibles $j^{\mu}_{T^+}$ et $j^{\mu}_{T^-}$, et qui portent la charge faible T^3,
- 1 boson Z^0 qui interagit avec le courant faible $j^{\mu}_{T^0}$.

VIII.7.2 Exemples de courants électromagnétiques et de courants faibles neutres et chargés électriquement

Cas des leptons de 1ère génération
Si on prend en compte simplement les leptons de 1ère génération, on a un courant électromagnétique :

$$j^{\mu}_{Q} = Q \bar{e} \gamma^{\mu} e$$

Nota
La fonction d'onde ψ de la particule est ici symbolisée directement par la particule.

On a un courant faible neutre formé d'un doublet de particules gauchères :

$$j^{\mu}_{T^3} = T^3 \overline{(\nu_e \quad e\ )}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

$\overline{\nu_{eL}}$ est l'antiparticule de ν_{eL}, $\overline{\nu_{eL}} = \bar{\nu}_{eR}$ est d'helicité droite.

Le Modèle électrofaible donne des courants faibles chargés électriquement $j^{\mu}_{T^{\pm}}$, portant des charges faibles T^- et T^+, composés de particules gauchères, interagissant avec les bosons W^- et W^+ :

$$j^{\mu}_{T^-} = \overline{(e_L)} \gamma^{\mu} (\nu_{eL})$$

$$j^{\mu}_{T^+} = \overline{(\nu_{eL})} \gamma^{\mu} (e_L)$$

Cas des quarks de 1ère et 2ème génération
Si on prend en compte les quarks de 1ère et 2ème génération, on a un courant électromagnétique :

$$j^{\mu}_{Q} = Q \bar{u} \gamma^{\mu} u + Q \bar{d} \gamma^{\mu} d + Q \bar{c} \gamma^{\mu} c + Q \bar{s} \gamma^{\mu} s$$

$$j_Q^\mu = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d - \frac{2}{3}\bar{c}\gamma^\mu c - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma^\mu s$$

On a un courant faible neutre :

$$j_{T^3}^\mu = T^3\overline{(u \quad d)_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + T^3\overline{(c \quad s)_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$\overline{u_L}$ est ici l'antiparticule de u_L, $\overline{u_L} = \bar{u}_R$ est d'hélicité droite.

Le Modèle électrofaible donne des courants faibles chargés électriquement $j_{T^\pm}^\mu$:

$$j_{T^+}^\mu = \overline{(u \quad c)_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L$$

$$j_{T^-}^\mu = \overline{(d \quad s)_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L$$

Nota
On reviendra sur ces courants faibles chargés dans le prochain mémoire.
On ne tient pas ici compte des angles de Cabibbo θ_c (concernant les quarks) et de Pontecorvo θ_p (concernant les leptons). On y reviendra également dans le prochain mémoire.

VIII.8 Etude des énergies d'interaction

VIII.8.1 Energie d'interaction faible

On rappelle le Lagrangien des particules gauchères proposé par le Modèle électrofaible :

$$[L]_{R^{B+W}} = i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\left(\partial^\mu + ig_Y\frac{Y_W}{2}\cdot B^\mu + ig_T T^a \cdot W^{a\mu}\right)\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_L$$

$$a = 1,2,3$$

On a l'énergie d'interaction faible entre les courants $j_{T^a}^\mu = T^a\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$ et les potentiels $W^{a\mu}$:

$$[E]_{R^W} = -ig_T T^a\bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L \cdot W^{a\mu}$$

$$(a = 1,2,3)$$

$$[E]_{R^W} = -ig_T j_{T^a}^\mu \cdot W^{a\mu}$$

En remplaçant par les quantités chargées, on obtient :

$$[E]_{R^W} = -ig_T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(j_{T^+}^\mu \cdot W^{+\mu} + j_{T^-}^\mu \cdot W^{-\mu}) + j_{T^3}^\mu \cdot W^{3\mu}\right]$$

Nota
Soulignons que dans cette énergie d'interaction de charge faible, seules les particules gauchères interviennent.

VIII.8.2 Les courants hyper portant une hypercharge faible Y_W

En analogie avec le courant électromagnétique, on définit un courant hyper portant une hypercharge faible Y_W :

$$j_{Y_W}^\mu = Y_{WL}\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + Y_{WR}\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

Nota
Rappelons que les particules gauchères et droitières n'ont pas la même hypercharge faible Y_W.
Par exemple, pour un quark u, on a un courant hyper :

$$j^{\mu}_{Y_W} = \frac{1}{3}\overline{u_L}\gamma^{\mu}u_L + \frac{4}{3}\overline{u_R}\gamma^{\mu}u_R$$

Puisqu'on a la relation entre les charges transportées par les courants et conservées par transformation de Jauge globale :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$$

On a la relation entre les courants conservés par transformation de Jauge globale :

$$\frac{j^{\mu}_{Y_W}}{2} = j^{\mu}_{Q} - j^{\mu}_{T^3}$$

VIII.8.3 Energie d'interaction hyper

On a l'énergie d'interaction hyper entre le courant hyper $j^{\mu}_{Y_W}$ et le potentiel B^{μ} :

$$[E]_{R^B} = -i\frac{g_Y}{2}(Y_{WL}\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\psi_L + Y_{WR}\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\psi_R)\cdot B^{\mu} = -ig_Y\frac{j^{\mu}_{Y_W}}{2}\cdot B^{\mu}$$

$$[E]_{R^B} = -ig_Y\frac{j^{\mu}_{Y_W}}{2}\cdot B^{\mu} = -ig_Y(j^{\mu}_{Q} - j^{\mu}_{T^3})\cdot B^{\mu}$$

Si on examine les énergies d'interactions :

- $[E]_{R^W} = -ig_T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(j^{\mu}_{T^+}\cdot W^{+\mu} + j^{\mu}_{T^-}\cdot W^{-\mu}) + j^{\mu}_{T^3}\cdot W^{3\mu}\right]$,
- $[E]_{R^B} = -ig_Y\frac{j^{\mu}_{B}}{2}\cdot B^{\mu} = -ig_Y(j^{\mu}_{Q} - j^{\mu}_{T^3})\cdot B^{\mu}$,

on reconnait dans :

- le terme $-ig_T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(j^{\mu}_{T^+}\cdot W^{+\mu} + j^{\mu}_{T^-}\cdot W^{-\mu})\right]$ la contribution des courants faibles chargés,
- les termes$-ig_Tj^{\mu}_{T^3}\cdot W^{3\mu}$ et $ig_Y(j^{\mu}_{Q} - j^{\mu}_{T^3})\cdot B$ la contribution de courants « neutres » respectivement de charge faible T^3 et d'hypercharge faible Y_W.

Toutefois, on ne distingue pas du premier coup d'œil ce qu'on détecte expérimentalement :

- un courant faible neutre $j^{\mu}_{T^0}$ qui interagit avec un boson Z^0 de potentiel $Z^{0\mu}$,
- un courant électromagnétique j^{μ}_{Q} qui interagit avec un photon γ de potentiel A^{μ} .

Pour cette raison, le Modèle électrofaible introduit l'angle dit de Weinberg.

VIII.8.4 Angle de Weinberg

Le Modèle électrofaible considère que les potentiels $W^{3\mu}$, B^{μ} sont des combinaisons linéaires des potentiels $Z^{0\mu}$, A^{μ} . Suivant les idées de S. Glashow, il définit une matrice de mélange entre les potentiels $W^{3\mu}$, B^{μ} et les potentiels $Z^{0\mu}$, A^{μ} .

On a la matrice de mélange :

$$\begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^{0\mu} \\ A^{\mu} \end{pmatrix}$$

θ_W est communément appelé l'angle de Weinberg.

Nota, rappel sur les associations quadrivecteurs potentiels et bosons
Le quadrivecteur potentiel $W^{3\mu}$ est associé au boson W^3.
Le quadrivecteur potentiel B^μ est associé au boson *B*.
Le quadrivecteur potentiel $Z^{0\mu}$ est associé au boson Z^0.
Le quadrivecteur potentiel A^μ est associé au photon γ.

Les 2 premiers bosons, W^3 et *B,* n'ont pas été observés expérimentalement. Les 2 suivants, Z^0 et γ, sont observés.

Expérimentalement, on mesure :

$$sin^2 \theta_W \approx 0{,}231$$

$$\theta_W \approx 28{,}7°$$

Nota
Intuitivement, l'angle de Weinberg θ_W peut s'interpréter comme la manifestation de la violation de parité par le boson Z^0. Z^0 réagit en favorisant les particules gauchères d'hélicité négative.

En substituant les expressions de $W^{3\mu}$ et B^μ en terme de Z^μ et de A^μ, on obtient pour les énergies d'interaction, contribution des courants « neutres » de charge faible T^3 et d'hypercharge faible Y_W :

$$[E]_{R^{B+W}} = -i\left[(g_T \sin\theta_W - g_{Y_W} \cos\theta_W) j^\mu_{T^3} + (g_Y \cos\theta_W) j^\mu_Q\right] \cdot A^\mu$$

$$-i\left[(g_T \cos\theta_W - g_Y \sin\theta_W) j^\mu_{T^3} - (g_Y \sin\theta_W) j^\mu_Q\right] \cdot Z^{0\mu}$$

VIII.8.5 Energie d'interaction électromagnétique

On en retire l'énergie d'interaction électromagnétique :

$$[E_{em}]_{R^{B+W}} = -i\left[(g_T \sin\theta_W - g_Y \cos\theta_W) j^\mu_{T^3} + (g_Y \cos\theta_W) j^\mu_Q\right] \cdot A^\mu$$

Le Modèle électrofaible cherche à retrouver l'énergie d'interaction électromagnétique usuellement définie :

$$[E_{em}]_{R^A} = -iej^\mu_Q \cdot A^\mu$$

On la reconnait si l'on pose les 2 relations entre les 3 charges élémentaires $e = g_Q, g_Y, g_T$:

$$e = g_Y \cos\theta_W$$

$$e = g_T \sin\theta_W$$

On remplace les charges élémentaires dans les énergies d'interaction (contribution des courants « neutres »), et on obtient :

$$[E]_{R^{B+W}} = -iej^\mu_Q \cdot A^\mu - i\frac{g_T}{\cos\theta_W}(j^\mu_{T^3} - sin^2 \theta_W j^\mu_Q) \cdot Z^{0\mu}$$

VIII.8.6 Relations entre les constantes de couplage, les charges élémentaires et l'angle de Weinberg

On rappelle les différentes relations entre les constantes de couplage, les charges élémentaires et l'angle de Weinberg que propose le Modèle électrofaible :

$$\frac{g_Y}{g_T} = tan\,\theta_W$$

$$\frac{1}{{g_Y}^2} + \frac{1}{{g_T}^2} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{{g_Q}^2}$$

$$\frac{1}{\alpha_Y} + \frac{1}{\alpha_T} = \frac{1}{\alpha_Q}$$

$$\alpha_Q = \alpha_B\, cos^2\,\theta_W$$

$$\alpha_Q = \alpha_{T^3} in^2\theta_W$$

$$\frac{{g_Y}^2 + {g_T}^2}{{g_Y}^2{g_T}^2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\frac{g_Y g_T}{\sqrt{{g_T}^2 + {g_Y}^2}} = e = g_Q$$

$$cos\,\theta_W = \frac{e}{g_Y} = \frac{g_T}{\sqrt{{g_Y}^2 + {g_T}^2}}$$

$$sin\,\theta_W = \frac{e}{g_T} = \frac{{g_Y}^2}{\sqrt{{g_Y}^2 + {g_T}^2}}$$

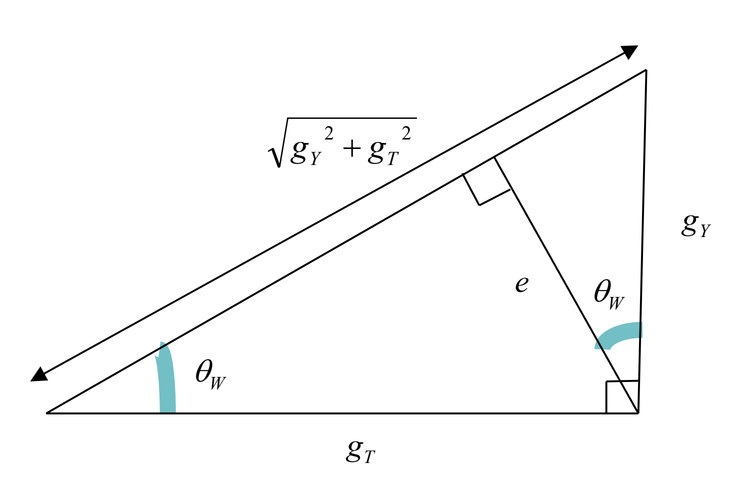


Figure 16 : charges élémentaires et angle de Weinberg

VIII.8.7 Courant faible neutre portant une charge faible T^0 interagissant avec le boson Z^0

On définit un courant faible neutre portant une charge faible T^0 interagissant avec le boson Z^0 :

$$j^{\mu}_{T^0} = j^{\mu}_{T^3} - sin^2\,\theta_W\, j^{\mu}_Q$$

$$j^{\mu}_{T^0} = \bar{\psi}_L\gamma^{\mu}(T^3 - sin^2\,\theta_W\, Q)\psi_L - \bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\, sin^2\,\theta_W\, Q\psi_R$$

On obtient en termes d'énergie d'interaction :

$$[E]_{R^{B+W}} = -iej_Q^\mu A^\mu - i\frac{g_T}{cos\,\theta_W} j_{T^0}^\mu Z^{0\mu}$$

On a la charge élémentaire g_{T^0} et la constante α_{T^0} de couplage :

$$g_{T^0} = \frac{g_T}{cos\,\theta_W} = \frac{e}{sin\,\theta_W\,cos\,\theta_W}$$

$$\alpha_{T^0} = \frac{\alpha_T}{cos^2\,\theta_W} = \frac{\alpha_Q}{sin^2\,\theta_W\,cos^2\,\theta_W}$$

Nota
Pour les leptons de 1ère génération, on a les courants faibles neutres interagissant avec le boson Z^0 :

$$j_{T^0}^\mu = (T^3 - sin^2\,\theta_W\,Q)\overline{e_L}\gamma^\mu e_L - sin^2\,\theta_W\,Q\overline{e_R}\gamma^\mu e_R$$

$$j_{T^0}^\mu = (T^3 + sin^2\,\theta_W)\overline{e_L}\gamma^\mu e_L + sin^2\,\theta_W\,\overline{e_R}\gamma^\mu e_R$$

$$j_{T^0}^\mu = T^3\,\bar{v}_L\gamma^\mu v_L$$

Pour les quarks de 1ère génération, on a les courants faibles neutres interagissant avec le boson Z^0 :

$$j_{T^0}^\mu = (T^3 - sin^2\,\theta_W\frac{2}{3})\overline{u_L}\gamma^\mu u_L + (T^3 + sin^2\,\theta_W\frac{1}{3})\overline{d_L}\gamma^\mu d_L$$

$$- sin^2\,\theta_W\frac{2}{3}\overline{u_R}\gamma^\mu u_R - sin^2\,\theta_W\frac{1}{3}\overline{d_R}\gamma^\mu d_R$$

VIII.8.8 Dérivée covariante réécrite en fonction des potentiels $W^{+\mu}$, $W^{-\mu}$, A^μ et $Z^{0\mu}$

On a la dérivée covariante :

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_Y\frac{Y_W}{2}\cdot B^\mu + ig_T T^a\cdot W^{a\mu}$$

avec $a = 1,2,3$

On la réécrit en fonction des potentiels $W^{+\mu}$, $W^{-\mu}$, A^μ et $Z^{0\mu}$:

$$D^\mu = \partial^\mu + i\sqrt{2}g_T(T^+\cdot W^{+\mu} + T^-\cdot W^{-\mu}) + ieQ\cdot A^\mu + ig_{T^0}(T^3 - sin^2\,\theta_W\,Q)\cdot Z^{0\mu}$$

VIII.9 Mécanisme de Brout Englert Higgs (BEH), attribuer une masse aux bosons et au fermions

On rappelle maintenant dans ses grandes lignes le mécanisme BEH qui permet d'attribuer une masse aux trois bosons massifs W^+, W^- et Z^0 , ainsi qu'aux fermions.

VIII.9.1 Matériaux supraconducteurs

Le mécanisme BEH s'inspire de la théorie de Vitaly Ginzburg - Lev Davidovitch Landau sur les matériaux supraconducteurs, où le champ magnétique $\vec{B}$ est expulsé de l'intérieur du matériau. Dans ce cas, le champ magnétique $\vec{B}$ n'a plus une portée infinie, puisqu'il est nul à l'intérieur du matériau supraconducteur.

Lors de l'étude du mésotron de Yukawa, on a déjà évoqué cette théorie. On suppose que la particule médiatrice associée au champ électromagnétique, en l'occurrence un photon γ, acquiert une masse dans le matériau supraconducteur. On a pour le champ magnétique :

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, exp^{-\frac{m_\gamma c}{\hbar}x} = \vec{B}_0 exp^{-\frac{2\pi}{\lambda}x}$$

avec m_γ la masse de la particule médiatrice γ associée au champ magnétique de faible portée dans le matériau supraconducteur.

On a la relation entre m_γ et la longueur d'onde λ qui représente la portée du champ magnétique à l'intérieur du matériau supraconducteur :

$$\frac{m_\gamma c}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Lorsque la portée λ du champ magnétique B diminue vers 0, la masse de γ tend vers l'infini.

C'est J. Goldstone, sur une suggestion d'Y. Nambu, qui a l'idée de transposer la théorie de Ginzburg-Landau en supraconductivité, aux théories de Jauge.

VIII.9.2 Eléments sur le mécanisme BEH

Pour transposer le modèle d'un matériau supraconducteur à tout l'Espace-Temps, on postule l'existence d'un champ scalaire présent partout, même dans le vide.

L'idée, c'est que le référentiel fondamental (celui qu'on peut appeler le vide quantique) possède un champ scalaire doté d'une fonction d'onde non pas nulle, mais égale à un doublet :

$$\phi_{vide} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix}$$

avec μ et λ des constantes indépendantes (rien à voir avec la longueur d'onde pour λ).

Nota : ainsi dans le Modèle Electrofaible, le référentiel fondamental R^0 ou vide quantique, possède une dysmétrie, quantitativement vers les distances de $10^{-16}cm$, cela afin d'attribuer une masse aux bosons de Jauge $W^\pm$, Z^0 .
Certains n'y verront qu'une « pirouette », car la question fondamentale c'est évidement, qu'est-ce qu'exactement R^0 ?

On rappelle le Lagrangien d'un méson scalaire de fonction d'onde ϕ utilisé dans l'interaction de Yukawa :

$$L_{meson}(\phi) = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi)$$

Soit φ le doublet de fonctions d'onde, représentant la particule médiatrice de type champ scalaire, particule médiatrice qu'on appelle le boson de Higgs. Ce doublet φ a pour limite $\varphi_{vide} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix}$.

Nota : on retrouve l'idée fondamentale de H. Yukawa qui associe une particule médiatrice, une fonction d'onde et un potentiel (ou un champ de Jauge).

Sur le modèle du méson scalaire de l'interaction de Yukawa, le Lagrangien du boson scalaire de Higgs s'écrit :

$$L_{Higgs}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi - V(\varphi)$$

avec $V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4$ le potentiel de self-interaction du boson de Higgs,
$M_H = \sqrt{2}\mu$ la masse du boson de Higgs.

Nota : soulignons que le boson de Higgs est donc défini comme un méson scalaire particule médiatrice de l'interaction forte de Yukawa.

VIII.9.3 Attribuer une masse aux bosons de Jauge

Le champ scalaire associé au boson de Higgs est couplé à l'interaction de Jauge. On obtient pour le Lagrangien du boson de Higgs dans le référentiel où on a annulé les champs de Jauge B^{μ} et $W^{a\mu}$:

$$\left[L_{Higgs}(\varphi)\right]_{R^{B+W}} = \frac{1}{2}D^{\mu}\varphi D_{\mu}\varphi - V(\varphi)$$

avec $D^{\mu}\varphi = \partial^{\mu}\varphi + ig_Y\frac{Y_W}{2}\cdot B^{\mu}\varphi + ig_T T^a\cdot W^{a\mu}\varphi$ la dérivée covariante du Modèle électrofaible qui s'applique aux particules possédant une charge faible non nulle.

On pose une hypercharge faible $Y_W = -1$ pour le boson de Higgs.

On obtient pour la dérivée covariante du doublet de fonctions d'onde du boson de Higgs :

$$D^{\mu}\varphi = \partial^{\mu}\varphi - i\frac{g_Y}{2}\cdot B^{\mu}\varphi + ig_T T^a\cdot W^{a\mu}\varphi$$

Lorsqu'on tend vers le vide, on a :

$$D^{\mu}\varphi_{vide} = D^{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\mu}{\lambda}\end{pmatrix}\right)$$

On prend pour les charge faibles $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ $(a = 1,2,3)$, avec σ^a les 3 matrices de Pauli.

On obtient pour la dérivée covariante :

$$D^{\mu}\varphi_{vide} = \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{\mu}{\lambda}\left(g_Y B^{\mu}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + g_T W^{1\mu}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + g_T W^{2\mu}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + g_T W^{3\mu}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$D^{\mu}\varphi_{vide} = \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{\mu}{\lambda}\begin{pmatrix}g_T W^{1\mu} - ig_T W^{2\mu}\\ g_Y B^{\mu} - g_T W^{3\mu}\end{pmatrix}$$

On obtient pour le Lagrangien du boson de Higgs :

$$\left[L_{Higgs}(\varphi_{vide})\right]_{R^{B+W}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2((g_Y B^{\mu} - g_T W^{3\mu})^2 + (g_T W^{1\mu} - ig_T W^{2\mu})^2$$

$$\left[L_{Higgs}(\varphi_{vide})\right]_{R^{B+W}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2((g_Y B^{\mu} - g_T W^{3\mu})^2 + (g_T)^2 W^{1\mu}W^1_{\mu} + (g_T)^2 W^{2\mu}W^2_{\mu}))$$

On prend comme précédemment :

$$W^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^{1\mu} + iW^{2\mu})$$

$$W^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^{1\mu} - iW^{2\mu})$$

$$A^{\mu} = \frac{g_Y B^{\mu} + g_T W^{3\mu}}{\sqrt{{g_T}^2 + {g_Y}^2}}$$

$$Z^{0\mu} = \frac{g_Y B^{\mu} - g_T W^{3\mu}}{\sqrt{{g_T}^2 + {g_Y}^2}}$$

Après quelques calculs, on en en déduit un Lagrangien des masses du type :

$$\left[L_{Higgs}(\varphi_{vide})\right]_{R^{B+W}} = \left[(\frac{g_T}{2}\frac{\mu}{\lambda})^2 W^{+\mu}W_{\mu}^{+} + (\frac{g_T}{2}\frac{\mu}{\lambda})^2 W^{-\mu}W_{\mu}^{-} + (\frac{1}{2}\sqrt{{g_T}^2 + {g_Y}^2}\frac{\mu}{\lambda})^2 Z^{0\mu}Z_{\mu}^{0}\right]$$

On identifie les termes dans le Lagrangien des masses, aux masses des bosons $W^{\pm}$ et Z^0 . On obtient les résultats ci-dessous.

Masse des bosons $W^{\pm}$:

$$M_{W^{\pm}} = \frac{g_T}{2}\frac{\mu}{\lambda}$$

Masse du boson Z^0 :

$$M_{Z^0} = \frac{1}{2}\sqrt{{g_T}^2 + {g_Y}^2}\frac{\mu}{\lambda}$$

Rapport des masses :

$$\frac{M_{W^{\pm}}}{M_{Z^0}} = \frac{g_T}{\sqrt{{g_T}^2 + {g_Y}^2}} = \frac{e}{g_Y} = cos\,\theta_W$$

A noter que les photons de potentiel A^{μ} sont éliminés de $\left[L_{Higgs}(\varphi_{vide})\right]_{R^{B+W}}$ et n'ont donc pas de masse.
Il n'est rien dit sur une masse éventuelle du boson B et on peut supposer à l'instar du photon, qu'il n'en a pas.

VIII.9.4 Calcul de $\frac{\mu}{\lambda}$ avec la constante de Fermi

A la limite du Modèle électrofaible, on a vu qu'on peut poser un lien avec la constante de Fermi :

$$\frac{{g_T}^2}{8{M_{W^{\pm}}}^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

Nota : Les bosons $W^{\pm}$ possèdent une masse non nulle et à priori un quadrivecteur énergie impulsion nul. En effet, on fait tendre le quadrivecteur énergie impulsion vers 0, afin de retrouver la constante de Fermi G_F.

Application numérique
On calcule :

$$\frac{\mu}{\lambda} = (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}} \approx (\sqrt{2} \times 1{,}166 \times 10^{-5})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\mu}{\lambda} \approx 246GeV$$

$$\frac{M_{W^\pm}}{g_T} \approx 123GeV$$

$$g_T \approx 0{,}65$$

$$M_{W^\pm} \approx 79{,}6GeV$$

$$M_{Z^0} = \frac{M_{W^\pm}}{\cos\theta_W} \approx \frac{79{,}6}{0{,}87} \approx 90{,}8GeV$$

A noter que le mécanisme BEH ne fait ici aucune prédiction sur les valeurs de μ et λ prises séparément et en conséquence sur la masse $M_H = \sqrt{2}\mu$ du boson de Higgs.

Nota : Le Modèle Standard prévoit théoriquement (en 2022) une masse de 91,187GeV pour le boson Z^0 et une masse de 80,357GeV pour les bosons $W^\pm$. Pour ces derniers, la masse mesurée et publiée dans des travaux en avril 2022 est de l'ordre de 80,433GeV.

VIII.9.5 Attribuer une masse aux leptons

Le mécanisme BEH permet également d'attribuer une masse aux quarks et aux leptons. On explicite seulement ici le cas des électrons, le cas le plus simple.

On rappelle l'interaction de Yukawa entre un méson scalaire (dit champ scalaire de fonction d'onde φ) et un fermion (dit champ de Dirac de fonctions d'onde ψ) :

$$L_{Yukawa}(\varphi,\psi) = -g_l\bar{\psi}\varphi\psi$$

avec g_l une constante de couplage arbitraire.

Le mécanisme BEH utilise une interaction de Yukawa qui relie les composantes gauche et droite des doublets de $SU(2)_T$:

$$L_{Yukawa}(\varphi,\psi) = -g_l(\overline{\psi_L}\varphi\psi_R +_l \overline{\psi_R}\varphi^\dagger\psi_L)$$

Dans le cas d'un couplage entre un boson de Higgs (dit champ scalaire de fonction d'onde φ_{vide}) et des doublets de leptons (dit champ de Dirac), on a :

$$L_{H,Lepton} = -g_l(\overline{\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L}\varphi_{vide}e_R + \overline{e_R}\varphi_{vide}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L)$$

avec $\phi_{vide}^\dagger = \phi_{vide} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\mu}{\lambda}\end{pmatrix}$

$$L_{H,Lepton} = -\frac{g_l}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\lambda}(\overline{\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L}e_R + \overline{e_R}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L)$$

L'électron acquiert une masse de :

$$m_e = \frac{g_l}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\lambda}$$

VIII.10 Le boson de Higgs H^0, une particule composite ?

VIII.10.1 Les bosons, des particules composites ?

Les bosons ayant un spin entier et les fermions un spin demi entier, certains physiciens font l'hypothèse que les bosons sont en fait des particules composées de 2 fermions, dont les spins demi-entiers s'additionnent pour donner un spin entier.
Cela permettrait de comprendre que les bosons ne suivent pas le principe d'exclusion de Pauli, puisque dans ce cas, ils forment un système et à l'intérieur de ce système, les deux fermions suivent bien le principe d'exclusion de Pauli.

Certains bosons sont effectivement présentés aujourd'hui comme des particules composites, comme les mésons (formés d'un quark et d'un antiquark) ou les pairs de Cooper (formées de 2 électrons). Les autres bosons, comme les photons ne sont généralement pas présentés comme des particules composites. On regarde maintenant ce qu'il pourrait en être du boson de Higgs.

VIII.10.2 Rappel des principales caractéristiques du boson de Higgs

Le boson de Higgs H^0 possède les caractéristiques suivantes, il est :

- de spin entier (un boson), avec un spin nul :(S, S^3) =(0,0),
- de charge électrique nulle,
- de type méson, particule médiatrice de l'interaction forte selon le modèle de H. Yukawa. Il possède une masse, expliquant ainsi la portée limitée de l'interaction forte dans l'Espace. En tant que méson de charge électrique nulle, on peut s'attendre à une charge forte ou isospin fort égale à (I, I^3) =(1,0).
  Soulignons néanmoins que le Modèle Standard postule pour H^0 une charge forte ou de couleur nulle, et qu'il n'est pas présenté comme une particule composite comme les autres mésons,
- de type égal à sa propre antiparticule,
- de type méson scalaire (un méson dit scalaire possède $S = 0$ et $J^P = 0^+$, c'est-à-dire $P = +1$),
- de charge faible non nulle $(T, T^3) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, c'est pour cela qu'il est sujet à l'interaction faible et qu'il se couple avec les bosons $W^{\pm}$ et Z^0 ,
- d'hypercharge faible non nulle ($Y_W = 1$ ou $Y_W = -1$ suivant les hypothèses de départ), c'est pour cela qu'il se couple avec le boson B.

Sur les 4 premières caractéristiques, on peut rapprocher H^0 du pion π^0. Il s'en distingue sur :

- la parité (π^0 est un méson pseudo-scalaire, avec $S = 0$ et $J^P = 0^-$, c'est-à-dire $P = -1$),
- la charge faible non nulle,
- l'hypercharge faible non nulle.

Ils ont tous deux des masses relativement proches : environ 134,98 MeV.c^{-2} pour π^0 et environ 125,18 MeV.c^{-2} pour H^0.

VIII.10.3 Spéculation sur des bosons de Higgs

Si l'on s'écarte du Modèle Standard, qui voit H^0 comme une particule élémentaire, on peut proposer une analogie du type entre H^0 et π^0 pour l'isospin fort, tous 2 alors des particules composites :

$$\left|I = 1, I^3 = 0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = \frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle + (\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = -\frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u; \bar{u}\rangle + \left|d; -\bar{d}\right\rangle) = |\pi^0\rangle$$

$$\left|I = 1, I^3 = 0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = \frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = -\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\left|i = \frac{1}{2}, i^3 = -\frac{1}{2}; i' = \frac{1}{2}, i^{3\prime} = \frac{1}{2}\right\rangle\right) = |H^0\rangle$$

On note que les particules liées seraient toutefois différentes pour H^0 et π^0.

On peut aussi suggérer l'existence de 3 bosons de Higgs H^+, H^-, H^0 en analogie avec les pions π^+, π^-, π^0.

On aurait les tableaux suivants :

Pions	(S, S^3)	(I, I^3)	(T, T^3)	Q	Y_W
π^+	(0,0)	(1,1)	(0,0)	$+1$	2
π^-	(0,0)	$(1, -1)$	(0,0)	-1	-2
π^0	(0,0)	(1,0)	(0,0)	0	0

Higgs	(S, S^3)	(I, I^3)	(T, T^3)	Q	Y_W
H^+	(0,0)	(1,1)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+1$	+3
H^-	(0,0)	$(1, -1)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	-1	-1
H^0	(0,0)	(1,0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	1

VIII.11 Analogies entre les 3 interactions du Modèle électrofaible

VIII.11.1 Interrogations sur le boson *B*

Le Modèle électrofaible apporte peu d'informations sur le boson B. A priori, ce boson B ne doit pas posséder de masse puisque celle-ci n'est pas calculée via le mécanisme BEH. Tout comme le photon γ, le boson B possède vraisemblablement une impulsion non nulle. Dans le prochain mémoire, on proposera également qu'il possède une charge électrique.

Le boson B est la particule médiatrice d'une interaction appelée ici hyper. Rien n'est dit sur la portée de l'interaction hyper. Mais si la masse du boson B est bien nulle, on peut supposer que la portée de l'interaction hyper soit infinie comme celle de l'interaction électromagnétique ou de l'interaction gravitationnelle.

Nota, un rapport entre le boson *B* et le boson *X17* ?
Dans les années 2010, dans le cadre de recherches sur la matière noire (postulée suite à un non-respect de la gravitation newtonienne dans les Galaxies), le physicien hongrois Attila Krasznahorkay et ses collègues de l'ATOMKI (*Atomki Nuclear Research Institute*) bombardent du lithium 7 ${}^7_3Li$ avec des protons. Cela crée du béryllium 8 instable (ou excité) ${}^8_4Be^*$ qui se désintègre en :

$${}^8_4Be^* \rightarrow {}^8_4Be + e^- + e^+$$

Dans un articlé signé en 2015, pour expliquer lors de cette désintégration, un angle de 140° entre l'électron et le positron, ainsi qu'un dégagement d'énergie de 17 MeV, l'équipe hongroise postule l'existence d'une nouvelle particule *X17* de masse 17 MeV, avec les désintégrations intermédiaires :

$${}^8_4Be^* \rightarrow {}^8_4Be + X17$$
$$X17 \rightarrow e^- + e^+$$

En 2016, le physicien Jonathan L. Feng suggère que cette particule ou boson *X17* puisse être la particule médiatrice d'une cinquième interaction fondamentale de très grande portée.
Enfin, en 2019, l'équipe hongroise obtient des résultats analogues avec non plus du béryllium, mais de l'hélium ${}^4_2He^*$ et une particule de masse quasi identique à celle du *X17*.

Ce rappel des évènements interroge sur un éventuel lien entre X17 et le boson B du Modèle Electrofaible, qui reste un « objet technique » et non découvert.

Soulignons que le boson *X17* possède des caractéristiques à priori différentes de celles du boson B, en particulier une charge électrique nulle pour le *X17* et à priori pas pour le B.
Néanmoins, l'hypothèse que le boson B possède une masse nulle et l'observation que le boson *X17* possède une masse faible, les rapprochent tous deux dans l'idée qu'ils véhiculeraient une nouvelle interaction de portée infinie, ou tout du moins de très grande portée. Cette interaction aurait des conséquences sur la gravitation, notamment à l'échelle des Galaxies.
Affaire à suivre.

VIII.11.2 Analogies charge électrique Q, charge faible T^3 et hypercharge faible Y_W

On rappelle dans le tableau ci-dessous les analogies entre la charge électrique Q, la charge faible T^3 et l'hypercharge faible Y_W que l'on retrouve dans le Modèle électrofaible ($\mu = t, x, y, z$).

Nombre quantique conservée lors d'une transformation de Jauge globale et générateur de la transformation	**Charge Q**	**Charge faible T^3**	**Hypercharge faible Y_W**
Interaction associée	**Interaction électromagnétique** Porté infinie	**Interaction faible** Porté faible	**Interaction hyper** Porté infinie ?
Charge fonction de nombres quantiques	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{St}{2}$		$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$
Constante de couplage, charge élémentaire	$\alpha_{em} = \alpha_Q = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\ e = g_Q$	$\alpha_T = \frac{{g_T}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	$\alpha_Y = \frac{{g_Y}^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$
Particule médiatrice de l'interaction	Photon γ transportant un spin S (quantité quantique à impulsion)	Bosons W_1, W_2, W_3 transportant une quantité quantique massique	Boson B transportant une quantité quantique à impulsion ?
Groupe de rotations, transformations de Jauge globale et locale	$U(1)_Q$	$SU(2)_T$	$U(1)_{Y_W}$
Transformation de Jauge locale sur la fonction d'onde	$\psi \to exp(\,ieQ\alpha(x))\psi$	$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \to exp(\,ig_T T^a \cdot \alpha_a(x)) \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} a = 1,2,3$	$\psi \to exp(\,ig_Y Y_W \alpha(x))\psi$
Dérivée covariante de la transformation de Jauge locale	$D^\mu = \partial^\mu + ieQ \cdot A^\mu$	$D^\mu = \partial^\mu + ig_T T^a \cdot W^{a\mu}$ $a = 1,2,3$	$D^\mu = \partial^\mu + ig_Y \frac{Y_W}{2} \cdot B^\mu$

Lagrangien des fermions	$i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial^{\mu} + ieQ \cdot A^{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}_L\gamma_{\mu}(\partial^{\mu} + ig_T T^a \cdot W^{a\mu})\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_L$ $a = 1,2,3$	$i\bar{\psi}_L\gamma_{\mu}(\partial^{\mu} + ig_Y \frac{Y_W}{2} \cdot B^{\mu})\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_L$ $i\bar{\psi}_R\gamma_{\mu}(\partial^{\mu} + ig_Y \frac{Y_W}{2} \cdot B^{\mu})\psi_R - m\bar{\psi}_R\psi_R$
Quadrivecteurs potentiels liés aux particules médiatrices	A^{μ}	$W^{1\mu}, W^{2\mu}, W^{3\mu}$	B^{μ}
Quadrivecteurs courants	$j_Q^{\mu} = Q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$	$j_{T^a}^{\mu} = T^a\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\psi_L$ $a = 1,2,3$	$j_{Y_W}^{\mu} = Y_W\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\psi_L + Y_W\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\psi_R$

VIII.12 Conclusion, sur les particules médiatrices utilisées par le Modèle électrofaible

Le Modèle électrofaible fait intervenir 3 types de particules médiatrices (si on ne compte pas le boson de Higgs servant à attribuer une masse).

D'abord, le photon γ possédant une impulsion non nulle et une masse nulle. Ce photon γ est la particule médiatrice de l'interaction électromagnétique de portée infinie (d'où la masse nulle du photon). Il est porteur d'un spin S, qui échangé avec un fermion, génère un changement du niveau d'énergie du fermion et un déplacement de sa charge électrique Q.

Ensuite, les bosons W^1, W^2, W^3 possédant une impulsion nulle et une masse non nulle. Ces bosons W^1, W^2, W^3 sont les particules médiatrices de l'interaction faible de portée limitée (d'où la masse non nulle de ces bosons suivant les idées de H. Yukawa).

Enfin, le boson B possédant, à priori, une impulsion non nulle et une masse nulle. Il est la particule médiatrice d'une interaction appelée ici hyper.

Dans le 3ème mémoire, on a proposé plusieurs équations sources champs s'appliquant à la gravitation. En particulier, on a proposé 4 équations avec des sources orientées dans l'Espace : les 2 premières avec des sources construites à partir de densité linéique d'impulsion, les 2 suivantes avec des sources construites à partir de densité linéique de masse.

Après ce 4ème mémoire, qui est essentiellement un cours de la physique des particules au 20ème siècle, le 5ème mémoire sera à nouveau spéculatif. Son objet sera d'examiner s'il est possible de rapprocher 3 de ces 4 équations sources champs avec les 3 types de particules médiatrices intervenant dans le Modèle électrofaible :

- le photon γ avec une impulsion,
- le bosons B avec une impulsion,
- les bosons W^1, W^2, W^3 avec une masse.

Pour la dernière équation source champ faisant intervenir une masse, on examinera s'il est possible de la rapprocher de particules médiatrices massiques de l'interaction forte, à portée également limitée.

Bibliographie du mémoire 4

Sur la diffusion d'Ernest Rutherford

[1] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007. Téléchargeable sur Internet sur le site http://www.sciences.ch/htmlfr/accueil.php.

[2] Wikipedia, Expérience de Rutherford

Sur l'isospin de Heisenberg

[3] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL. Téléchargeable sur Internet sur le site http://www.sciences.ch/htmlfr/accueil.php.

[4] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007.

Sur la théorie de Fermi sur l'interaction faible

[5] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL.

[6] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007.

Sur le potentiel de Yukawa

[7] Vincent Isoz, site internet sur la physique et les mathématiques, http://www.sciences.ch/htmlfr/accueil.php.

[8] Wikipedia, Potentiel de Yukawa

Sur le champ scalaire

[9] Mikhaïl Shaposhnikov et Sven Bachmann, Champs Quantiques Relativistes. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

Sur les groupes $SU(n)$ et les transformations de Jauge

[10] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL.

[11] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007.

[12] Wikipedia, Groupes de Lie

Sur les transformations de Jauge locale de Yang-Mills

[13] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL

[14] B. Gosselin-Cliche, Théorie de Jauge de Yang-Mills

Sur la violation de parité de Lee Yang Wu et l'hélicité négative du neutrino de Golhaber

[15] Johann Collot, masses et oscillations de neutrinos, UJF Grenoble, années 2004-2005

[16] Johann Collot, Symétries discrètes PCT règles de sélection, UJF Grenoble, années 2007-2008

[17] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007

Sur les opérateurs d'échelle

[18] Wikipedia, Moment cinétique (mécanique quantique)

Sur le Modèle électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam

[19] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL.

[20] Johann Collot, Edification de la théorie des interactions électrofaibles, UJF Grenoble, années 2007-2008
[21] Sheldon Glashow, The charm of Physics, The American Institute of Physics, 1991
[22] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007
[23] P. Vilain, Les Courants neutres et les Particules charmées en Physique du Neutrino. Université Libre de Bruxelles, Avril 2005.
[24] Wikipedia, Yukawa interaction

Table des matières

Mémoire 5 L'effet d'Einstein et la parabole de Bohr

Objectifs du mémoire
Bien qu'il porte les noms d'Einstein et de Bohr, ce 5ème mémoire s'intéressera surtout aux travaux des années 1950-1970 et sera à nouveau spéculatif. On s'intéressera surtout aux 4 interactions suivantes présentes dans le Modèle standard : interactions électromagnétique, hyper, faible et forte (avec deux interactions de portée infinie et deux de portée finie).

On mettra de côté le champ de Higgs, qui selon nous, serait davantage à rapprocher de l'interaction forte, puisque le boson de Higgs intervient tel un méson médiateur de l'interaction forte, pour attribuer une masse aux particules du Modèle électrofaible. Quant à l'interaction gravitationnelle, on reviendra sur son cas à la fin de ce mémoire.

Tout au long de ce 5ème mémoire, on essaiera essentiellement de montrer qu'il existe une plus grande analogie entre la première interaction : électromagnétique et les 3 autres : hyper, faible et forte, que ne le présente usuellement le Modèle standard.
Ainsi, son objectif principal sera de généraliser l'effet photoélectrique d'Einstein et la parabole de Bohr aux 4 interactions citées ci-dessus.

Pour cela, on cherchera d'abord, pour chacune des 4 interactions, un nombre quantique analogue à celui du nombre de spin S^a $(a = 1,2,3)$ intervenant dans l'interaction électromagnétique. On qualifiera ces 4 nombres quantiques de « source champ », car pour chacun, on suggéra des appariements avec des équations sources champs de la gravitation proposées dans le 3ème mémoire. On verra que 2 nombres quantiques sont de type impulsion et que les 2 autres soient de type masse.

On reliera ensuite chaque nombre quantique « source champ » à :
- des réactions entre particules de type fermion qui inversent ou modifient ces nombres quantiques source champ,
- des particules médiatrices porteuses de ces 4 nombres quantiques source champ : photon γ et boson B, tous deux de type boson à impulsion, bosons W^a et gluons G^a, tous deux de type boson à énergie massique.

Enfin, à partir de chaque nombre quantique source champ, on définira un nombre quantique de charges X, complémentaire du nombre quantique source champ et fonction des 3 autres nombres quantiques source champ.

Au-delà des idées spéculatives avancées ici, ce mémoire sera également l'occasion de s'intéresser à l'histoire des idées en physique. On commencera par un parallèle entre la loi des aires de J. Kepler (1609), les notions de moment cinétique, puis de spin quantique proposé par S. Goudsmit et G. Uhlenbeck (1925). On évoquera les propositions de nouveaux nombres quantiques que sont l'hypercharge Y ou l'étrangeté St (K. Nishijima et M. Gell-Mann dans les années 1950). On s'intéressera également au Modèle des quarks (M. Gell-Mann et G. Zweig de 1961 à 1964), modèle fondé sur l'interaction forte entre les particules du noyau (les hadrons).
On parlera ensuite de l'angle de N. Cabibbo (1963), angle permettant de décrire à partir des quarks up et down les courants faibles neutres et chargés de fermions interagissant avec les bosons faibles. On traitera également du mécanisme de S. L. Glashow-J. Illiopoulos-L. Maiani, mécanisme qui imagine l'existence d'un 4ème quark, le quark c et qui fait intervenir un courant faible neutre.

A travers les travaux de Bruno Pontecorvo et Ziro Maki (à partir des années 1960), on s'intéressera aux oscillations des neutrinos : hypothèse de plusieurs familles de neutrinos, existence d'un angle (appelé aujourd'hui angle de Pontecorvo semblable pour les leptons à celui de Cabibbo pour les quarks). On soulignera les ressemblances entre quarks et leptons quant aux interactions faible et hyper.

Enfin, on évoquera la Chromodynamique quantique, théorie décrivant l'interaction forte et fondée sur la charge forte de couleur générateur du groupe $SU(3)_{couleurs}$. On abordera également les notions de confinement et de liberté asymptotique proposées en 1973 par H. David Politzer, Frank Wilczek et David Gross.

Chapitre I Relier l'équation source champ de Broglie et le nombre quantique de spin S

Objet du chapitre

On cherche à montrer le lien entre l'équation source champ de Broglie $\vec{p}^x = \hbar \vec{K}_{ty}^{1/x}$ et le spin S.
Plus généralement on souhaite proposer que :

- l'invariance de l'équation source champ de Broglie

correspond à :

- la conservation des moments cinétiques orbitaux et de spin lors des réactions entre particules.

I.1 Rappels : de la 2ème loi de Kepler, au moment cinétique orbital et au moment magnétique orbital, puis au spin

On effectue ici quelques rappels sur les relations existantes entre la loi des aires de Kepler et la notion de moment cinétique rencontré en gravitation, de moment magnétique rencontré en électromagnétisme et de spin rencontré en physique quantique.

I.1.1 2ème loi de Kepler

En 1609, Johannes Kepler propose la 2ème loi de Kepler (appelée aussi loi des Aires) qui s'applique au mouvement des planètes dans le ciel.

Soit $A(t)$ l'aire de la surface balayée par un rayon vecteur $\vec{r}$. Suivant la 2ème loi de Kepler, des aires égales $A(t)$ sont balayées dans des temps égaux. Par exemple, pour une planète en orbite autour du Soleil, cela signifie qualitativement que sa vitesse est d'autant plus grande que sa distance au Soleil est d'autant plus courte.

On définit une vitesse aérolaire, dérivée de l'aire $A(t)$ par rapport au temps :

$$\frac{dA(t)}{dt}$$

En utilisant la 2ème loi de Kepler, on obtient une vitesse aérolaire constante :

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = const$$

I.1.2 Relation entre la vitesse aréolaire $\frac{dA(t)}{dt}$ et le moment cinétique orbital $\vec{L}$

On définit un moment cinétique orbital suivant z :

$$\vec{L}^z = \vec{y} \wedge \vec{p}^x$$

Nota 1
x et y définissent ici un plan spatial, y est le composante radiale et x la composante tangentielle d'un mouvement de rotation.

Nota 2
Usuellement, le terme de moment cinétique orbital est plutôt réservé à la mécanique quantique. En mécanique classique, on parle simplement de moment cinétique. On l'utilise ici pour montrer la proximité entre la notion classique et la notion quantique.

On obtient la relation entre la vitesse aréolaire et le moment cinétique orbital en multipliant la vitesse aréolaire par deux fois la masse du corps étudié :

$$\vec{L}^z = 2m\frac{dA(t)}{dt}\vec{z}$$

Dans le cas d'une masse *m* constante, la 2ème loi de Kepler peut se réécrire avec le moment cinétique :

$$\vec{L}^z = 2m\frac{dA(t)}{dt}\vec{z} = const$$

et traduit donc la conservation au cours du temps d'une quantité constante, le moment cinétique.

Nota, rappel sur la conservation du moment cinétique dans le cas d'un mouvement à force centrale
Un mouvement à force centrale est le mouvement d'un point matériel soumis à une force passant par un point fixe O. C'est par exemple le cas de la Terre, soumise à la force centrale gravitationnelle du Soleil, dans les modèles de Kepler et Newton.
Dans le cas d'un mouvement à force centrale, on a conservation du moment cinétique. On a en effet :

$$\vec{L}^z = \vec{O}M \wedge \vec{p}$$

En dérivant par rapport au temps, on a :

$$\frac{d\vec{L}^z}{dt} = (\frac{d\vec{O}M}{dt} \wedge \vec{p}) + (\vec{O}M \wedge \frac{d\vec{p}}{dt})$$

$$\frac{d\vec{L}^z}{dt} = (\vec{v} \wedge \vec{p}) + (\vec{O}M \wedge \vec{F})$$

$\vec{v} \wedge \vec{p} = \vec{0}$, car $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont colinéaire
$\vec{O}M \wedge \vec{F} = \vec{0}$, car $\vec{O}M$ et $\vec{F}$ sont colinéaires, car le mouvement est à force centrale

On obtient :

$$\frac{d\vec{L}^z}{dt} = \vec{0}$$

Le moment cinétique $\vec{L}^z$ est donc constant au cours du mouvement.

I.1.3 Relations entre la vitesse aréolaire $\frac{dA(t)}{dt}$, le moment cinétique orbital $\vec{L}$ et le moment magnétique orbital $\vec{\mu}_L$

On obtient la relation entre la vitesse aréolaire $\frac{dA(t)}{dt}$ et le moment magnétique orbital $\vec{\mu}_L$ en multipliant la vitesse aréolaire par la charge du corps étudié (un signe $-$ s'introduit) :

$$\vec{\mu}_L = -q\frac{dA(t)}{dt}\vec{z}$$

On a la relation entre moment magnétique orbital et moment cinétique orbital :

$$\vec{\mu}_L = -\frac{q}{2m}\vec{L}$$

$\vec{\mu}_L = \gamma\vec{L}$ où $\gamma = -\frac{q}{2m}$ le rapport gyromagnétique du dipôle magnétique considéré.

Nota, rappel sur le dipôle magnétique
Un dipôle magnétique peut se visualiser comme un petit aimant. On le caractérise par un moment magnétique $\vec{\mu}_L$. En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, le dipôle magnétique est soumis à un couple $\vec{\tau}$ et à une force $\vec{F}$, auxquels on associe une énergie potentielle Ep.

On a les relations :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_L \wedge \vec{B}$$

$$Ep = -\vec{\mu}_L \cdot \vec{B}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} Ep = -\vec{\nabla}(\vec{\mu}_L \cdot \vec{B})$$

Le petit aimant a tendance à s'orienter suivant le champ magnétique $\vec{B}$ pour minimiser son couple $\vec{\tau}$ et maximiser son Ep (en valeur absolue).

I.1.4 Relation entre le moment cinétique orbital $\vec{L}$ et le moment magnétique orbital $\vec{\mu}_L$, cas de l'électron

L'électron du modèle de Bohr possède un moment cinétique orbital $\vec{L} = \hbar\vec{z}$ et un moment magnétique orbital $\vec{\mu}_{L-Boh}$ appelé le magnéton de Bohr-Procopiu (en référence à Niels Bohr et Ștefan Procopiu).

On a la relation entre le moment cinétique orbital et le moment magnétique orbital :

$$\vec{\mu}_{L-Bohr} = \frac{e}{2m_e}\vec{L} = \frac{e\hbar}{2m_e}\vec{z}$$

$$\gamma_e = \frac{e}{2m_e}$$

I.1.5 Passage du moment cinétique orbital $\vec{L}$ au moment cinétique de spin $\vec{S}$

Dans le mémoire 2, on a évoqué que le passage d'une rotation orbitale à une rotation sur soi-même (rotation de spin) se fasse via un changement de référentiels (par exemple d'un référentiel terrestre à un référentiel solaire).

On peut imaginer que le passage d'un moment cinétique orbital $\vec{L}$ à un moment cinétique de spin $\vec{S}$ se fasse également via un changement de référentiels.

On s'attend donc à une même relation entre le moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S$ et le moment cinétique de spin $\vec{S}$ pour une particule élémentaire. C'est le cas pour l'électron avec une bonne approximation. On va regarder cela dans le prochain paragraphe.

Nota

Dans le cas d'une particule ponctuelle, le rayon intervenant dans le moment cinétique de spin n'a pas vraiment de sens. Cependant, au lieu de penser rayon r, on peut penser longueur d'onde λ et vecteur d'onde K comme le fait la mécanique ondulatoire.

I.1.6 Relation entre le moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S$ et le moment cinétique de spin $\vec{S}$, cas de l'électron, facteur de Landé g

En mécanique quantique, le moment cinétique de spin $\vec{S}$ est défini avec un facteur $\frac{1}{2}$ supplémentaire par rapport au moment cinétique orbital $\vec{L} = \hbar\vec{z}$. On a :

$$\vec{S} = \pm\frac{1}{2}\hbar\vec{z}$$

Pour expliquer :

- ce 1er fait d'un facteur $\frac{1}{2}$ supplémentaire (cas de l'électron),

- ainsi qu'un 2ème fait concernant d'autres particules (comme le proton ou le neutron), qui mesure un rapport entre le moment magnétique de spin et le moment cinétique de spin, ne dépendant pas uniquement de la masse et de la charge de la particule,

Alfred Landé introduit en 1921 un facteur g :

$$\vec{\mu}_S = g\frac{q}{2m}\vec{S}$$

Pour l'électron, on a un facteur de Landé comme à l'attendu : $g \approx -2$.

On trouve :

$$\vec{\mu}_S \approx \frac{e\hbar}{2m_e}\vec{z}$$

similaire au magnéton de Bohr $\vec{\mu}_{L-Boh} = \frac{e\hbar}{2m_e}\vec{z}$.

Nota 1
L'équation d'onde de l'électron de Dirac prédit $g = -2$. La valeur expérimentale est en fait $g \approx -2{,}002319$. Pour l'expliquer, on parle en Electrodynamique quantique relativiste de vide quantique avec l'apparition de particules virtuelles.

On introduit une anomalie a avec :

$$g = 2(1 + a)$$

On a un développement en série de puissance de la constante de couplage électromagnétique :

$$a = A_1\alpha_Q + A_2\alpha_Q^2 + A_3\alpha_Q^3 + o(\alpha_Q^3)$$

Le développement en série est symbolisé par les particules virtuelles. Cela permet de calculer A_1, A_2, A_3, etc.

Nota 2
Le proton possède un facteur de Landé $g \approx +5{,}586$ et le neutron $g \approx -3{,}826$, contraire donc à l'attendu qui se vérifie pour l'électron.
Pour expliquer cela, on peut supposer que proton et neutron (sujets à l'interaction forte) ne sont pas des particules élémentaires mais des particules composites. C'est l'un des arguments forts au Modèle des quarks.

I.2 Associer l'équation source champ de Broglie et les moments cinétiques orbital et de spin

I.2.1 Quantification du moment cinétique orbital *L*

On donne la quantification proposée par N. Bohr du moment cinétique orbital dans son modèle de l'électron :

$$L^z = yp^x = n\hbar$$

avec n un entier

Dans les lignes qui suivent, on rappelle les idées proposées par L. de Broglie dans son modèle de l'onde électron, afin d'expliquer la quantification du moment cinétique orbital de N. Bohr.

D'après l'équation source champ de Broglie, on a :

$$p^x = \frac{h}{\lambda} = \hbar K^{1/x}$$

On se place dans le référentiel R^{Ω} où l'électron est immobile et où il est interprété comme une onde stationnaire circulaire. Pour avoir une interférence constructive de cette onde, L. de Broglie pose la condition :

$$\lambda = \frac{l}{n} = \frac{2\pi y}{n}$$

ou $K^{1/x} = \frac{n}{y}$

Nota sur le vecteur d'onde
Puisqu'on raisonne sur une onde circulaire (et non pas rectiligne), on n'a pas $K^{1/x}$ fonction de $\frac{1}{x}$ mais de $\frac{1}{y}$, c'est-à-dire du rayon.

On obtient :

$$p^x = \hbar K^{1/x} = n\hbar\frac{1}{y}$$

$$p^x = \frac{h}{\lambda} = n\hbar\frac{1}{y}$$

On retrouve la quantification de Bohr :

$$L^z = yp^x = n\frac{p^x}{K^{1/x}} = n\hbar$$

I.2.2 Définir le moment cinétique orbital à partir de l'équation source champ de Broglie

D'après ce qui précède, on note que l'équation source champ de Broglie

$$\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = \frac{\hbar\vec{K}^{1/x}_{ty}}{\partial t}$$
$$\vec{p}^x = \hbar\vec{K}^{1/x}_{ty}$$

est associée à la quantification du moment cinétique orbital.

On propose de définir le moment cinétique orbital L à partir de l'équation source champ de Broglie. On obtient les 3 composantes du moment cinétique orbital dans le cas où $n = 1$:

$$L^z = \hbar^z = \frac{\vec{p}^x}{\vec{K}^{1/x}_{ty}}$$

$$L^x = \hbar^x = \frac{\vec{p}^y}{\vec{K}^{1/y}_{tz}}$$

$$L^y = \hbar^y = \frac{\vec{p}^z}{\vec{K}^{1/z}_{tx}}$$

Nota 1

Suivant la définition classique du moment cinétique $\vec{L}^z = \vec{y} \wedge \vec{p}^x = \vec{y} \wedge m\vec{v}^x$, c'est une vitesse linéaire de rotation $\vec{v}^x$ et donc un vecteur rotation dans un plan spatial $\vec{\Omega}$, qui intervient dans l'expression du moment cinétique.
Avec cette nouvelle définition du moment cinétique, c'est un vecteur rotation généralisé dans un plan spatiotemporel $\vec{K}$, qui intervient dans l'expression du moment cinétique

Nota 2
Cette nouvelle définition permet d'éclaircir la quantification en mécanique quantique du moment cinétique orbital, alors qu'en mécanique classique le moment cinétique orbital n'a aucune raison d'être quantifié.

I.2.3 Même notion pour moment cinétique orbital *L* et moment cinétique de spin *S*

Précédemment, on a suggéré l'idée que moment cinétique orbital L et moment cinétique de spin S correspondent à une même notion avec changement de référentiels.

Cette idée d'une même notion regroupant L et S, se retrouve également au niveau des opérateurs. En mécanique quantique, on définit un moment cinétique total, operateur vectoriel noté $\hat{J}$, somme d'un moment cinétique orbital $\hat{L}$ et d'un moment cinétique de spin $\hat{S}$:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

L'idée que L et S corresponde à une même notion, se retrouve également dans le modèle de l'électron de Bohr Schrödinger Pauli lorsqu'un photon (doté d'un moment cinétique de spin S) réagit avec un électron et modifie le moment cinétique orbital L de ce dernier (ainsi que son orbite) lors d'une transition énergétique.

I.2.4 Quantification du moment cinétique de spin

Dans le modèle de l'électron de Bohr, seul le moment cinétique orbital L est quantifié (pas le moment cinétique de spin S qui n'est pas inclus dans le modèle).
Suivant l'idée que L et S correspondent à une même notion, on doit avoir également une quantification du spin S. C'est ce qu'on observe avec :

$$S^z = n\frac{\hbar}{2}$$

avec $n = \pm 1$ entier positif ou négatif

Nota
Dans le modèle de l'électron de Broglie Schrödinger, il y a en fait trois nombres quantiques :
- le nombre quantique principal *n*, qui correspond à celui du modèle de Bohr,
- le nombre quantique secondaire *l* qui correspond à la quantification du module du moment cinétique orbital,
- le nombre quantique magnétique *m* qui correspond à la quantification de la projection suivant l'axe de référence Oz du vecteur moment cinétique orbital,

Pour prendre en compte le 4ème nombre quantique, le spin *s* dans une équation d'onde, il faut utiliser le modèle de l'électron de Pauli.

I.2.5 Définir le moment cinétique de spin *S* à partir de l'équation source champ de Broglie

Suivant la constatation que L et S sont tous deux quantifiés et correspondent une même notion, on définit également le spin S à partir de l'équation source champ de Broglie :

$$S^z = \frac{1}{2}\hbar^z = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^x}{\vec{K}_{ty}^{1/x}}$$

$$S^x = \frac{1}{2}\hbar^x = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^y}{\vec{K}_{tz}^{1/y}}$$

$$S^y = \frac{1}{2}\hbar^y = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^z}{\vec{K}_{tx}^{1/z}}$$

I.3 Conclusion du chapitre

On a proposé de lier l'équation source champ de Broglie aux moments cinétiques orbital L et de spin S, et donc à l'interaction électromagnétique. Ce lien permet d'expliquer la quantification en mécanique quantique du moment cinétique orbital en multiple entier de $\hbar$, alors que ce moment n'est pas quantifié en mécanique classique.

Plus largement, on a ainsi fait correspondre l'invariance d'une loi de la Nature : l'équation source champ de Broglie, avec la conservation lors des réactions entre particules d'une quantité quantique : moments cinétiques orbitaux et de spin.

Suite à cette correspondance entre l'invariance d'une loi de la Nature et la conservation lors des réactions entre particules d'une quantité quantique, on s'interroge, serait-il possible de trouver d'autres exemples et même de généraliser davantage ?
C'est ce que va examiner dans les prochains chapitres, en cherchant en outre à davantage rapprocher dans leur forme les 4 interactions (électromagnétique, hyper, faible et forte) que ne le fait le Modèle standard.

Chapitre II L'effet photoélectrique d'Einstein (1905) et la parabole de Bohr (1913)

Objet du chapitre
On présente le principal objectif de ce mémoire : celui de généraliser l'effet photoélectrique d'Einstein et de la parabole de Bohr s'appliquant à l'interaction électromagnétique, aux 3 autres interactions intervenant dans le Modèle standard : interactions électromagnétique, hyper, faible et forte.

II.1 L'effet photoélectrique d'Einstein et la parabole de Bohr

II.1.1 Rappels

En 1905, A. Einstein apporte une explication quantique à l'effet photoélectrique découvert 65 ans plus tôt par Antoine Becquerel et Edmond Becquerel. L'idée d'A. Einstein, c'est que des particules de lumière, les photons, transportant un nombre quantifié appelé aujourd'hui le spin S, échangent ce spin avec des électrons. Cet échange de spin génère un déplacement des électrons et donc un courant électrique de charge Q conservée.

On appelle ici parabole de Bohr, le modèle de Bohr de l'électron proposé par N. Bohr en 1913. C'est une extension de l'effet photoélectrique d'Einstein à l'atome d'hydrogène. Suivant la parabole, des ondes lumineuses de photons transportant des spins S, peuvent générer des changements d'orbites de l'électron et donc un courant électrique de charge Q.
La parabole fonctionne dans les 2 sens. En effet, des changements d'orbite de l'électron (changement d'orbite assimilable à un déplacement de charge électrique Q et donc à un courant électrique), peuvent rayonner des ondes lumineuses composées de photons transportant des spins S.

Nota sur les nombres quantiques S et Q intervenant dans l'interaction électromagnétique
En électrodynamique quantique relativiste, on associe le champ électromagnétique au photon γ porteur de spin. La relation entre moment cinétique et force électrique, c'est-à-dire entre les nombres quantiques S et Q, se retrouve par exemple dans le modèle de l'électron de N. Bohr, lorsque ce dernier pose :

$$rmv \times v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\hbar \times v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

avec $\hbar$ le moment cinétique orbital quantifié L que l'on fait correspondre avec S à une même notion de moment cinétique total J, e la charge électrique élémentaire de Q.

Note historique sur l'idée d'Einstein
Toute l'électromagnétisme du 19ème siècle s'est développée en ne connaissant que le nombre quantique de charge électrique Q. Le génie d'A. Einstein, c'est d'avoir compris que pour bien décrire l'interaction électromagnétique, il fallait ajouter un deuxième nombre quantique : le spin S.
Aujourd'hui, cela peut sembler évident qu'il faille utiliser à la fois Q et S pour décrire l'interaction électromagnétique, mais à l'époque d'A. Einstein rien ou peu le laissait le supposer, tant Q et S sont différents.

Sur la figure ci-dessus, les courants de charges électriques correspondent aux flèches en pointillé, lorsque l'électron passe d'une orbite à une autre (c'est-à-dire d'un niveau *n* à un autre niveau *n*).

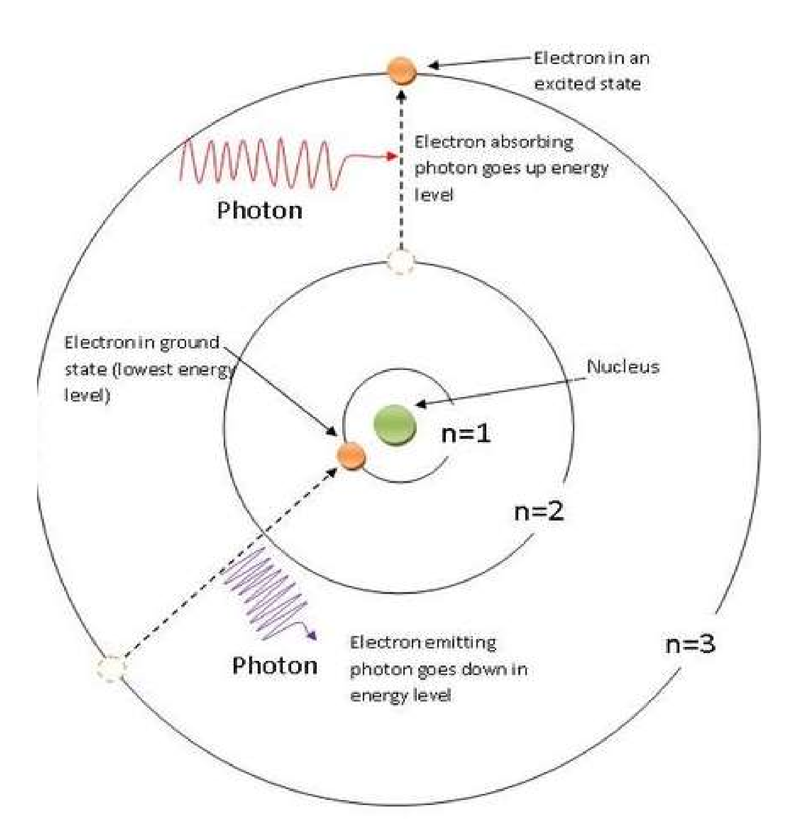


Figure 1 : absorptions et émissions de photons

II.1.2 Absorptions et émissions de photons, diagrammes de Feynman

Explicitons les 2 sens de l'effet photoélectrique d'Einstein et de la parabole de Bohr, à travers les diagrammes de Feynman ci-dessous.

Une particule médiatrice génère un courant de charge, absorptions de photons
On a disparition d'un champ et de la particule médiatrice le représentant, dans le sens du Temps.

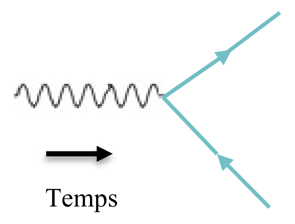


Figure 2 : disparition du photon et création de fermions

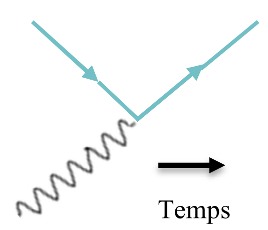


Figure 3bis : disparition du photon et diffusion de fermions

Un courant de charge rayonne une particule médiatrice, émission de photons
On a création du champ ou de la particule médiatrice le représentant, dans le sens du Temps.

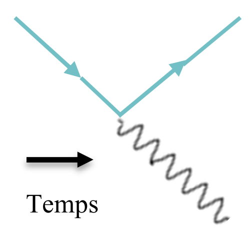


Figure 4 : création du photon et diffusion de fermions

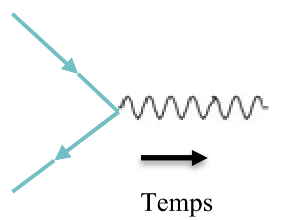


Figure 5 : création du photon et annihilation de fermions

II.1.3 Les grandes étapes de la parabole de Bohr

On découpe ici en 6 étapes la parabole de Bohr :

1. un nombre quantique qualifié de source champ : le moment cinétique orbital et de spin, que l'on résume abusivement par le spin S^a $(a = 1,2,3)$,
2. des particules médiatrices de lumière, les photons γ qui peuvent apparaître et disparaître, qui portent un spin entier, et qui sont neutres électriquement,
3. des particules de matière (les fermions) qui persistent (lors d'une réaction de diffusion), qui portent des spins demi-entiers qui peuvent s'inverser, ainsi qu'une charge électrique Q (non nulle),
4. une réaction entre particules de lumière et de matière, qui consiste en un échange de spins entre un photon γ et un fermion (par exemple, une transition énergétique qui modifie le moment cinétique orbital du fermion, transition hyperfine qui inverse le moment cinétique de spin du fermion, passage de e_R à e_L),
5. un changement d'orbite et donc un déplacement du fermion qui conserve constante sa charge électrique Q au cours de ce déplacement, c'est-à-dire un courant électromagnétique j_Q^μ,
6. en résumé une interaction électromagnétique entre photons et fermions, où on retrouve l'effet photo-électrique d'A. Einstein.

Question principale

En est-il de même pour les autres interactions du Modèle standard ? C'est-à-dire, peut-on retrouver les 6 étapes de la parabole de Bohr et les associer à :

- des nombres quantiques sources champs qui s'inversent (ou se modifient) lors de réactions entre particules,
- des charges qui se déplacent et qui sont conservées au cours de ce déplacement,
- des interactions entre particules médiatrices de type boson (qui peuvent apparaître et disparaître) et particules de type fermion (qui généralement est persistant) ?

Question subsidiaire

Au début de ce mémoire, on a proposé une nouvelle caractéristique pour l'interaction électromagnétique. Faire correspondre l'invariance d'une loi de la Nature : l'équation source champ de Broglie :

$$\frac{1}{\hbar}\left(\frac{d\vec{p}^x}{dt}\right)_{xt}^y = \frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

avec la conservation, lors des réactions entre particules, d'une quantité quantique : moments cinétiques orbitaux et de spin. Est-il possible de trouver de telles correspondances pour les 3 autres interactions ?

II.2 Associer interactions, nombres quantiques et bosons W^a et B intervenant dans les désintégrations béta

II.2.1 Programme de travail : recherche d'analogies entre les 3 interactions électromagnétique, faible et hyper

Dans les chapitres suivants, on va examiner s'il est possible de généraliser l'effet d'Einstein et la parabole de Bohr à l'interaction faible et à l'interaction hyper.

Question principale pour l'interaction faible

Ainsi, on va étudier s'il est possible d'avoir pour l'interaction faible, la parabole de Bohr suivante :

1. un nombre quantique de génération Ge qualifié de source champ,
2. des particules médiatrices, les bosons faibles W^a qui transportent Ge,
3. des fermions gauchers porteurs d'une charge faible T^a (non nulle) et de Ge qui peut être modifié,
4. une réaction entre bosons W^a et fermion gauchers, avec une modification de Ge du fermion (par exemple, passage du baryon oméga Ω_L^+ au proton p_L),
5. un changement de génération du fermion, qui a pour effet un « déplacement » du fermion gaucher et de sa charge faible T^a, c'est-à-dire un courant faible $j_{T^a}^{\mu}$,
6. une interaction faible entre bosons et fermions.

Nota sur Ge

Dans ce mémoire, on définit le nombre de générations Ge comme la somme :

$$Ge = St + C + \tilde{B} + T$$

On y reviendra abondamment par la suite.

Question subsidiaire pour l'interaction faible

Est-il possible, pour l'interaction faible, de faire correspondre l'invariance d'une loi de la Nature : l'équation source champ de Compton :

$$\frac{c^2}{\hbar}\left(\frac{d\vec{m}^t}{dx}\right)_{tx}^{y} = -\frac{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}{\partial t}$$

avec la conservation, lors des réactions entre particules, d'une quantité quantique : le nombre de générations.

On aurait alors pour le nombre génération Ge :

$$Ge = \hbar = -\left(\frac{d\vec{m}^t c^2}{dx}\right)_{tx}^{y} \frac{\partial t}{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}$$

Question principale pour l'interaction hyper

On va étudier s'il est possible d'avoir pour l'interaction hyper, la parabole de Bohr suivante :

1. un nombre quantique d'isospin I^a qualifié de source champ,
2. un boson B qui transporte I^a,
3. des fermions porteurs d'une hypercharge Y_W (non nulle) et de I^a qui peut être inversé,
4. une réaction entre boson B et fermion, avec inversion de I^a du fermion (par exemple, passage de n à p),
5. un changement de neutron à proton, qui a pour effet un « déplacement » du nucléon et de sa charge Y_W, c'est-à-dire un courant hyper $j_{Y_W}^{\mu}$,
6. une interaction hyper.

Question subsidiaire pour l'interaction hyper

Est-il possible, pour l'interaction hyper, de faire correspondre l'invariance d'une loi de la Nature : l'équation source champ de Newton :

$$\frac{1}{\hbar}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt} = -\frac{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}{\partial x}$$

avec la conservation, lors des réactions entre particules, d'une quantité quantique : le nombre d'isospin.

On aurait alors pour l'isospin I :

$$I^x = \frac{1}{2}\hbar^x = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt}\frac{\partial x}{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}$$

$$I^y = \frac{1}{2}\hbar^y = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^y}{dt})^y_{xt}\frac{\partial y}{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{yz}}$$

$$I^z = \frac{1}{2}\hbar^z = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^z}{dt})^y_{xt}\frac{\partial z}{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{zx}}$$

Nota sur $SU(2)$ (ou sur $SO(3)$)
Les transformations du moment cinétique orbital (ainsi que du moment cinétique de spin) sont basées sur le groupe des rotations $SU(2)$ (ou $SO(3)$ si on travaille sur un espace réel). Le spin est un vecteur défini dans les trois dimensions de l'Espace. On note qu'on retrouve les trois dimensions de l'Espace au niveau de l'impulsion dans l'équation source champ de Broglie :

$$\vec{p}^a = \hbar\vec{K}^{1/a}$$

avec $a = x, y, z$.

Pour l'équation source champ de Newton :

$$\hbar^x = -(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt}\frac{\partial x}{\partial\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}$$

qui fait également intervenir une impulsion dans les 3 dimensions de l'Espace, il faut chercher une nombre quantique dont les transformations appartiennent à $SU(2)$ (ou à $SO(3)$). L'isospin I semble donc indiqué pour être rapproché de l'équation source champ de Newton.

Question principale pour l'interaction forte
Ultérieurement, à la fin du mémoire, on va étudier s'il est possible d'avoir pour l'interaction forte, la parabole de Bohr suivante :

1. un nombre baryonique Ba qualifié de nombre source champ,
2. des bosons porteurs de Ba,
3. des fermions porteurs d'une charge forte notée Co^a et de Ba qui peut être modifié,
4. une réaction entre boson et fermion, avec modification du nombre Ba du fermion,
5. un déplacement de la charge forte Co^a et à un courant fort $j^{\mu}_{Co^a}$,
6. une interaction forte.

Question subsidiaire pour l'interaction forte
Est-il possible, pour l'interaction forte, de faire correspondre l'invariance d'une loi de la Nature : l'équation source champ de d'Einstein :

$$\hbar = \frac{\vec{m}^t c^2}{\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}$$

avec la conservation, lors des réactions entre particules, d'une quantité quantique : le nombre baryonique.

On aurait alors pour le nombre baryonique Ba :

$$Ba = \hbar = (\frac{d\vec{m}^t c^2}{dx})^y_{tx} \frac{\partial x}{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}$$

II.2.2 Recherche d'analogies entre les charges électrique, hyper, faible et forte

Pour l'interaction électromagnétique, la charge électrique Q portée par un fermion se construit selon la relation de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$$

à partir de 3 nombres quantiques I^3 , Ba et Ge que l'on propose de lier aux trois autres interaction du Modèle standard.

La charge Q apparait comme le complémentaire du spin S, se construisant à partir des 3 autres nombres quantiques sources champs : I^3, Ba et Ge.
S'inspirant de Gell-Mann Nishijima, on examinera dans ce mémoire si la charge Q peut s'exprimer à partir d'une fonction f_Q tel que :

$$Q = f_Q\big((I, I^3), Ba, Ge\big)?$$

Nota
On s'attend à une fonction f_Q plus complexe qu'une simple somme comme proposée par la relation de Gell-Mann Nishijima. En effet, on additionne des termes de natures différentes, avec d'un côté I^3, de l'autre Ba et Ge.

Pour l'interaction hyper, on a suivant la relation de Glashow du Modèle électrofaible :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$$

Par analogie avec la charge électrique Q, on examinera si l'hypercharge faible Y_W peut être le complémentaire de l'isospin I, se construisant à partir des 3 autres nombres quantiques sources champs. C'est-à-dire, a-t-on une fonction f_Y tel que :

$$Y_W = f_Y\big((S, S^3), Ba, Ge\big)?$$

De même, on examinera si la charge faible T^a peut être le complémentaire du nombre de générations Ge, se construisant à partir des 3 autres nombres quantiques sources champs. C'est-à-dire, a-t-on une fonction f_T tel que :

$$(T, T^3) = f_T\big((S, S^3), (I, I^3), Ba\big)?$$

De même, on examinera si la charge forte (notée ici Co^a comme couleur) peut être le complémentaire de Ba, se construisant à partir des 3 autres nombres quantiques sources champs. C'est-à-dire, a-t-on une fonction f_{Co} tel que :

$$(Co, Co^3) = f_{Co}\big((S, S^3), (I, I^3), Ge\big)?$$

Nota 1
On suppose ici que les charges faible T^a et forte Co^a sont des générateurs de groupe de $SU(2)$. On y reviendra.

Nota 2
Dans le précédent mémoire, on a souligné l'existence de 2 types de nombres quantiques :

- les nombres quantiques de type charge X qui peuvent rayonner des champs d'interaction,
- les nombres quantiques qui interviennent dans des réactions entre particules, qui fréquemment s'inversent ou se modifient, et qui ne peuvent rayonner des champs d'interaction. Ce sont ces nombres quantiques que l'on propose de lier à 4 équations sources champs de la gravitation.

On cherchera ici à montrer que les premiers (de type charge) sont fonctions des seconds (de type source champ).

II.3 Conclusion du chapitre

Le principal objectif de ce mémoire est d'étudier la généralisation de l'effet photoélectrique d'Einstein et de la parabole de Bohr, de l'interaction électromagnétique aux 3 interactions intervenant dans le Modèle standard.

Dans les prochains chapitres, on va rechercher davantage d'analogies entre les interactions électromagnétique, forte, faible et hyper que présentées usuellement dans le Modèle standard. Sur le modèle de l'interaction électromagnétique, on va rechercher des particules médiatrices des interactions faible et hyper, non porteuses de charge X, qui par échange de quantités quantiques sources champs avec des fermions porteurs de charge, génèrent un déplacement des charges et ainsi des courants électromagnétiques, faibles ou hyper.
On va ainsi tenter de généraliser l'effet photo-électrique d'A. Einstein, à un effet bosons W - courants faibles, puis à un effet boson B - courants hyper.

Pour cela, on va préalablement étudier les rapprochements possibles entre équations sources champs et nombres quantiques portés par les particules médiatrices. On va revenir à la physique des années 1950 et 1960, et à la découverte d'un nouveau nombre quantique l'étrangeté St.

Chapitre III De nouveaux nombres quantiques : le nombre baryonique Ba, l'hypercharge Y et l'étrangeté St (années 1950)

Objet du chapitre
On revient ici sur la découverte dans les années 1950 de nouveaux nombres quantiques comme le nombre baryonique Ba, l'hypercharge Y et l'étrangeté St, conservés globalement lors de réactions entre particules (sauf pour St dans certains cas).

III.1 Préambule historique, accélérateurs de particules

Après la guerre mondiale de 1939-1945 et suite à l'utilisation de l'arme atomique, on assiste à un rapide développement de la physique des particules. Les Etats sont prêts à dépenser des sommes colossales dans la recherche nucléaire, dans ce qui se passe à l'intérieur du noyau de l'atome. Des accélérateurs de particules sont construits, ils permettent d'étudier la physique des particules d'énergie de plus en plus importante, c'est-à-dire de taille des particules de plus en plus petite (ou de longueur d'onde de plus en plus petite).

Les expériences réalisées dans ces accélérateurs de particules vont permettre de découvrir de nouveaux nombres quantiques conservés globalement lors des réactions.

III.2 Le nombre baryonique Ba, l'isospin I^a et l'hypercharge Y

III.2.1 Nombre baryonique Ba

1er fait : lors d'une désintégration β^- faisant intervenir l'interaction faible (ainsi que l'interaction hyper), un neutron se désintègre en proton. Ces deux particules sont qualifiées de nucléon, elles ont des masses proches et relativement importantes pour des particules.

2ème fait : dans les réactions faisant intervenir l'interaction forte, on constate qu'un proton ne se désintègre jamais en une particule plus légère. Dans les produits de la désintégration du proton, on retrouve toujours une particule de masse relativement importante.

Pour éclairer ces 2 faits, ainsi que pour marquer la conservation du nombre de nucléons (proton ou neutron) et la masse proche de ces particules, on introduit le nombre baryonique Ba.

Par exemple, on a la réaction de désintégration du proton, où intervient l'interaction forte, avec la conservation du nombre baryonique :

$$p^+(Ba = 1) + p^+(Ba = 1) \to \Lambda^0(Ba = 1) + p^+(Ba = 1) + K^+(Ba = 0)$$

Le baryon lambda Λ^0 se désintègre à son tour en faisant intervenir l'interaction faible, toujours avec conservation du nombre baryonique :

$$\Lambda^0(Ba = 1) \to p^+(Ba = 1) + \pi^-(Ba = 0)$$

On assigne un nombre baryonique $Ba = 1$ aux baryons comme le proton, le neutron ou le baryon lambda Λ^0. On assigne un nombre baryonique $Ba = -1$ aux antibaryons (antiproton, antineutron, etc.).

Les mésons (particules légères) formés d'un quark et d'un antiquark (comme le K^+ ou le π^-) possèdent un nombre baryonique $Ba = 0$.

Nota 1

En analogie au nombre baryonique Ba pour le proton et le neutron, il existe un nombre leptonique $L_e = 1$ pour l'électron et le neutrino, qui est également conservé lors de réactions entre particules. Pour le positron et l'antineutrino, on a un nombre leptonique $L_e = -1$.

Lorsque dans ce mémoire, on évoquera Ba en tant que nombre quantique source champ, pour les leptons, il faudra comprendre implicitement qu'il s'agit de $-L_e$.

Nota 2
Le nombre baryonique s'apparente au nombre de masse A qui comptabilise le nombre de nucléons dans le noyau. Le numéro atomique Z comptabilise le nombre de protons.

III.2.2 Isospin I^a

Dans le précèdent mémoire, on a évoqué l'isospin I^a ($a = 1,2,3$) proposé par W. Heisenberg en 1932 pour expliquer une masse proche et des similitudes de comportement du proton et du neutron vis-à-vis de l'interaction forte. Les expériences réalisées dans les accélérateurs de particules dans les années 1950 confortent les idées de W. Heisenberg sur l'isospin. On a vu que dans la théorie de Yang-Mills (1954), l'isospin I^a est identifié à la charge forte.

Comme le spin S^3, l'isospin I^3 peut s'inverser lors d'une réaction entre particules, et reste toutefois globalement conservé. Par exemple, le spin S^3 d'un électron s'inverse lors d'une transition hyperfine où intervient l'interaction électromagnétique. L'isospin I^3 d'un nucléon s'inverse lors d'une désintégration β^- où interviennent les interactions hyper et faible.

III.2.3 Hypercharge Y et relation de Gell-Mann Nishijima

Lors d'une désintégration β^-, on a transformation du neutron en proton et inversion de la 3ème composante de l'isospin I^3 qui passe de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$. On a également la charge électrique Q du nucléon qui passe de 0 à 1.

On note que l'isospin I^3 contient une part de charge électrique Q. Pour relier Q avec I^3, on postule l'existence d'un autre nombre quantique, l'hypercharge Y, qui contient également une part de charge électrique.

On a la relation dite de Gell-Mann Nishijima proposée indépendamment par Kazuhiko Nishijima en 1953 et par Murray Gell-Mann en 1956 :

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2}$$

Le proton et le neutron possèdent la même hypercharge $Y = 1$, conservée lors d'une désintégration β^-.

Cela permet de retrouver pour le proton la charge électrique :

$$Q_{pro} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Et pour le neutron :

$$Q_{neu} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

III.3 L'étrangeté St

III.3.1 Introduction de l'étrangeté St

Dans les années 1950, on découvre des particules produites lors de collisions impliquant des interactions fortes $\Delta t \approx 10^{-23}s$ (réactions rapides), mais ayant des vies moyennes relativement longues $\tau \approx 10^{-9}s$ (réactions lentes), c'est-à-dire une grandeur caractéristique des interactions faibles. Ainsi, ces particules (par exemple, le méson kaon K^+ ou le baryon lambda Λ^0) sont produites par la voie forte, et se désintégrent par la voie faible.

On a la réaction rapide, où intervient l'interaction forte :

$$p^+ + p^+ \to \Lambda^0 + p^+ + K^+$$

On a la reaction lente, où intervient l'interaction faible :

$$\Lambda^0 \to p^+ + \pi^-$$

Pour expliquer ces deux faits, K. Nishijima et M. Gell-Mann introduisirent un nouveau nombre quantique : l'étrangeté, qu'on notera ici St pour le différentier du spin S.

L'étrangeté St est globalement conservée dans l'interaction forte, où les particules sont produites en paire d'étrangeté opposées :

$$p^+(St = 0) + p^+(St = 0) \to \Lambda^0(St = -1) + p^+(St = 0) + K^+(St = 1)$$

La désintégration de particules étranges en particules non étranges passe par la voie faible, ce qui explique que l'étrangeté ne semble pas à priori conservée dans l'interaction faible :

$$\Lambda^0(St = -1) \to p^+(St = 0) + \pi^-(St = 0)$$

Nota
Le nombre est appelé étrangeté justement parce qu'il est conservé dans l'interaction forte et pas dans l'interaction faible.

III.3.2 Relation entre l'hypercharge Y, le nombre baryonique B et l'étrangeté St

Les physiciens notent que l'hypercharge Y peut parfois se confondre avec l'étrangeté St. Pour les baryons, il faut de plus tenir compte du nombre baryonique. On a la relation :

$$Y = Ba + St$$

On obtient pour la relation de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2}$$

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{St}{2}$$

Nota 1 sur T et Y_W vus dans le Modèle électrofaible
Dans le Modèle électrofaible, S. Glashow introduit 2 nouveaux nombres quantiques, la charge faible T et l'hypercharge faible Y_W, par analogie respectivement avec l'isospin I (vu comme la charge forte dans la théorie de Yang-Mills) et l'hypercharge Y (appelée aussi hypercharge forte).

Pour définir l'hypercharge faible, S. Glashow introduit la relation entre Q, T^3 et Y_W :

$$Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$$

On peut parler de nombres quantiques dits forts pour I et Y car ils interviennent dans l'interaction forte, et de nombres quantiques dits faibles pour T et Y_W car ils interviennent dans l'interaction faible.

Dans ce mémoire, on propose néanmoins une autre distinction. On classe T et Y_W dans les nombres quantiques de type charge et l'isospin I dans les nombres quantiques sources champs. Il en est de même pour l'hypercharge $Y = Ba + St$, classées ici dans les nombres quantiques sources champs , car somme de 2 nombres quantiques sources champs.
On proposera ultérieurement une explication.

Nota 2 sur I, Y, T, Y_W
On liste les égalités (valables dans certain cas) entre les nombres quantiques dits forts et les nombres quantiques dits faibles.

Pour les quarks gauchers de 1ère génération (ainsi que pour leurs antiparticules), on a :

$$I^3 = T^3$$

$$Y = Ba = Y_W$$

Pour les quarks gauchers de 1ère, 2ème et 3ème génération (ainsi que pour leurs antiparticules), on a :

$$Ba = Y_W$$

Pour les leptons gauchers de 1ère, 2ème et 3ème génération (ainsi que pour leurs antiparticules), on a :

$$-L_e = Y_W$$

Pour les quarks et leptons gauchers de 1ère, 2ème et 3ème génération (ainsi que pour leurs antiparticules), on peut poser :

$$Ba - L_e = Y_W$$

Nota 3
Suivant $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{St}{2}$, les nombres quantique I^3, Ba et St sont chargés électriquement. C'est-à-dire qu'une particule portant l'un de ces trois nombres quantiques est chargée électriquement.

III.4 Conclusion du chapitre

On a évoqué quatre nombres quantiques : le nombre baryonique Ba, l'isospin I^a, l'hypercharge Y et l'étrangeté St qui interviennent dans les réactions entre particules et qui sont généralement conservés (excepté St dans l'interaction faible).
Suivant la relation de Gell-Mann-Nishijima, la charge électrique Q est la somme de trois de ces nombres quantiques : I^3, Ba, St. Dans les prochains chapitres, on étudiera les liens entre ces trois nombres quantiques I^a, Ba, St et les interactions hyper, forte et faible. Mais avant, on va s'intéresser aux théories développées dans les années 1950-1690 et décrivant l'interaction forte.

Chapitre IV L'interaction forte, la Voie octuple et le Modèle des quarks (années 1960)

Objet du chapitre
On décrit d'abord succinctement les théories qui se sont succédées de 1950 à 1970 pour décrire l'interaction forte : la théorie de Yang-Mills avec la charge forte générateur de $SU(2)_I$, la Voie octuple et le Modèle des quarks de M. Gell-Mann avec la charge forte générateur de $SU(3)_{saveur}$, enfin la Chromodynamique quantique avec la charge forte générateur de $SU(3)_{couleur}$.
On revient ensuite plus en détail sur la Voie octuple et le Modèle des quarks, deux théories qui utilisent les nombres quantiques forts évoqués dans le précédent chapitre.

IV.1 Les théories sur l'interaction forte (1950-1970)

IV.1.1 Charge forte fondée sur $SU(2)_I$ avec les pions comme particules médiatrices (de type opérateurs d'échelle pour les pions chargés électriquement)

Dans les années 1950, Chen Ning Yang et Robert Mills développent une théorie de l'interaction forte fondée sur le groupe $SU(2)_I$, avec comme charge forte l'isospin I.

L'inspiration de la théorie de Yang-Mills se trouve dans le couple proton neutron, qui s'attire suivant l'interaction forte par leurs charges fortes opposées, charges fortes justement égales à l'isospin : $I^3 = -\frac{1}{2}$ pour le neutron et $I^3 = \frac{1}{2}$ pour le proton.

Dans la théorie de Yang-Mills, les particules médiatrices de l'interaction forte sont les 3 pions π^+, π^-, π^0. Contrairement aux photons qui ne portent pas de charges électriques, ces 3 pions sont des particules chargées forte au sens qu'ils portent un isospin I. Ils peuvent modifier la charge forte (respectivement I^+, I^-, I^0) du fermion avec lequel ils interagissent.

Les pions π^+ et π^-sont qualifiés d'opérateurs d'échelle (opérateurs de création et d'annihilation), c'est-à-dire qu'ils peuvent augmenter ou diminuer l'isospin I^3 d'un fermion de charge forte $I^\pm$ avec lequel ils interagissent.

On a les relations entre $I^\pm$ et I^1, I^2 :

$$I^+ = I^1 + iI^2$$

$$I^- = I^1 - iI^2$$

Les pions π^+ et π^- sont chargés électriquement, puisque l'isospin I^3 est chargé électriquement.

Soient $|m\rangle$ un vecteur propre commun aux opérateurs $(I)^2$ et I^3 et $\hbar m$ une valeur propre de I^3.
On a les relations suivantes, où les pions π^+ et π^- augmentent ou diminuent de I^3 la charge forte du fermion avec lequel ils interagissent :

$$I^-|m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|m-1\rangle$$

$$I^+|m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|m+1\rangle$$

Nota
Les 3 pions π^+, π^-, π^0 de l'interaction forte sont les analogues des 3 bosons faibles W^+, W^-, W^0 de l'interaction faible. Les 2 premiers W^+ et W^- sont eux-aussi des opérateurs d'échelle et transportent

une charge faible T^3. Ils interagissent avec les fermions de charge faible $T^{\pm}$ en diminuant ou en augmentant leur charge faible de T^3.

En avant-goût du Modèle des quarks, on rappelle la décomposition des 3 pions en quarks et antiquarks de 1ère génération :

$$|I = 1, I^3 = 1\rangle = -|u;\bar{d}\rangle = |\pi^+\rangle$$

$$|I = 1, I^3 = -1\rangle = |d;\bar{u}\rangle = |\pi^-\rangle$$

$$|I = 1, I^3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u;\bar{u}\rangle - |d;\bar{d}\rangle) = |\pi^0\rangle$$

IV.1.2 Charge forte fondée sur $SU(3)_{saveur}$ avec les mésons comme particules médiatrices (de type opérateurs d'échelle pour les mésons chargés électriquement)

Pour inclure le nombre quantique d'étrangeté St, M. Gell-Mann propose au début des années 1960 dans la Voie octuple puis dans le Modèle des quarks (le second modèle étant un prolongement du premier), que la charge forte soit fondée sur $SU(3)_{saveur}$, c'est-à-dire sur les saveurs u, d, s.

Nota
Les 2 saveurs u, d sont liées à l'isospin I^3. u correspond à $I^3 = \frac{1}{2}$ et d à $I^3 = -\frac{1}{2}$.
La saveur s est liée au nombre d'étrangeté $St = -1$.

Les particules médiatrices sont élargies des pions aux mésons formées d'un quarks et d'un antiquark, à choisir parmi les saveurs u, d, s ($\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ pour les antiquarks). Comme les pions, les mésons de $SU(3)_{saveur}$ peuvent modifier la charge forte du fermion avec lequel ils interagissent.

On trouve des mésons chargés électriquement dont la charge électrique est due soit à l'isospin I^3 , soit au nombre d'étrangeté St, suivant la relation :

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{St}{2}$$

Comme pour les pions π^+, π^-, les mésons chargés électriquement sont de type opérateur d'échelle.

Nota
La charge électrique des mésons ne peut être due à Ba, puisque ce nombre quantique est nul pour les mésons.

Cependant, la symétrie entre les différents mésons ne semble qu'approchée. Par exemple, les mésons kaons (particules étranges) ont une masse très différente de celle des pions. Ainsi, dans les années 1970, la Chromodynamique quantique introduit une charge forte fondée sur $SU(3)_{couleur}$.

IV.1.3 Charge forte fondée sur $SU(3)_{couleur}$ avec les gluons comme particules médiatrices (de type opérateurs d'échelle)

La Chromodynamique quantique (QCD) est proposée en 1973 par H. David Politzer, Frank Wilczek et David Gross, afin notamment d'obtenir une symétrie théoriquement parfaite pour les charges fortes vis-à-vis des rotations de $SU(3)_{couleur}$. Les charges fortes sont rebaptisées charges de couleur et fondées sur le groupe $SU(3)_{couleur}$. On a 3 charges fortes de couleurs : R, G, B, comme rouge, green et bleu.

Les particules médiatrices de l'interaction ne sont plus les mésons. Ce sont les gluons G qui portent une charge de couleur et peuvent être également considérés comme des opérateurs d'échelle. Ils augmentent ou diminuent la charge forte de couleur du quark avec lequel ils interagissent.

La Chromodynamique quantique attribue aux quarks deux caractéristiques importantes. Une première qu'on appelle le confinement de couleur, une seconde qu'on appelle la liberté asymptotique. Ces deux caractéristiques ne sont pas sans rappeler certaines caractéristiques de la force électrostatique et du modèle de l'électron de Bohr. On reviendra sur ces deux caractéristiques à la fin de ce mémoire dans un dernier chapitre consacré à l'interaction forte. Dans l'immédiat, revenons sur la Voie octuple et le Modèle des quarks.

IV.2 La Voie octuple

IV.2.1 La charge forte de saveur et le groupe $SU(3)_{saveurs}$

Dans la Voie octuple, la charge forte est le générateur du groupe $SU(3)_{saveurs}$. Les rotations de $SU(3)_{saveurs}$ (de type transformation de Jauge globale) agissent sur des triplets de particules dotées des trois saveurs.

On a le passage d'un triplet à un autre triplet de particules associées à des fonctions d'onde ψ :

$$\begin{pmatrix} \psi_u' \\ \psi_d' \\ \psi_s' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix}$$

avec $U \in SU(3)_{saveurs}$

U peut s'écrire $U(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^8) = e^{i\frac{1}{2}(\alpha^1\lambda^1 + \alpha^2\lambda^2 + ... + \alpha^8\lambda^8)}$ avec $\lambda^1 ... \lambda^8$ huit générateurs de $SU(3)_{saveu}$.

En partant d'un hadron (par exemple de fonction d'onde ψ_u), et en lui appliquant une transformation $U \in SU(3)_{saveurs}$, on aboutit à un autre hadron (par exemple de fonction d'onde ψ_u') de charge forte modifiée, mais avec en théorie des propriétés comparables (même masse, même moment cinétique orbital, même spin, etc.).

Nota 1
Par exemple, en passant du neutron au proton, on a une charge forte modifiée ($I^3 = -\frac{1}{2}$ pour le neutron, $I^3 = \frac{1}{2}$ pour le proton), mais des propriétés comparables pour les 2 nucléons (même masse, même moment cinétique orbital, même spin, etc.).

Nota 2
Les hadrons sont les particules du noyau atomique soumises à l'interaction forte. Ils sont composés des baryons et des mésons.

IV.2.2 Exemple des mésons fondamentaux

La Voie octuple organise les hadrons en fonction de leur charge électrique Q et de leur charge forte : isospin I^3 et étrangeté St.

Par exemple, on a neuf mésons fondamentaux qui se rangent parmi un singlet et un octet de $SU(3)_{saveurs}$, d'où le terme de Voie octuple. On les indique ci-dessous suivant Q et St.

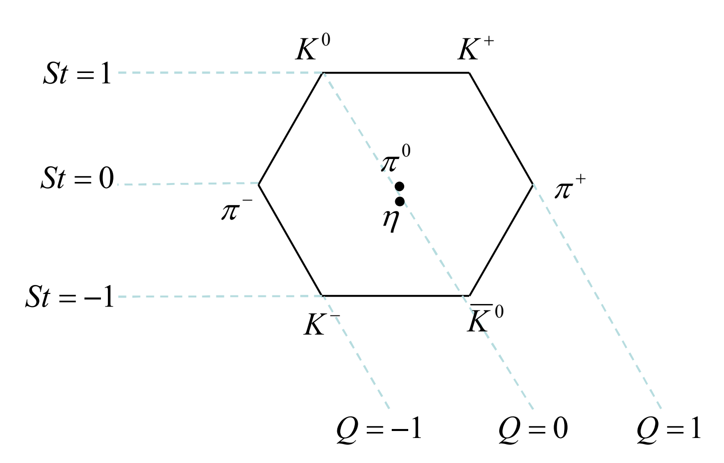


Figure 6 : octet des 8 mésons fondamentaux

IV.3 Le Modèle des quarks

IV.3.1 Généralités

En 1964, M. Gell-Mann et George Zweig proposent que les hadrons ne sont pas véritablement des particules élémentaires, mais sont formés de composants plus fondamentaux : les quarks.

Pour rendre compte de la variété des hadrons connus à l'époque, on a besoin de 3 types de quarks : le u (up), le d (down) et le s (strange) qui correspondent aux trois saveurs utilisées par la Voie octuple dans le groupe $SU(3)_{saveurs}$.

Dans le Modèle des quarks, les baryons sont formés de trois quarks et ont un nombre baryonique Ba positif. Les anti-baryons sont formés de trois antiquarks et ont un nombre baryonique Ba négatif. Les mésons sont formés d'un quark et d'un antiquarks et ont un nombre baryonique Ba nul.

On a le diagramme suivant qui shématise les hadrons à partir du Modèle des quarks.

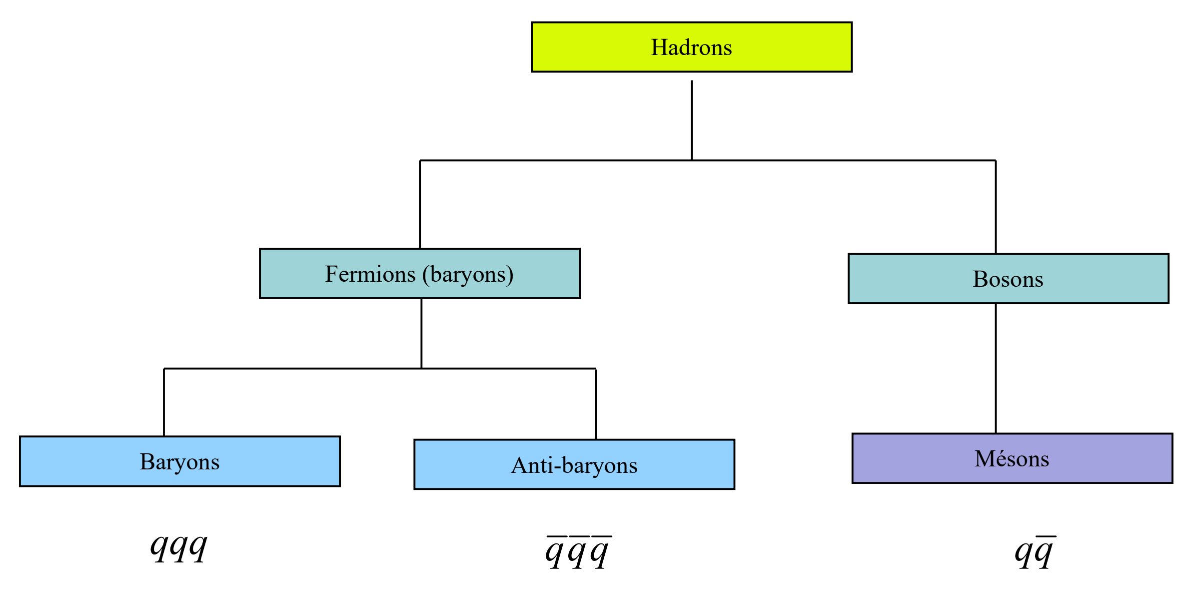


Figure 7 : les hadrons selon le Modèle des quarks

Nota 1
Tous les hadrons sont sujets à l'interaction forte. Cela les différencie des leptons qui n'y participent pas.

Nota 2
Le diagramme n'est pas exhaustif. D'autres fermions sont découverts par la suite, comme les pentaquarks formés de 5 quarks.

IV.3.2 Exemples de triplets de particules

On donne les nombres quantiques d'un triplet de particules formé par les quarks u, d, s.

	Charge électrique	Charge forte			
Particule	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{St}{2}$	**Isospin** (I, I^3)	**Etrangeté** St	**Hypercharge** $Y = Ba + St$	**Nombre baryonique** Ba
u	$+\frac{2}{3}$	$(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{3}$	$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$
s	$-\frac{1}{3}$	$(0,0)$	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$

Nota
Notons que pour l'interaction forte, lorsqu'on modifie la charge forte, le nombre baryonique Ba est conservé. Pour l'interaction électromagnétique, lorsqu'on modifie la charge électrique, c'est le spin S qui est conservé.

On obtient le triangle suivant si on positionne les quarks u, d, s en fonction de leur isospin I^3 et de leur hypercharge $Y = Ba + St$:

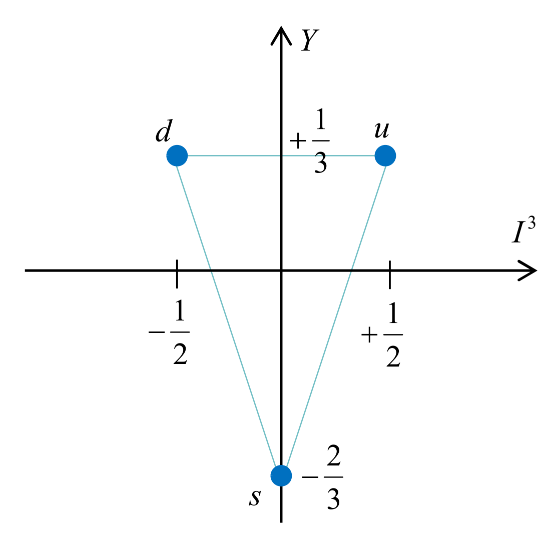


Figure 8 : quarks u, d, s

De même, on donne les nombres quantiques d'un triplet de particules formé par les antiquarks $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$.

	Charge électrique	Charge forte			
Particule	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{St}{2}$	**Isospin** (I, I^3)	**Etrangeté** St	**Hypercharge** $Y = Ba + St$	**Nombre baryonique** Ba
$\bar{u}$	$-\frac{2}{3}$	$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{d}$	$+\frac{1}{3}$	$(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

$\bar{s}$	$+\frac{1}{3}$	(0,0)	$+1$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

On obtient le triangle suivant si on positionne les antiquarks $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ en fonction de leur isospin I^3 et de leur hypercharge Y :

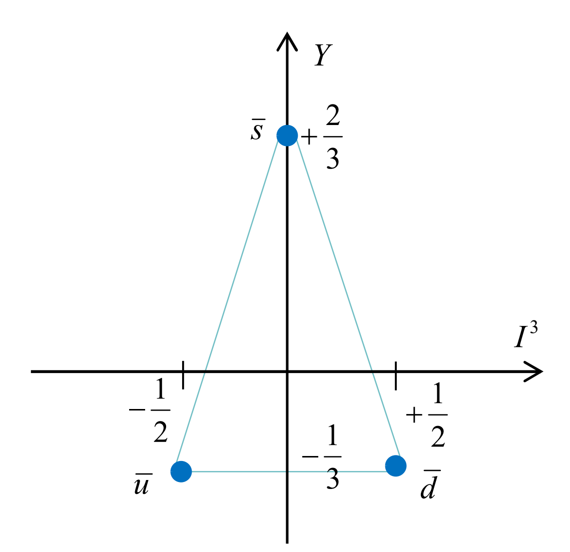


Figure 9 : antiquarks $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$

IV.3.3 6 saveurs et 3 générations

En 1974, on découvre la particule J/ψ, un état lié de $c\bar{c}$, c'est-à-dire une 4ème saveur de quarks appelée la saveur c charme. Pour conserver le Modèle des quarks, la charge forte devient le générateur du groupe $SU(4)_{saveurs}$.

Nota
Entre-temps, en 1973, dans la Chromodynamique quantique, il est proposé une charge forte de couleur qui génère le groupe $SU(3)_{couleurs}$.

Dans la décennie qui suit, on découvre deux autres quarks et 2 autres saveurs : b bottom et t top. Ce qui fait 6 saveurs au total. On regroupe les doublets de saveurs par génération. On a donc 3 générations de 2 quarks chacune.

Pour les leptons (particules en orbite autour du noyau et non soumises à l'interaction forte), on a un schéma étonnamment similaire, avec également 6 saveurs et 3 générations.

On a 3 saveurs d'électrons : l'électron e, le muon μ (sorte d'électron lourd, pour l'anecdote confondu au départ avec l'hypothétique mésotron de Yukawa), le tau τ (sorte d'électron encore plus lourd), 3 saveurs de neutrinos : ν_e, ν_μ, ν_τ correspondant aux 3 électrons$e$, μ et τ.

On regroupe ces 6 quarks et ces 6 leptons en 3 générations de deux quarks et de deux leptons. On a le tableau synthétique suivant :

Générations	**I**	**II**	**III**
Quarks	$\binom{u}{d}$	$\binom{c}{s}$	$\binom{t}{b}$
Leptons	$\binom{\nu_e}{e}$	$\binom{\nu_\mu}{\mu}$	$\binom{\nu_\tau}{\tau}$

IV.3.4 Relation de Gell-Mann Nishijima généralisée, nombre de générations Ge

L'ajout de 3 nouvelles saveurs c, b, t modifie la relation de Gell-Mann Nishijima. On obtient la relation de Gell-Mann Nishijima généralisée :

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} = I^3 + \frac{Ba + St + C + \tilde{B} + T}{2}$$

avec
Ba : nombre baryonique,
St : nombre d'étrangeté,
C : nombre de charme,
$\tilde{B}$: nombre de bottom,
T : nombre de top.

Dans ce mémoire, on définit le nombre de générations Ge comme la somme :

$$Ge = St + C + \tilde{B} + T$$

Exemple pour les quark gauchers des 3 générations (u_L, d_L, c_L, s_L, t_L, b_L), on a les nombres quantiques :

	Charge électrique		**Charge forte**								**Charge faible**	**Hyper charge faible**
	Q^t	(S,S^3)	(I,I^3)	Ge	St	C	$\tilde{B}$	T	Y	Ba	(T,T^3)	Y_W
u_L	$\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
d_L	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
c_L	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	0	+1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
s_L	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	−1	−1	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
t_L	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	0	0	0	+1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
b_L	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	−1	−1	0	−1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$

Nota
Les deux dernières colonnes (charge faible (T,T^3) et hypercharge faible Y_W) ne concernent pas l'interaction forte. On retrouve la charge faible et l'hypercharge faible définies dans le Modèle électrofaible.
Les quarks droitiers ont les mêmes nombres quantiques que les quarks gauchers, pour la charge forte, l'hypercharge Y et le nombre baryonique Ba.

IV.4 Conclusion du chapitre

Suite aux expériences menées dans les accélérateurs de particules, un grand nombre de particules sont découvertes dans les années 1950 comme les baryons ou les mésons. Le Modèle des quarks fondée sur l'interaction forte, permet d'ordonner ces particules et de réduire le nombre de composants élémentaires.

Via le Modèle des quarks, on s'est intéressé à l'interaction forte et aux nombres quantiques qui lui sont liés. Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser aux nombres quantiques que l'on rencontre dans Modèle électrofaible et liés aux interactions électromagnétique, faible et hyper. On verra qu'on retrouve souvent les mêmes nombres quantiques que dans le Modèle des quarks.

Chapitre V Nombres quantiques du Modèle électrofaible

Objet du chapitre
On rappelle les nombres quantiques utilisés dans le Modèle électrofaible. Certains nombres quantiques comme (I, I^3), Ba, Ge sont utilisés pour décrire l'interaction forte dans le Modèle des quarks et sont reliées au Modèle électrofaible via la charge Q.
On examine ensuite les états excités des particules vis-à-vis du spin. On propose une analogie entre spin et nombre baryonique Ba, avec les quarks qui seraient des états excités des nucléons, suivant l'interaction forte, vis-à-vis du nombre baryonique.
On examine également comment les nombres quantiques se transforment lorsqu'on passe de la matière à l'antimatière.

V.1 Nombres quantiques pour les particules de 1ère et 2ème génération

V.1.1 Quarks u, d, c, s de 1ère et 2ème génération

Dans le tableau ci-dessous, on donne les nombres quantiques utilisés dans le Modèle électrofaible, pour les quarks gauchers et droitiers de 1ère et 2ème génération.

	Nombres quantiques sources champs				**Charges**		
	$(S, S^3)H$	(I, I^3)	Ba	Ge	**Charge électrique** $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	**Hypercharge faible** $\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	**Charge faible** (T, T^3)
u_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
d_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
c_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	+1	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
s_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	−1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
u_R	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	(0,0)
d_R	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	(0,0)
c_R	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	+1	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	(0,0)
s_R	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	−1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	(0,0)

Nota sur l'impulsion, le spin et l'hélicité
On considère que les particules ont toutes une impulsion de même direction et de même sens, que les antiparticules ont toutes une impulsion de même direction et de sens opposé (par opération de parité P) par rapport aux particules. Cela permet de faire correspondre dans le tableau ci-dessus spin S^3 et hélicité H.
On fixe le spin à $S^3 = -\frac{1}{2}$ pour un électron gaucher u_L, on en déduit le spin pour les autres particules.

V.1.2 Nucléons de 1ère et 2ème génération

On donne dans ce tableau les nombres quantiques utilisés dans le Modèle électrofaible des nucléons de 1ère et 2ème génération.

	Nombres quantiques sources champs				**Charges**		
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge	**Charge électrique** $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	**Hypercharge faible** $\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	**Charge faible** (T,T^3)
p_L uud	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	+1	0	+1	+1	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
n_L udd	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	+1	0	0	+1	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
$\Omega_L^+ ccs$ non observée	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	+1	+1	+1	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
Ω_L^0 css	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	−1	0	+1	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
p_R uud	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	+1	0	+1	+2	(0,0)
n_R udd	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	+1	0	0	0	(0,0)
Ω_R^+ ccs non observée	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	+1	+1	+2	(0,0)
Ω_R^0 css	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	−1	0	0	(0,0)

Nota 1 sur la charge faible (T,T^3)

La charge faible (T,T^3) s'annule lorsqu'on passe des particules gauchères à droitières. (T,T^3) est donc fonction du spin (S,S^3).

Pour les quarks et les nucléons de 1ère génération, $T^3 = I^3$.

T^3 s'inverse lorsqu'on inverse Ba (passage de particule à antiparticule).
Par contre, T^3 reste identique lorsqu'on passe d'un proton $Ba = 1$ à un quark $Ba = \frac{1}{3}$.

T^3 n'est pas modifié lorsqu'on change de générations de $Ge = 0$ à $Ge = \pm 1$.
Par contre, T^3 s'inverse lorsqu'on inverse Ge (par exemples, lorsqu'on modifie la saveur pour une même génération, ou pour un passage de particule à antiparticule).

On a donc à priori une fonction f_T avec :

$$(T,T^3) = f_T((S,S^3),(I,I^3),\frac{Ba}{2})$$

Nota 2 sur l'hypercharge faible Y_W

L'hypercharge faible Y_W se modifie lorsqu'on passe des particules gauchères à droitières. Y_W est donc fonction du spin (S, S^3).

Y_W s'inverse lorsqu'on inverse Ba (passage de particule à antiparticule).
Pour les quarks et nucléons gauchers de 1ère génération, $Y_W = Ba$.

Y_W n'est pas modifié lorsqu'on change de générations de $Ge = 0$ à $Ge = \pm 1$.
Par contre, Y_W s'inverse lorsqu'on inverse Ge.

Y_W n'est pas modifié lorsqu'on inverse I^3.
Plus généralement, Y_W n'est pas modifié lorsqu'on change la saveur pour une même génération.

On a donc à priori une fonction f_Y avec :

$$Y_W = f_Y((S, S^3), \frac{Ba}{2})$$

au lieu de $Y_W = f_Y((S, S^3), \frac{Ba}{2}, \frac{Ge}{2})$ attendu

V.2 Etats de plus de plus en plus excités

V.2.1 Spin *S*

Suivant le modèle de l'électron de Bohr Goudsmit Uhlenbeck, lorsqu'un électron est excité, il est amené :

- soit à occuper des niveaux d'énergie supérieurs à celui qu'il occupe de façon stable, c'est-à-dire à avoir des moments cinétiques orbitaux supérieurs (modèle de Bohr),
- soit à connaître une inversion de son moment cinétique de spin (modèle de Goudsmit et Uhlenbeck). Par exemple, on passe d'une configuration stable d'un électron et d'un proton de spins antiparallèles ↑↓ à une configuration excitée d'un électron et d'un proton de spins parallèles ↑↑.

Précédemment, on a proposé de regrouper moment cinétique orbital et moment cinétique de spin sous une même notion. On propose ici de schématiser les différents états excités d'une particule vis-à-vis des moments cinétiques, suivant l'interaction électromagnétique, par une série simplifiée reposant simplement sur S^3 et du type :

$$S^3 = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2} \dots$$

V.2.2 Isospin *I*

Par analogie entre spin et isospin, on propose pour I^3 une série simplifiée du même genre, avec des états de plus en plus excités vis-à-vis de l'isospin :

$$I^3 = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2} \dots$$

Par exemple, on a les particules delta $\Delta^{++}(uuu)$ et $\Delta^{-}(ddd)$ qui ont respectivement $I^3 = \frac{3}{2}$ et $I^3 = -\frac{3}{2}$.

	Nombres quantiques sources champs			
	$(S, S^3)\boldsymbol{H}$	(I, I^3)	Ba	Ge

$\Delta^{++}(uuu)$	$(\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},+\frac{3}{2})$	$+1$	0
$\Delta^{-}(ddd)$	$(\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$	$+1$	0

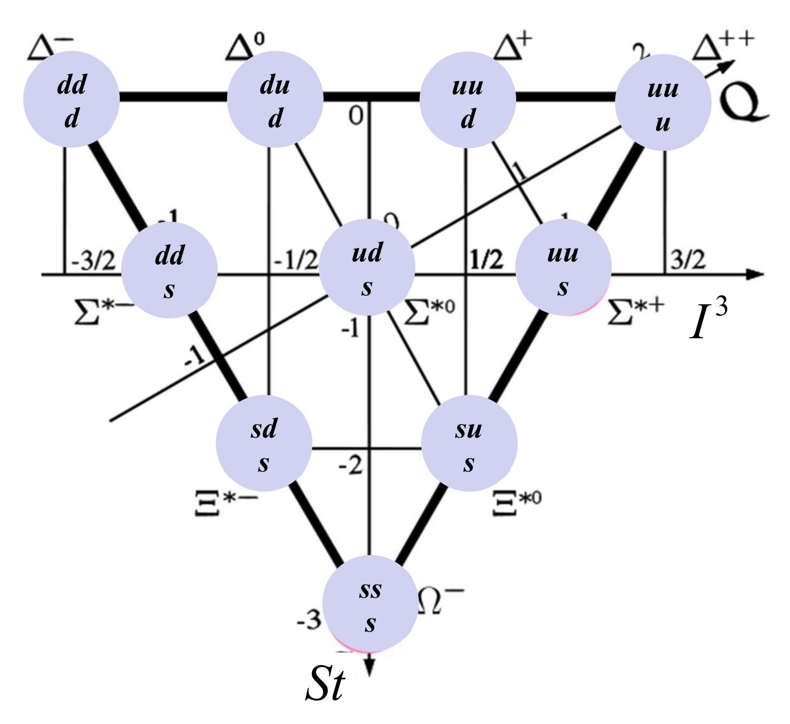


Figure 10 : Variation de I^3 par demi-entier (source Wikipédia)

V.2.3 Nombre baryonique Ba

On donne le tableau des 4 nombres quantiques sources champs pour les quarks et pour leurs analogues en nucléons formés de 3 quarks. On trouve les mêmes valeurs sauf pour le nombre baryonique Ba.

	Nombres quantiques sources champs								
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge		$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge
u	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$p\ uud$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+1$	0
d	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	n udd	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+1$	0
c	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	$+1$	Ω^{+} ccs	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+1$	$+1$
s	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	-1	Ω^{0} css	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+1$	-1

Nota sur les charges

On suppose dans ce mémoire que la charge forte n'est pas fonction de Ba, mais que les 3 autres charges (électrique, hyper, faible) le sont.

Quark et nucléon n'ont pas les mêmes charge électrique Q et hypercharge faible Y_W, comme à l'attendu puisqu'ils ont des nombres baryoniques différents. Ils ont même charge faible (T,T^3) (contrairement à l'attendu) et même charge forte (comme à l'attendu).

Pour le nombre baryonique Ba, on a pour les quarks $Ba = \frac{1}{3}$ et pour les nucléons (protons, neutrons) $Ba = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Dans le Modèle des quarks, la différence entre quark et nucléon s'explique par un nucléon particule non élémentaire formée de 3 quarks. Cependant, dans une analogie avec les états excités du spin S^3 : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ et de l'isospin I^3 : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$, on peut voir la différence entre quark et nucléon comme une différence d'excitation vis-à-vis de Ba. Ainsi, quark et nucléon seraient en fait la même particule, mais se distingueraient par leur excitation vis-à-vis de Ba, suivant l'interaction forte décrite par le Modèle des quarks.

Pour le spin S^3 (si on ne retient que les termes positifs), on a une série du type : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ Pour Ba, on s'attend par analogie à une série du type : $\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3} \ldots$ Le problème, c'est que les nucléons de $Ba = \frac{3}{3} = 1$ sont beaucoup plus stables que les quarks de $Ba = \frac{1}{3}$ (quarks qui n'ont jamais été en fait observés).

Pour sortir de cette contraction, on propose pour Ba une série du type : $Ba = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \ldots$
Pour l'inverse de Ba, on a une série du type : $\frac{1}{Ba} = 1{,}3{,}5 \ldots$ avec des particules qui sont de plus en plus excitées vis-à-vis de Ba.

Pour vérifier si la série $Ba = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \ldots$ est plus adéquate que la série $Ba = \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3} \ldots$, examinons s'il n'existe pas des particules possédant $Ba = \frac{1}{5}$.

V.2.4 Les pentaquarks

On donne quelques exemples de pentaquarks, particules très instables formées de 5 quarks : $\Theta_s^+([ud][ud]\bar{s})$, $\Theta_c([ud][ud]\bar{c})$. Dans le tableau ci-dessous, ils possèdent les mêmes nombres quantiques sources champs que leurs nucléons correspondants.

	Nombres quantiques sources champs								
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge		$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge
$[cs][cs]\bar{d}$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+1$	0	$p\ uud$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+1$	0
$[cs][cs]\bar{u}$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+1$	0	n udd	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+1$	0
$\Theta_s^+([ud][ud]\bar{s})$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+1$	$+1$	Ω^+ ccs	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+1$	$+1$
$\Theta_c([ud][ud]\bar{c})$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+1$	-1	Ω^0 css	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+1$	-1

A l'instar d'un nucléon, un pentaquark possède $Ba = 1$ (quatre quarks $Ba = +\frac{1}{3}$ et un antiquark $Ba = -\frac{1}{3}$). On peut également l'interpréter comme constitué de 5 quarks excités de $Ba = \frac{1}{5}$.

Dans ce cas-là, on a bien une série $Ba = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \ldots$ L'état stable est le nucléon, puis un état excité avec des quarks $Ba = \frac{1}{3}$, puis un état encore plus excité avec des quarks $Ba = \frac{1}{5}$ (et formant à eux cinq un pentaquark).

On a le tableau suivant :

	Nombres quantiques sources champs								
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge		$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge

Quark excité de $[cs][cs]\bar{d}$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{5}$	0	p uud	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	+1	0
Quark excité de $[cs][cs]\bar{u}$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{5}$	0	n udd	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	+1	0
Quark excité de $\Theta_s^+([ud][ud]\bar{s})$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{5}$	+1	Ω^+ ccs	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	+1	+1
Quark excité de $\Theta_c([ud][ud]\bar{c})$	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{5}$	−1	Ω^0 css	$(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$	(0,0	+1	−1

Nota sur le facteur de Landé
Comme on l'a évoqué, interpréter le proton ou le neutron comme une particule composite, permet d'expliquer des facteurs de Landé non égaux à 2 pour les nucléons.
A voir si interpréter nucléon et quarks comme des états non pas composites, mais des états de plus en plus excités vis-à-vis de Ba, permet également d'expliquer un facteur de Landé non égal à 2 ?

V.2.5 Tableau des états excités

On propose les séries suivantes avec des états de plus en plus ou excités pour les 4 nombres quantiques sources champs.

	Nombres quantiques sources champs			
	(S,S^3)	(I,I^3)	$\frac{1}{Ba}$	$\frac{1}{Ge}$
u_L	$-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\ldots$	$+\frac{1}{2},+\frac{3}{2},+\frac{5}{2}\ldots$	$+1,+3,+5\ldots$	0
d_L	$-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\ldots$	$-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\ldots$	$+1,+3,+5\ldots$	0
c_L	$-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\ldots$	0	$+1,+3,+5\ldots$	$+1,+3,+5\ldots$
s_L	$-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\ldots$	0	$+1,+3,+5\ldots$	$-1,-3,-5\ldots$

Nota 1
Dans le tableau ci-dessus, les quarks u_L, d_L, c_L, s_L correspondent au 1er état d'excitation pour le spin S^3, l'isospin I^3, et au 2ème état d'excitation pour Ba.

Nota 2
Les états excités vis-à-vis de Ge indiqués dans le tableau ci-dessus, sont purement spéculatifs et sont donnés en analogie avec Ba.

On peut se demander si la 3ème génération de quarks peut correspondre à un état excité vis-à-vis de Ge ?
Ce n'est à priori pas le cas puisqu'on trouve les mêmes nombres quantiques, en particulier pour Ge.

	Nombres quantiques sources champs				Charges		
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	(T,T^3)
t_L	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	+1	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
b_L	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	−1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
c_L	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	+1	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

s_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(0,0)$	$+\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

V.3 Passage à l'antimatière

V.3.1 Opérations C et P, passage de la matière à l'antimatière

L'opérateur de parité P représente l'inversion des coordonnées d'Espace :

$$x \rightarrow x' = -x$$

La conjugaison de charge électrique C (ou opérateur C) est une transformation qui inverse la charge électrique de la particule.

Rappelons que le passage de la matière à l'antimatière ne correspond pas seulement à la conjugaison de charge C, mais aussi à l'opération de parité P.

On le constate dans le schéma ci-dessous, désintégration d'un pion π^+ en $(\nu_\mu)_L$ et $(\mu^+)_L$. Pour obtenir le passage de la matière à l'antimatière, c'est-à-dire la désintégration d'un pion π^-en $(\bar{\nu}_\mu)_R$ et $(\mu^-)_R$, il faut effectuer les opérations C et P.

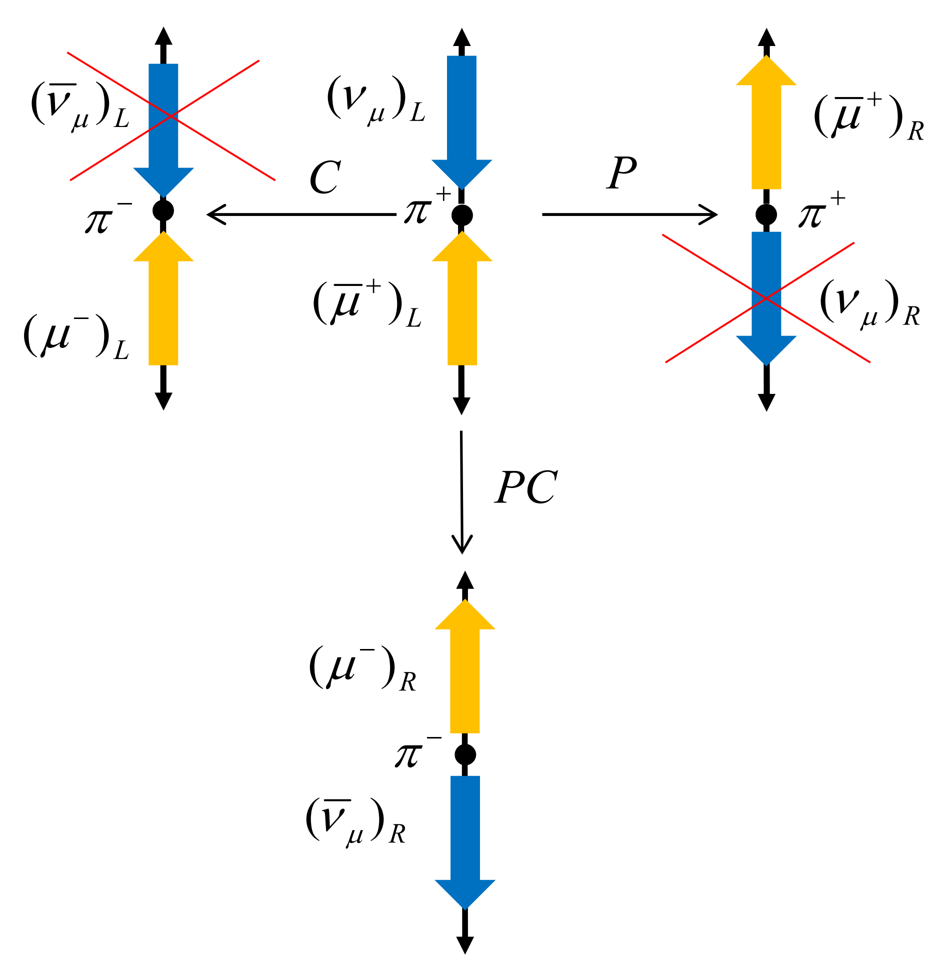


Figure 11 : désintégration d'un pion π^+ en $(\nu_\mu)_L$ et $(\mu^+)_L$, désintégration d'un pion π^- en $(\bar{\nu}_\mu)_R$ et $(\mu^-)_R$

Nota

Les impulsions des particules sont en flèches fines et noires, les spins des particules sont en flèches grasses et colorées, on peut en déduire les hélicités. L'antiparticule du neutrino muonique $(\nu_\mu)_L$ est $(\bar{\nu}_\mu)_R$.

V.3.2 Inversion des nombres quantiques Q, Ba, I^3 , Ge

Lors du passage de la matière à l'antimatière, il y a inversion de la charge électrique Q et des 3 nombres quantiques à partir desquels elle se construit : Ba, I^3 , Ge.

Lors du passage de la matière à l'antimatière, il n'y a pas inversion du spin S^3. Celui-ci apparait comme le complémentaire de Q et ne s'inverse pas lors d'une transformation C ou CP.

Par contre, l'opérateur P intervient, avec une inversion de l'impulsion. On a donc l'hélicité qui s'inverse. Les quarks u_L, d_L, c_L,s_L ont pour antiparticules $\overline{u_L}$, $\overline{d_L}$, $\overline{c_L}$,$\overline{s_L}$ avec par exemple $\overline{u_L} = (\overline{u})_R$.

Rappel
Le moment cinétique orbital L et le moment cinétique de spin S ne sont pas affectés par l'opération de Parité. L'énergie et l'impulsion sont inversées. On a par opération de parité P :

$$L \to L' = L$$
$$S \to S' = S$$
$$p \to p' = -p$$
$$E \to E' = -E$$

V.3.3 Antiquarks $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{c}$, $\bar{s}$

Dans le tableau ci-dessous, on donne les nombres quantiques utilisés dans le Modèle électrofaible, pour les antiquarks gauchers et droitiers de 1ère et 2ème génération.

	Nombres quantiques sources champs				**Charges**		
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge	**Charge électrique** $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	**Hypercharge faible** $\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	**Charge faible** (T,T^3)
$\overline{u_L}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
$\overline{d_L}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$\overline{c_L}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
$\overline{s_L}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(0,0)	$-\frac{1}{3}$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$\overline{u_R}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	(0,0)
$\overline{d_R}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	(0,0)
$\overline{c_R}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	(0,0)	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	(0,0)
$\overline{s_R}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	(0,0)	$-\frac{1}{3}$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	(0,0)

Nota 1 sur le spin et l'hélicité
Puisque l'hélicité s'inverse et non le spin lorsqu'on passe de la matière à l'antimatière, l'hélicité n'est pas égale au spin dans le tableau ci-dessous.

Nota 2 sur les particules de Majorana
Les particules de Majorana sont leur propre antimatière. Elles ont une charge électrique nulle, un isospin nul, un nombre baryonique nul et un nombre de générations nul. Par exemple, on trouve les mésons de type $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, etc.
Les particules de Majorana peuvent avoir un spin non nul et toujours entier.

Nota 3 sur l'antimatière, l'anticharge faible, l'anticharge forte et l'anti hypercharge
L'antimatière concerne l'interaction électromagnétique, elle inverse 3 nombres quantiques qui sont chargés électriquement et qui interviennent dans la relation de Gell-Mann Nishijima $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$, l'isospin I^3, le nombre baryonique Ba et la génération Ge. Par contre, elle n'inverse pas le spin S qui n'est pas chargé électriquement et qui est transporté par le photon γ.

Par analogie avec l'antimatière liée à l'interaction électromagnétique (l'association matière antimatière correspond d'ailleurs à un courant électromagnétique j^{μ}_{Q}), on peut supposer l'existence d'une anticharge faible liée à l'interaction faible (l'association charge faible anticharge faible correspondrait à un courant faible $j^{\mu}_{T^a}$).

Si on suppose une relation $(T, T^3) = f_T((S, S^3), (I, I^3), \frac{Ba}{2})$, 3 nombres quantiques, le spin S^3, l'isospin I^3 et le nombre baryonique Ba sont alors chargés faibles. Le passage de la charge faible à l'anticharge faible, doit inverser ces 3 nombres quantiques.
A l'instar du spin S^3 transporté par le photon γ (neutre électriquement), qui n'est pas modifié lors du passage de la matière à l'antimatière, le nombre quantique source champ transporté par les bosons faibles W^a (non chargés faibles), ne doit pas être modifié lors du passage de la charge faible à l'anticharge faible. On proposera ultérieurement que le nombre quantique source champ transporté par les bosons W^a est le nombre de générations Ge.
On peut voir l'opérateur passant à l'anticharge faible comme une transformation C_{T^a} (à voir s'il y a également des transformations P et/ou T à inclure ?).

On peut faire les mêmes hypothèses pour un passage de l'hypercharge faible à l'antihypercharge faible. Si on suppose une relation : $Y_W = f_Y((S, S^3), Ba, Ge)$, on a une inversion ou un changement de (S, S^3), Ba, Ge, et une conservation de (I, I^3) le nombre quantique source champ que l'on proposera transporté par le boson B.

Idem pour un passage de la charge forte à l'anticharge forte. Si on suppose une relation : $(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$, on a une inversion ou un changement de (S, S^3), (I, I^3), Ge, et une conservation de Ba le nombre quantique source champ que l'on proposera transporté par les particules médiatrices de l'interaction forte.

V.3.4 Canaux croisés et prescription d'E. Stueckelberg et R. Feynman

Suivant la prescription d'E. Stueckelberg et R. Feynman, on a une équivalence entre :
- une antiparticule d'énergie positive,
- une particule d'énergie négative qui remonte le Temps.

et inversement une équivalence entre :
- une particule d'énergie positive,
- une antiparticule d'énergie négative qui remonte le Temps.

Cette prescription appliquée à un processus à 4 particules et à leurs 4 antiparticules :

$$A + B \to C + D$$

permet d'anticiper l'existence de trois autres canaux croisés :

$A + \bar{D} \rightarrow C + \bar{B}$ ou $\bar{C} + B \rightarrow \bar{A} + D$

$\bar{D} + B \rightarrow C + \bar{A}$ ou $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$

$A \rightarrow \bar{B} + C + D$ ou $B \rightarrow \bar{A} + C + D$

Nota
Ces canaux croisés ne sont pas vrais pour le spin, puisque ce dernier ne s'inverse pas lorsqu'on passe de la matière à l'antimatière. Ils s'appliquent seulement pour les nombres quantiques et quantités physiques qui s'inversent lors du passage de la matière à l'antimatière.

V.4 Conclusion du chapitre

On a rappelé et commenté pour les quarks et antiquarks les nombres quantiques que leur attribue le Modèle électrofaible. On a évoqué les 4 nombres quantiques sources champs que l'on souhaite associer aux 4 interactions du Modèle Standard. On a aussi évoqué les 3 charges qui interviennent dans les interactions électromagnétique, faible et hyper, charges que l'on propose de construire à partir de 3 nombres quantiques sources champs. On a également proposé d'interpréter les quarks comme des états excités des nucléons, vis-à-vis du nombre baryonique, suivant l'interaction forte. On a enfin étudié le passage de la matière à l'antimatière et suggéré les hypothèses d'anticharge faible, d'anticharge forte et d'anti hypercharge.

Ces données vont nous permettre dans le prochain chapitre d'examiner les courants électromagnétiques, faibles et hyper que l'on rencontre dans le Modèle électrofaible.

Chapitre VI Courants électromagnétiques, courants faibles et courants hyper, angle de Cabibbo et mécanisme GIM, cas des quarks

Objet du chapitre

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux prolongements du Modèle électrofaible développés dans les années 1960-1970. On va étudier l'angle de Cabibbo proposé par N. Cabibbo en 1963, puis le mécanisme GIM proposé par S. Glashow, J. Illiopoulos et L. Maiani au début des années 1970. A partir de cela, on proposera une analogie dans le cas des quarks entre le courant électromagnétique j_Q^μ qui interagit avec le photon γ, les courants faibles j_{Ta}^μ qui interagissent avec les bosons faibles W^a, le courant hyper $j_{Y_W}^\mu$ qui interagit avec le boson B.

VI.1 Courant électromagnétique j_Q^μ

VI.1.1 Cas des électrons

On rappelle le courant électromagnétique de Dirac pour un électron et un positron :

$$j_Q^\mu = Q\bar{e}\gamma^\mu e$$

avec la fonction d'onde ψ associée à la particule qui est ici symbolisée par la particule elle-même : e.

Si on distingue l'hélicité droite et gauche, on a :

$$j_Q^\mu = Q\overline{e_L}\gamma^\mu e_L + Q\overline{e_R}\gamma^\mu e_R$$

Pour des particules gauchères, on a :

$$j_Q^\mu = Q\overline{e_L}\gamma^\mu e_L$$

On a le diagramme de Feynman type annihilation (annulation de la charge électrique et addition du spin) :

$e_L(Q=-1, S^3=-\frac{1}{2})$

$\gamma(Q=0, S^3=-1)$

$j_Q^\mu = Q\overline{e_L}\gamma^\mu e_L$

Temps

$\overline{e_L}(Q=1, S^3=-\frac{1}{2})$

Figure 12 : annihilation de la charge électrique

On a les diagrammes de Feynman type diffusion (conservation de la charge électrique et inversion du spin) :

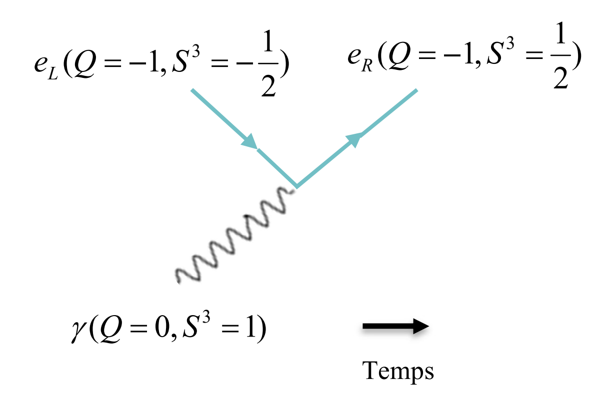


Figure 13 : diffusion de la charge électrique, disparition du photon

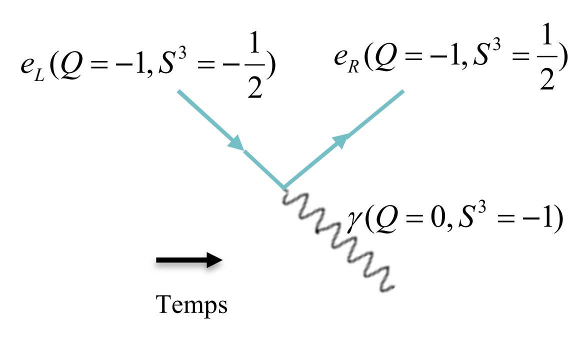


Figure 14 : diffusion de la charge électrique, apparition du photon

VI.1.2 Cas des quarks

Pour un quark u_L et son antiquarks $\overline{u_L}$, on a le courant électromagnétique :

$$j_Q^\mu = Q\overline{u_L}\gamma^\mu u_L$$

On a le diagramme de Feynman type annihilation :

$u_L(Q=1, S^3=-\frac{1}{2})$

$\gamma(Q=0, S^3=-1)$

$j_Q^\mu = Q\overline{e_L}\gamma^\mu e_L$

Temps

$\overline{u_L}(Q=-1, S^3=-\frac{1}{2})$

Figure 15 : annihilation de la charge électrique

On a les diagrammes de Feynman type diffusion (transition hyperfine) :

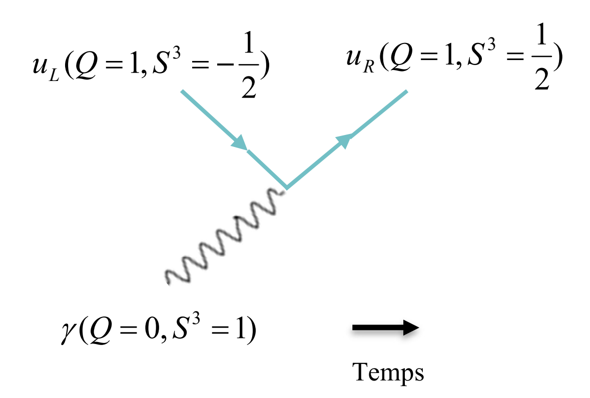


Figure 16 : diffusion de la charge électrique, disparition du photon

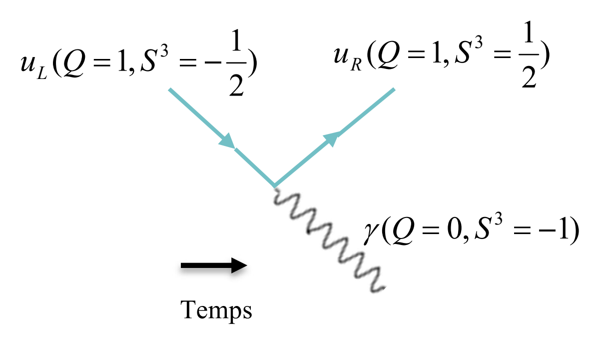


Figure 17 : diffusion de la charge électrique, apparition du photon

VI.1.3 Diffusion : charge Q conservée lorsqu'on inverse le spin S^3

Lorsqu'on inverse le spin S^3 lors d'une transition hyperfine, seule la charge électrique Q est conservée. Les 2 autres charges utilisées dans le Modèle électrofaible, Y_W et (T, T^3) sont modifiées.

Dans le tableau ci-dessous, on visualise le passage d'un quark u_L à un quark u_R, avec inversion du spin S^3, conservation des autres nombres quantiques sources champs, conservation de la charge électrique Q, modification des charges Y_W et (T, T^3).

	Nombres sources champs				**Charges**		
Conservé		**X**	**X**	**X**	**X**		
Modifié	**X**					**X**	**X**
	(S, S^3)	(I, I^3)	Ba	Ge	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	(T, T^3)
u_L ↓	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
u_R	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	(0,0)
d_L ↓	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

d_R	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	(0,0)

VI.1.4 Annihilation : annulation de la charge Q et addition des spin S

On donne les nombres quantiques du courant électromagnétique $j_Q^\mu(\overline{u_L}, u_L)$:

	$j_Q^\mu(\overline{u_L}, u_L)$	$\overline{u_L}$	u_L	**Total**
Charge	Q	-1	1	0
Nombres quantiques sources champs	S^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	Ge	0	0	0
	Ba	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	I^3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Le courant électromagnétique j_Q^μ correspond à un couple u_L $\overline{u_L}$ où les charges électriques Q s'annulent et où les spins S^a s'additionnent, pour donner un photon γ de charge électrique nulle et portant un spin S^a.

Suivant une analogie avec le courant électromagnétique, on va examiner s'il en est de même pour les courants faibles et le courant hyper. C'est-à-dire, on va regarder si :

- on peut faire correspondre le courant faible $j_{T^a}^\mu$ à un couple de quarks et d'antiquarks où les charges faibles T^a s'annulent et où les nombres de génération Ge s'additionnent pour donner un boson W^a de charge faible nulle T^a et portant une génération Ge,
- on peut faire correspondre le courant hyper$j_{Y_W}^\mu$ à un couple de quarks et d'antiquarks où les hypercharges faibles Y_W s'annulent et où les isospins I^a s'additionnent pour donner un boson B d'hypercharge faible nulle et portant un isospin I^a.

Pour cela, on va préalablement s'intéresser à l'angle de Cabibbo, au mécanisme GIM et aux différents courants présents dans ce mécanisme.

VI.2 Le modèle de N. Cabibbo

VI.2.1 Angle de Cabibbo

A la fin des années 1950, lors d'expériences conduites dans les accélérateurs de particules, on observe que les transitions avec changement d'étrangeté $|\Delta St| = 1$ s'effectuent à un taux beaucoup plus faible que les transitions sans changement d'étrangeté $|\Delta St| = 0$. Cela avec un facteur 20 environ.

Au début des années 1960, on a alors simplement un modèle à 3 quarks gauchers qui sont sujets aux interactions faibles : u_L, d_L et s_L.

En 1963, Nicola Cabibbo propose l'explication suivante au taux beaucoup plus faible des transitions avec changement d'étrangeté. Puisque les quarks d_L et s_L ont les mêmes nombres quantiques (excepté pour la saveur, ainsi que pour la masse), il est possible que ce soit, non pas le quark d_L qui interagisse avec un boson faible W^a, mais un mélange $d_L{}'$ constitué de quarks d_L et s_L.

N. Cabibbo définit le mélange :

$$d_L{}' = -d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c$$

avec θ_c l'angle de Cabibbo.

Au lieu d'un doublet faible : $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$, on a un doublet faible du type :

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c \end{pmatrix}$$

qui interagit avec un boson W^a.

Le couplage $u_L\ d_L$ caractérisé par $|\Delta St| = 0$ possède une amplitude de probabilité proportionnelle à Zo^t . De son côté, le couplage $u_L\ \gamma$ caractérisé par $|\Delta St| = 1$ possède une amplitude de probabilité proportionnelle à $sin\,\theta_c$.

On a environ :

$$\frac{sin^2\,\theta_c}{cos^2\,\theta_c} \approx \frac{1}{20}$$

On obtient : $\theta_c \approx 0{,}23 radians$ ou $\theta_c \approx 13{,}04°$

L'idée fondamentale de N. Cabibbo, c'est que les états propres des masse (ou des énergies), ici les quarks d_L et s_L, ne sont pas les états propres participant aux réactions faisant intervenir les bosons W^a.
Ce sont les quarks $d_L{}'$ et $s_L{}'$, définis comme les états propres des saveurs, qui participent à ces réactions. Ils sont reliés aux quarks d_L et s_L par un angle constant, l'angle de Cabibbo θ_c. On symbolise l'angle de Cabibbo par la figure suivante représentant une rotation d'angle θ_c.

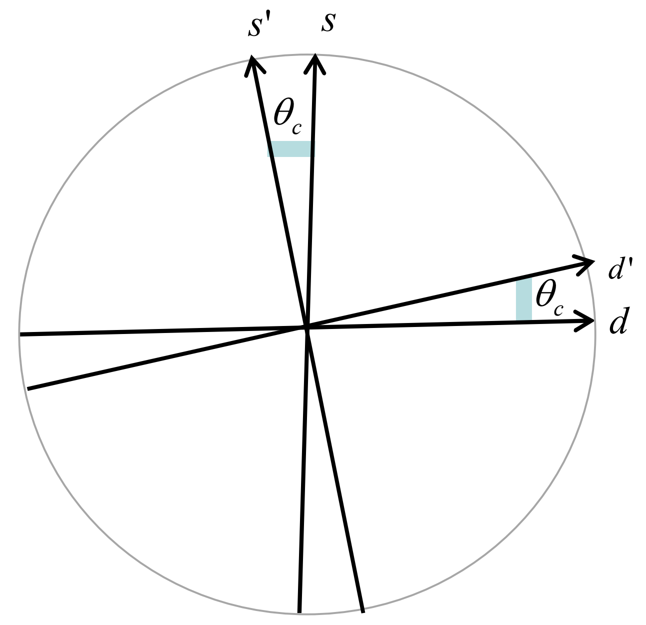


Figure 18 : angle de Cabibbo

Nota
Rappelons que la saveur est une notion initialement liée à la charge nucléaire forte.

On a la relation entre les quarks d_L, s_L, $d_L{}'$, $s_L{}'$ via la matrice de Cabibbo :

$$\begin{pmatrix} d_L{}' \\ s_L{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

Le vecteur de gauche $\begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \end{pmatrix}$ est l'état propre des saveurs, c'est-à-dire l'état propre des réactions faisant intervenir les bosons W^a.

Le vecteur de droite $\begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix}$ est l'état propre des masses ou des énergies.

VI.2.2 Matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, hypothèse d'une 3ème génération de quarks

En 1964, J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, et R. Turlay mettent en évidence la violation de la symétrie CP (transformations de charge parité, passage de la matière à l'antimatière) en étudiant les propriétés des kaons neutres (particules étranges de type mésons) observés lors de désintégrations $\beta^{\pm}$ (on y reviendra dans le prochain mémoire).

En 1973, Makato Kobayashi et Toshihide Maskawa constatent que la violation de la symétrie CP ne peut être expliquée par un simple modèle à 4 quarks. Généralisant la matrice de Cabibbo, ils proposent une matrice M 3×3 de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (matrice CKM) définie à partir de 6 quarks :

$$\begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{pmatrix} = M_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

M. Kobayashi et T. Maskawa prédisent une 3ème génération de quarks : le doublet de quarks b bottom et t top. La découverte du quark bottom est confirmée quelques années plus tard par le Fermilab en 1977.

Il existe plusieurs représentations de la matrice CKM. Une représentation courante est la suivante :
On définit 3 angles d'Euler $\theta_{12} = \theta_c$, θ_{13}, θ_{23} et une phase δ.
On pose :

$$c_{ij} = cos\,\theta_{ij}$$
$$s_{ij} = sin\,\theta_{ij}$$

$$\mathrm{M_{CKM}} = \begin{pmatrix} \mathrm{c_{12}c_{13}} & \mathrm{s_{12}c_{13}} & \mathrm{s_{13}e^{-i\delta}} \\ \mathrm{-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta}} & \mathrm{c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta}} & \mathrm{s_{23}c_{13}} \\ \mathrm{s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta}} & \mathrm{-c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta}} & \mathrm{c_{23}c_{13}} \end{pmatrix}$$

La matrice se décompose par exemple de la façon suivante :

$$M_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une combinaison de trois matrices de rotation, si ce n'est la présence de la phase δ qui traduit la violation de la symétrie CP.

Expérimentalement, on mesure :
$\theta_{12} = \theta_c \approx 13{,}04°$, $\theta_{13} \approx 0{,}20$, $\theta_{23} \approx 2{,}38°$ et une phase $\delta \approx 1{,}20 rad$.

$$M_{CKM} \approx \begin{pmatrix} 0.97 & 0.22 & 0.004 \\ -0.22 & 0.97 & 0.04 \\ 0.008 & -0.04 & 0.99 \end{pmatrix}$$

Nota
On peut interpréter la matrice CKM comme la facilité (la probabilité) qu'a un quark de changer de saveur, par exemple le passage d'un quark d_L à un quark $s_L{}'$.

VI.3 Mécanisme GIM de Glashow-Illiopoulos-Maiani et courants faibles neutres électriquement

VI.3.1 Constatation d'une absence de changement d'étrangeté dans les courants faibles neutres

Expérimentalement, on avait noté l'absence de changement d'étrangeté $|\Delta St| = 0$ dans les réactions faisant intervenir des courants faibles neutres $j^{\mu}_{T^0}$ et des bosons faibles Z^0. On disait alors qu'il n'existe pas de courants faibles neutres changeant la saveur (au sens que l'étrangeté St est l'une des 3 saveurs des quarks et que les saveurs u et d ne sont pas non plus modifiées).

Par exemple, on avait observé des changements d'étrangeté $|\Delta St| = 1$ dans des réactions faisant interagir des courants faibles chargés $j^{\mu}_{T^-}$ et des bosons W^-. C'est le cas dans la désintégration du kaon K^+ :

$$K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + e^- + \bar{\nu}_e$$

Par contre, la réaction de désintégration du kaon K^+ avec changements d'étrangeté $|\Delta St| = 1$ et faisant interagir des courants faibles neutres $j^{\mu}_{T^0}$ et des bosons Z^0 est beaucoup plus rare :

$$K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \nu + \bar{\nu}$$

On a le rapport :

$$\frac{K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \nu + \bar{\nu}}{K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + e^- + \bar{\nu}_e} < 10^{-5}$$

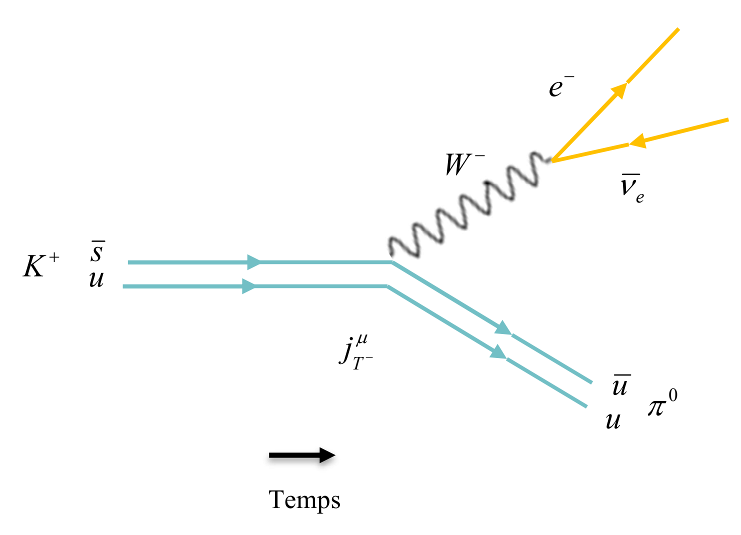


Figure 19 : courant faible chargé $j^{\mu}_{T^-}$ interagissant avec W^-

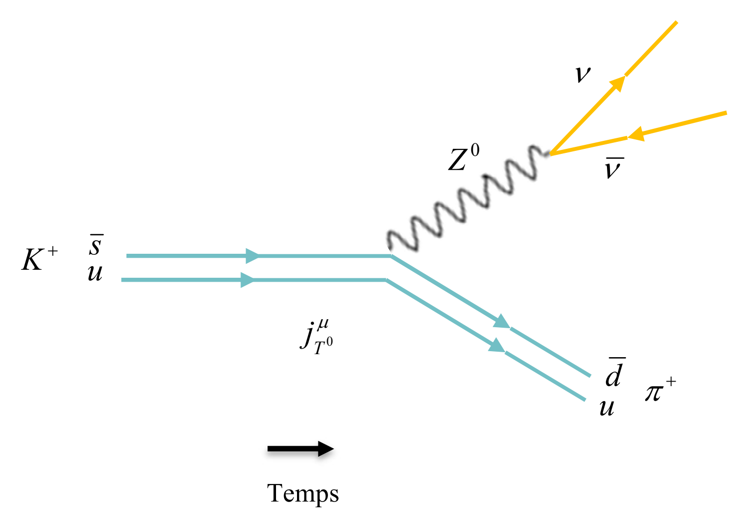


Figure 20 : courant faible neutre $j^{\mu}_{T^0}$ interagissant avec Z^0

Nota
Sur la figure, ν et $\bar{\nu}$ représentent plusieurs générations de neutrinos et d'antineutrinos.

A priori, on comprenait mal ces règles de sélection. Pour expliquer cela, au début des années 1970, S. Glashow, J. Illiopoulos et L. Maiani postulent l'existence d'un 4ème quark, le quark charme c, dans ce qu'on appelle le mécanisme GIM.

VI.3.2 Courant faible neutre $j^{\mu}_{T^3}$ dans l'hypothèse d'un modèle à 3 quarks

On rappelle le courant faible neutre $j^{\mu}_{T^3}$ interagissant avec le boson W^3, courant utilisé dans le Modèle électrofaible, si on utilise l'hypothèse originelle d'un modèle à seulement 3 quarks u, d, s :

$$j^{\mu}_{T^3} = T^3\,\overline{(u \quad -d')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$$

$$j^{\mu}_{T^3} = T^3\,\overline{(u \quad -d')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$$

avec :

$$T^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

T^a sont ici des matrices 2×2, définies à partir des matrices de Pauli $T^a = \frac{\tau^a}{2}$ et générateurs du groupe $SU(2)_T$.

On a suivant la matrice de Cabibbo, le mélange :

$$d' = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c$$

$$\bar{d}' = \bar{d}\cos\theta_c + \bar{s}\sin\theta_c$$

On obtient :

$$j^{\mu}_{T^3} = \frac{1}{2}\overline{(u \quad \cos\theta_c\, d + \sin\theta_c\, s)_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix} u \\ \cos\theta_c\, d + \sin\theta_c\, s \end{pmatrix}_L$$

$$j^{\mu}_{T^3} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_L}\gamma^{\mu}u_L + cos^2\,\theta_c\,\overline{d_L}\gamma^{\mu}d_L + sin^2\,\theta_c\,\overline{s_L}\gamma^{\mu}s_L + cos\,\theta_c\,sin\,\theta_c\,(\overline{d_L}\gamma^{\mu}s_L + \overline{s_L}\gamma^{\mu}d_L)\right)$$

Le 1er terme $\overline{u_L}\gamma^{\mu}u_L + cos^2\,\theta_c\,\overline{d_L}\gamma^{\mu}d_L + sin^2\,\theta_c\,\overline{s_L}\gamma^{\mu}s_L$ correspond à $|\Delta St| = 0$.
Le 2ème terme $cos\,\theta_c\,sin\,\theta_c\,(\overline{d_L}\gamma^{\mu}s_L + \overline{s_L}\gamma^{\mu}d_L)$ correspond à $|\Delta St| = 1$. Il n'est pas ou très peu observé, ce qui reste à expliquer.

VI.3.3 Courant faible neutre $j^{\mu}_{T^3}$ dans l'hypothèse d'un modèle à 4 quarks

Avec un quark charme c, on a une nouvelle contribution et un courant faible neutre de la forme :

$$j^{\mu}_{T^3} = j^{\mu}_{T^3}(u,d')_L + j^{\mu}_{T^3}(c,s')_L$$

$$j^{\mu}_{T^3} = T^3\,\overline{(u \quad -d')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}u\\d'\end{pmatrix}_L + T^3\,\overline{(c \quad -s')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}c\\s'\end{pmatrix}_L$$

$$d' = cos\,\theta_c\,d + sin\,\theta_c\,s$$

$$s' = cos\,\theta_c\,s - sin\,\theta_c\,d$$

Nota
Si on tient compte de trois générations de quarks, on a deux nouvelles contributions et un courant faible neutre de la forme :

$$j^{\mu}_{T^3} = T^3\,\overline{(u \quad -d')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}u\\d'\end{pmatrix}_L + T^3\,\overline{(c \quad -s')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}c\\s'\end{pmatrix}_L + T^3\,\overline{(t \quad -b')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}t\\b'\end{pmatrix}_L$$

On développe la nouvelle contribution :

$$j^{\mu}_{T^3}(c,s')_L = T^3\,\overline{(c \quad -s')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}c\\s'\end{pmatrix}_L$$

$$j^{\mu}_{T^3}(c,s')_L = \frac{1}{2}\overline{(c \quad cos\,\theta_c\,s - sin\,\theta_c\,d)_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}c\\cos\,\theta_c\,s - sin\,\theta_c\,d\end{pmatrix}_L$$

$$j^{\mu}_{T^3}(c,s')_L = \frac{1}{2}\left(\overline{c_L}\gamma^{\mu}c_L + cos^2\,\theta_c\,\overline{s_L}\gamma^{\mu}s_L + sin^2\,\theta_c\,\overline{d_L}\gamma^{\mu}d_L - cos\,\theta_c\,sin\,\theta_c\,(\overline{d_L}\gamma^{\mu}s_L + \overline{s_L}\gamma^{\mu}d_L)\right)$$

En additionnant $j^{\mu}_{T^3}(u,d')_L$ et $j^{\mu}_{T^3}(c,s')_L$, il en ressort que les termes en $|\Delta St| = 1$ s'annulent automatiquement, ce qui explique leur bien plus grande rareté. On a :

$$j^{\mu}_{T^3} = j^{\mu}_{T^3}(u,d')_L + j^{\mu}_{T^3}(c,s')_L$$

$$j^{\mu}_{T^3} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_L}\gamma^{\mu}u_L + (cos^2\,\theta_c + sin^2\,\theta_c)\overline{d_L}\gamma^{\mu}d_L + \overline{c_L}\gamma^{\mu}c_L + (cos^2\,\theta_c + sin^2\,\theta_c)\overline{s_L}\gamma^{\mu}s_L\right)$$

$$j^{\mu}_{T^3} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_L}\gamma^{\mu}u_L + \overline{d_L}\gamma^{\mu}d_L + \overline{c_L}\gamma^{\mu}c_L + \overline{s_L}\gamma^{\mu}s_L\right)$$

Nota
L'angle de Cabibbo disparait de l'expression du courant faible neutre $j^{\mu}_{T^3}$

VI.3.4 « Véritables » courants faibles $j^{\mu}_{T^3}(\overline{d_L}, s_L)$ et $j^{\mu}_{T^3}(\overline{s_L}, d_L)$

Dans l'expression de $j^{\mu}_{T^3}$, on constate que les termes $\overline{d_L}\gamma^{\mu}s_L$ et $\overline{s_L}\gamma^{\mu}d_L$ en $|\Delta St| = 1$ correspondent à ce qu'on cherche. C'est-à-dire des courants que l'on qualifie de « véritables » courants faibles notés $j^{\mu}_{T^3}(\overline{d_L}, s_L) = T^3\overline{d_L}\gamma^{\mu}s_L$ et $j^{\mu}_{T^3}(\overline{s_L}, d_L)_L = T^3\overline{s_L}\gamma^{\mu}d_L$, où lors d'une annihilation, les charges faibles T^3 s'annulent et les nombres de génération Ge s'additionnent.

$d_L(T^3 = -\frac{1}{2}, Ge = 0)$

$W^3(T^3 = 0, Ge = 1)$

$j^{\mu}_{T^3} = T^3\overline{s}_L\gamma^{\mu}d_L$

Temps

$\overline{s}_L(T^3 = \frac{1}{2}, Ge = 1)$

Figure 21 : diagramme annihilation de la charge faible

Lors d'une diffusion, on a conservation de la charge faible T^3 et modification du nombre de générations Ge.

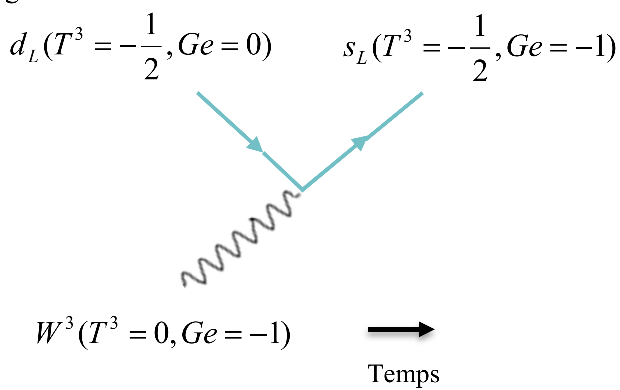


Figure 22 : diagramme diffusion de la charge faible

Etudions maintenant les réactions d'annihilation et de diffusion qui impliquent ces « véritables » courants faibles $j^{\mu}_{T^3}(\overline{d_L}, s_L)$ et $j^{\mu}_{T^3}(\overline{s_L}, d_L)$.

VI.3.5 Annihilation : annulation de la charge faible T^3

Suivant une stricte analogie avec l'interaction électromagnétique, l'objectif recherché, c'est que lors d'une réaction d'annihilation, la charge $(T, T^3) = f_T((S, S^3), (I, I^3), Ba)$ s'annule et seul est conservé le nombre quantique source champ Ge, afin de générer une particule médiatrice.

Pour $j^{\mu}_{T^3}(\overline{d_L}, s_L)$, on calcule les nombres quantiques lors d'une réaction d'annihilation :

	$j^{\mu}_{T^3}(\overline{d_L}, s_L)$	$\overline{d_L}$	s_L	Total
Charge	T^3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
	Ge	0	-1	-1

Nombres quantiques sources champs	Ba	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	I^3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	S^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Pour $j^{\mu}_{T^3}(\overline{s_L}, d_L)$, on calcule les nombres quantiques lors d'une réaction d'annihilation :

	$j^{\mu}_{T^3}(\overline{s_L}, d_L)$	$\overline{s_L}$	d_L	Total
Charge	T^3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Nombres quantiques sources champs	Ge	1	0	1
	Ba	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	I^3	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	S^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Nota 1
On constate que l'on ne peut reproduire pour le « véritable » courant faible une stricte analogie avec le courant électromagnétique. Pour cela, il faudrait éliminer I^3 et S^3 dans la colonne total. A voir pourquoi I^3 et S^3 ne s'annulent pas ?

Nota 2
Lors de la modification de la charge faible (T, T^3), on n'a pas toujours comme à l'attendu conservation de Ge, par exemple lorsqu'on change de génération de $\overline{d_L}$ à s_L.
Si on veut suivre une stricte analogie avec l'électromagnétisme, on doit lors de l'inversion de la charge faible T^3, rester dans la même génération de quarks. A voir pourquoi ?

VI.3.6 Diffusion : charge faible T^3 conservée lorsqu'on change de générations

Dans le tableau ci-dessous, on visualise le passage d'un quark u_L à un quark c_L, passage de type diffusion, avec conservation de la charge faible (T, T^3) et modification de Ge.

	Nombres sources champs				**Charges**		
Conservé	**X**		**X**		**X**	**X**	**X**
Modifié		**X**		**X**			
	(S, S^3)	(I, I^3)	Ba	Ge	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	(T, T^3)
u_L ↓	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
c_L	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(0,0)	$+\frac{1}{3}$	+1	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

On constate qu'on ne peut reconduire une stricte analogie avec la diffusion de l'interaction électromagnétique puisque :

- le nombre quantique source champ (I, I^3) est modifié alors qu'on souhaiterait qu'il ne le soit pas,
- les charges Q et Y_W sont conservées alors qu'on souhaiterait qu'elles soient modifiées.

Nota 1
Pour expliquer le 1er souci, à voir si au lieu de prendre Ge comme nombre quantique source champ transporté par la particule médiatrice, il ne faut pas plutôt prendre un nombre quantique fonction de Ge et (I, I^3) ?

Pour expliquer le 2ème souci, à voir si au lieu de prendre (T, T^3) comme charge faible conservée lors d'un changement de génération, il ne faut pas plutôt associer les 3 charges : Q, Y_W et (T, T^3) dans une véritable charge faible ?

Nota 2
On observe que la charge faible (T, T^3) n'est pas conservée lorsqu'on inverse le nombre d'étrangeté St (ou le nombre de générations Ge). Par exemple, lorsqu'on passe de s à $\bar{s}$, on inverse la charge faible de $T^3 = -\frac{1}{2}$ à $T^3 = +\frac{1}{2}$.
Par contre, la charge faible T^3 reste bien conservée, lorsqu'on passe de u_L à c_L, ou de d_L à s_L, avec T^3 qui reste respectivement égale à $T^3 = +\frac{1}{2}$ et $T^3 = -\frac{1}{2}$.

VI.4 Courants faibles chargés électriquement

VI.4.1 Courant faible chargé $j^{\mu}_{T^+}$

Le Modèle électrofaible définit un courant faible chargé $j^{\mu}_{T^+}$ (transportant une charge faible T^+), interagissant avec le boson W^+ (porteur d'une charge faible T^3 positive) :

$$j^{\mu}_{T^+} = \overline{(u \quad c)}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L$$

$$j^{\mu}_{T^+} = \overline{(u \quad c)}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L$$

En développant, on obtient :

$$j^{\mu}_{T^+} = \cos\theta_c\, \overline{u_L}\gamma^{\mu} d_L + \sin\theta_c\, \overline{u_L}\gamma^{\mu} s_L - \sin\theta_c\, \overline{c_L}\gamma^{\mu} d_L + \cos\theta_c\, \overline{c_L}\gamma^{\mu} s_L$$

$$j^{\mu}_{T^+} = \cos\theta_c\, (\overline{u_L}\gamma^{\mu} d_L + \overline{c_L}\gamma^{\mu} s_L) + \sin\theta_c\, (\overline{u_L}\gamma^{\mu} s_L - \overline{c_L}\gamma^{\mu} d_L)$$

Nota 1
Le courant faible chargé $j^{\mu}_{T^+}$ est donné ici à partir de la matrice de Cabibbo et pour 2 générations de quarks.

Nota 2
A l'instar du photon γ qui ne porte aucune charge électrique Q, la particule médiatrice W^3 ne porte aucune charge faible T^3. Elle est neutre suivant l'interaction faible. Cependant, contrairement aux photons, les bosons W^1, W^2, W^3 peuvent réagir entre eux via des termes du genre $g_T \varepsilon^{123} W^{1\mu} W^{2\nu}$.

Les bosons W^+ et W^- sont porteurs d'une charge faible T^3 respectivement positive et négative. Cette charge faible T^3 est chargé électriquement, d'où la charge électrique des W^+ et W^-.

Les bosons W^+ et W^- sont définis tels des opérateurs d'échelle qui peuvent augmenter ou diminuer d'une unité la charge faible T^3 des fermions de charges faibles T^+ et T^-, avec lesquels ces bosons faibles interagissent.
On a par exemple le terme d'interaction entre les courants faibles chargés $j^\mu_{T^+}$ et $j^\mu_{T^-}$ (représentants des fermions) et les particules médiatrices W^+ et W^- :

$$E = -ig_T\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(j^\mu_{T^+}W^\mu_+ + j^\mu_{T^-}W^\mu_-)\right]$$

Nota 3
On a pour le courant faible chargé électriquement et négativement :

$$j^\mu_{T^-} = \overline{(d' \quad s')}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L$$

Nota 4, comment le Modèle électrofaible définit les courants faibles chargés ?
On utilise le mécanisme de Brout-Englert-Higgs pour attribuer une masse aux particules. On utilise également ce qu'on appelle l'interaction de Yukawa (voir les travaux de S. Weinberg en 1967 et d'A. Salam pour attribuer une masse aux fermions).

On rappelle l'interaction de Yukawa utilisée dans le Modèle électrofaible entre un champ scalaire φ et un fermion ψ :

$$L_{Yuhaw} = -g_l(\bar{\psi}_L\varphi\psi_R + \bar{\psi}_R\varphi^\dagger\psi_L)$$

avec g_l une constante de couplage arbitraire.

En effectuant les transformations de matrices adéquates, où les états propres sont ceux où les quarks ont une masse, on trouve pour les courants faibles chargés :

$$j^\mu_{T^+} = \overline{(u \quad c)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L$$

$$(\mu = t, x, y, z)$$

Avec trois générations de quarks, on a :

$$j^\mu_{T^+} = \overline{(u \quad c \quad t)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L$$

Nota 5
Seules les particules gauchères et les antiparticules droitières sont sujettes à l'interaction faible. On a :

$$\bar{\psi}_L = \overline{(u \quad c)}_L = \left((\bar{u})_R \quad (\bar{c})_R\right)$$

VI.4.2 « Véritable » courant hyper $j^\mu_{Y_W}(\overline{u_L}, d_L)$

On note que le terme $\overline{u_L}\gamma^\mu d_L$ correspond au « véritable » courant hyper $j^\mu_{Y_W}$ que l'on cherche, c'est-à-dire un courant où lors d'une annihilation, les hypercharges faibles Y_W s'annulent et les isospins I^3 s'additionnent.

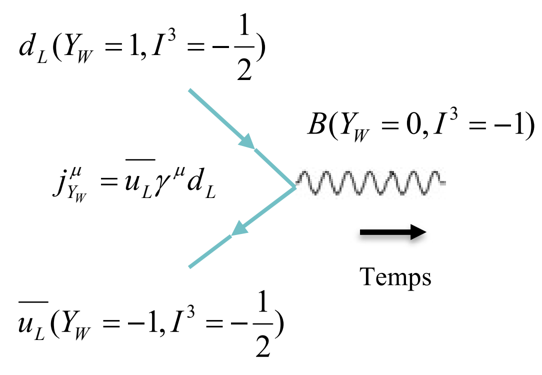


Figure 23 : diagramme annihilation de l'hypercharge faible

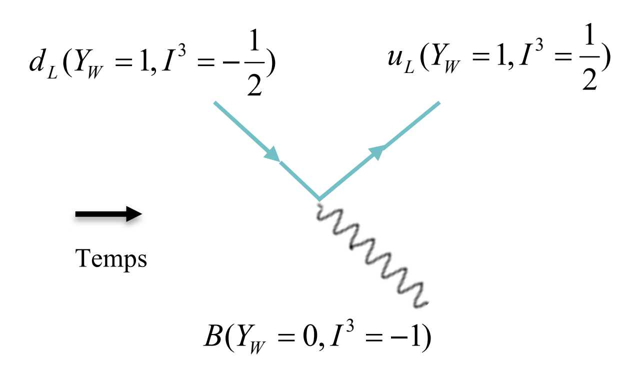


Figure 24 : diagramme diffusion de l'hypercharge faible

VI.4.3 Annihilation : annulation de l'hypercharge faible Y_W

Suivant une stricte analogie avec l'électromagnétisme, l'objectif recherché, c'est que lors d'une réaction d'annihilation, la charge $Y_W = f_{Co}((S, S^3), Ba, Ge)$ s'annule et seul est conservé le nombre quantique source champ (I, I^3), afin de générer une particule médiatrice.

Pour $j^{\mu}_{Y_W}$, on calcule les nombres quantiques lors d'une réaction d'annihilation :

	$j^{\mu}_{Y_W}(\overline{u_L}, d_L)$	$\overline{u_L}$	d_L	**Total**
Charge	Y_W	-1	1	0
Nombres quantiques sources champs	I^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	Ge	0	0	0
	Ba	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	S^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Lors d'une réaction d'annihilation, il faudrait donc à priori éliminer S^3 dans la colonne total.

VI.4.4 Diffusion : hypercharge faible Y_W conservée lorsqu'on inverse l'isospin I^3

Dans le tableau ci-dessous, on visualise le passage d'un quark u_L à un quark d_L, avec inversion de l'isospin I^3, conservations des autres nombres quantiques sources champs, conservation de l'hypercharge faible Y_W, modification des charges Q et (T, T^3).

	Nombres sources champs	**Charges**

Conservé	**X**		**X**	**X**		**X**	
Modifié		**X**			**X**		**X**
	(S,S^3)	(I,I^3)	Ba	Ge	$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	(T,T^3)
u_L ↓	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
d_L	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
u_R ↓	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	(0,0)
d_R	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	(0,0)

La conservation de l'hypercharge faible Y_W lors du passage d'un quark d à un quark u (ou d'un neutron à un proton) ne fonctionne que pour les particules gauchères. C'est-à-dire les particules qui participent également à l'interaction faible.
Il y a donc à priori un lien fort entre l'interaction hyper, l'interaction faible, l'hélicité et le spin.

VI.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a proposé de retrouver dans des contributions de courants faibles neutres, ce qu'on appelle le « véritable » courant faible. C'est-à-dire en analogie avec le courant électromagnétique, un courant faible formé par un couple de particules dont les charges faibles T^3 respectifs s'annulent et dont les nombres de génération Ge respectifs s'additionnent.
De même, on a proposé de retrouver dans des contributions de courants faibles chargés, ce qu'on appelle le « véritable » courant hyper. C'est-à-dire en analogie avec le courant électromagnétique, un courant hyper formé par un couple de particules dont les hypercharges Y_W respectifs s'annulent et dont les nombres d'isospin I^3 respectifs s'additionnent.

Dans le prochain chapitre, on va étudier si ce qu'on vient de proposer pour les quarks sur les courants électromagnétiques, faibles et hyper, se vérifie aussi pour les leptons, en sachant que ces derniers sont également sujets aux trois interactions électromagnétique, faible et hyper.

Chapitre VII Courants faibles et courants hyper, angle de Pontecorvo, cas des leptons

Objectif du chapitre
Les leptons se distinguent essentiellement des baryons par le fait qu'ils ne participent pas à l'interaction forte (charge forte nulle pour les leptons).
On s'intéressera d'abord ici à l'oscillation des neutrinos, un phénomène selon lequel un neutrino possédant une saveur leptonique (neutrino électronique, muonique ou tauique) peut être mesuré ultérieurement avec une saveur différente. On étudiera ensuite la matrice de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, une matrice analogue pour les leptons à la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa pour les quarks, et qui permet de décrire les oscillations des neutrinos.
Pour l'interaction faible et l'interaction hyper, on soulignera que les similitudes sont qualitativement très grandes entre baryons et leptons. Cela permettra de proposer le même type de courants faibles et hyper.

VII.1 Masse et oscillation des neutrinos

Vers 1957, B. Pontecorvo propose la possibilité d'une masse faible, mais non nulle des neutrinos. Il souligne que rien n'impose que les états propres des saveurs des neutrinos (c'est-à-dire les états propres des réactions faisant intervenir les bosons W^a), soient égaux aux états propres des masses (ou des énergies). Ces états propres des saveurs seraient plutôt une combinaison linéaire des états propres des masses.
Il s'inspire du modèle d'oscillation des kaons neutres (de K^0 à $\bar{K}^0$) et propose un modèle d'oscillation des neutrinos, passant d'une saveur à une autre.

VII.2 Matrice Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (matrice PMNS)

VII.2.1 Matrice à 2 dimensions et angle de Pontecorvo

En 1962, pour décrire les oscillations de neutrinos proposées par B. Pontecorvo, Z. Maki, M. Nakagawa et S. Sakata introduisent la matrice de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (matrice PMNS), l'analogue pour les leptons de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (matrice CKM) pour les quarks.

Comme la matrice CKM, on peut interpréter la matrice PMNS comme la facilité (la probabilité) qu'a un neutrino de changer de saveur.

On rappelle la matrice de Cabibbo :

$$\begin{pmatrix} {d_L}' \\ {s_L}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

On a une matrice analogue (en deux dimensions) de la matrice de Cabibbo pour les neutrinos de 1ère et 2ème génération :

$$\begin{pmatrix} {\nu_e}' \\ {\nu_\mu}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & \sin\theta_p \\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

avec θ_p l'angle de Pontecorvo

Le vecteur de gauche $\begin{pmatrix} {\nu_e}' \\ {\nu_\mu}' \end{pmatrix}$ est l'état propre des saveurs, c'est-à-dire l'état propre des réactions faisant intervenir les bosons W^a.

Le vecteur de droite $\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix}$ est l'état propre des masses ou des énergies.

VII.2.2 Matrice à 3 dimensions

En 1962, la matrice introduite par Z. Maki, M. Nakagawa et S. Sakata n'implique que deux générations de neutrinos ν_e et ν_μ.
En 1973, M. Kobayashi et T. Maskawa prédisent une 3[ème] génération de quarks et de leptons, nécessaire pour expliquer la violation CP. On a également une 3[ème] génération d'électrons avec τ et une 3[ème] génération de neutrinos avec ν_τ.

On obtient l'extension de la matrice PMNS de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata à 3 générations de neutrinos :

$$\begin{pmatrix}\nu_e{}'\\ \nu_\mu{}'\\ \nu_\tau{}'\end{pmatrix} = M_{PMNS}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U_{e1} & U_{e2} & U_{e3}\\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3}\\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}$$

Comme pour la matrice CKM, il existe plusieurs représentations de la matrice PMNS. On reprend la même représentation que pour la matrice CKM.

On définit 3 angles d'Euler $\theta_{12} = \theta_p$, θ_{13}, θ_{23} et une phase δ.

$$c_{ij} = cos\,\theta_{ij}$$
$$s_{ij} = sin\,\theta_{ij}$$

$$M_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

La matrice se décompose par exemple de la façon suivante :

$$M_{PMNS} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_{23} & s_{23}\\ 0 & -s_{23} & c_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i}\\ 0 & 1 & 0\\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{12} & s_{12} & 0\\ -s_{12} & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une combinaison de trois matrices de rotation, si ce n'est la présence de la phase δ qui traduit la violation de la symétrie CP.

Expérimentalement, on mesure (avec des valeurs qui varient sensiblement suivant les expériences) :
$\theta_{12} = \theta_p \approx 33{,}62°$, $\theta_{13} \approx 8{,}54°$, $\theta_{23} \approx 47{,}2°$ et une phase $\delta \approx 234°$

$$M_{PMNS} \approx \begin{pmatrix}0.82 & 0.54 & -0.15\\ -0.35 & 0.70 & 0.62\\ 0.44 & -0.55 & 0.70\end{pmatrix}$$

On avait pour la matrice CKM :
$\theta_{12} = \theta_c \approx 13{,}04°$, $\theta_{13} \approx 0{,}20°$, $\theta_{23} \approx 2{,}38°$ et une phase $\delta \approx 1{,}20rad$

$$M_{CKM} \approx \begin{pmatrix}0.97 & 0.22 & 0.004\\ -0.22 & 0.97 & 0.04\\ 0.008 & -0.04 & 0.99\end{pmatrix}$$

VII.3 Les leptons e^- ,ν_e ,μ^- ,ν_μ de 1ère et 2ème génération

Pour les leptons de 1ère et 2ème génération, on propose le tableau suivant en analogie avec les quarks :

	Nombres quantiques sources champs				**Charges**		
	$(S,S^3)H$	(I,I^3)	Ba	Ge	**Charge électrique** $Q = I^3 - \frac{Le}{2} + \frac{Ge}{2}$	**Hypercharge faible** $\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	**Charge faible** (T,T^3)
e_L^-	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+1$	0	-1	-1	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
ν_{eL}	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$+1$	0	0	-1	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$
μ_L^-	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(0,0)$	$+1$	-1	-1	-1	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
$\nu_{\mu L}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(0,0)$	$+1$	$+1$	0	-1	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$
e_R^-	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$+1$	0	-1	-2	$(0,0)$
ν_{eR} non observé	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$+1$	0	0	0	$(0,0)$
μ_R^-	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$(0,0)$	$+1$	-1	-1	-2	$(0,0)$
$\nu_{\mu R}$ non observé	$(\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$	$(0,0)$	$+1$	$+1$	0	0	$(0,0)$

Note 1
Usuellement, on n'attribue pas d'isospin (I,I^3) et de Ge aux leptons. En effet, (I,I^3) et Ge sont considérés comme la charge forte dans le Modèle des quarks. Or, les leptons ne sont pas sujets à l'interaction forte et ont donc une charge forte nulle.

Dans ce mémoire, on suggère de distinguer charge forte Co de (I,I^3) et Ge (en proposant néanmoins que le premier nombre quantique de type charge est fonction des deux suivants de type source champ). On décide alors d'attribuer un isospin (I,I^3) et un Ge aux leptons en analogie avec les quarks. Cela permet de vérifier la relation pour les leptons :

$$Q = I^3 - \frac{Le}{2} + \frac{Ge}{2}$$

Ici, (I,I^3) et Ge ne sont pas traités en analogie avec une charge, mais en analogie avec le spin (S,S^3), c'est-à-dire un nombre quantique source champ qui en étant modifié, génère un courant de charge.

Nota 2
Plusieurs réactions entre particules indiquent que les quarks de 1ère génération u et d, et les leptons de 1ère génération e^- et ν_e ont à priori le même Ge.
Par exemple, on a la réaction de désintégration d'un pion $\pi^0(u\bar{u}/d\bar{d})$ en un électron, un positron et un photon :

$$\pi^0(u\bar{u}/d\bar{d}) \rightarrow \gamma + e^- + \bar{e}^+$$

Pour que le Ge soit identique de part et d'autre, il faut un Ge de même valeur pour les quarks et leptons de 1ère génération.

Nota 3 sur l'interaction hyper, à la fois attractive, répulsive et de portée infinie
Suivant les hypothèses de S. Glashow, les hadrons (particules du noyau) gauchers ont une hypercharge faible Y_W positive et les leptons gauchers une hypercharge faible Y_W négative. De signe identique pour l'hypercharge faible, les hadrons gauchers se repoussent entre eux. De même, de signe identique pour l'hypercharge faible, les leptons gauchers se repoussent entre eux. De signe opposé pour l'hypercharge faible, les leptons gauchers et les hadrons gauchers s'attirent entre eux. Par exemple, un neutron gaucher d'hypercharge faible $Y_W = 1$ et un électron gaucher d'hypercharge $Y_W = -1$ s'attirent.
A noter que ces attractions et répulsions ont une portée infinie, puisque le boson B porteur de l'interaction hyper est à priori présenté sans masse dans le Modèle électrofaible.

On remarquera que le cas des particules droitières est plus complexe, car suivant le Modèle électrofaible certaines particules droitières n'ont pas de Y_W et ne participent donc pas à l'interaction hyper.

VII.4 Courants faibles neutres

VII.4.1 Courant faible neutre à partir de la matrice PMNS

Avec deux générations de leptons gauchers, on a un courant faible neutre de la forme :

$$j^{\mu}_{T^3} = j^{\mu}_{T^3}(e^-, \nu_e{}')_L + j^{\mu}_{T^3}(\mu, \nu_\mu{}')_L$$

$$j^{\mu}_{T^3} = T^3\,\overline{(e^- \quad -\nu_e{}')_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e{}' \end{pmatrix}_L + T^3\,\overline{(\mu \quad -\nu_\mu{}')_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu{}' \end{pmatrix}_L$$

On a :

$$j^{\mu}_{T^3}(e^-, \nu_e{}')_L = \frac{1}{2}(\overline{e_L}\gamma^\mu e_L + cos^2\,\theta_p\,\overline{\nu_{e_L}}\gamma^\mu \nu_{e_L} + sin^2\,\theta_p\,\overline{\nu_{\mu_L}}\gamma^\mu \nu_{\mu_L} + cos\,\theta_p\,sin\,\theta_p\,(\overline{\nu_{e_L}}\gamma^\mu \nu_{\mu_L} + \overline{\nu_{\mu_L}}\gamma^\mu \nu_{e_L}))$$

Le 1er terme $\overline{e_L}\gamma^\mu e_L + cos^2\,\theta_p\,\overline{\nu_{e_L}}\gamma^\mu \nu_{e_L} + sin^2\,\theta_p\,\overline{\nu_{\mu_L}}\gamma^\mu \nu_{\mu_L}$ correspond à $|\Delta St| = 0$.
Le 2ème terme $cos\,\theta_p\,sin\,\theta_p\,(\overline{\nu_{e_L}}\gamma^\mu \nu_{\mu_L} + \overline{\nu_{\mu_L}}\gamma^\mu \nu_{e_L})$ correspond à $|\Delta St| = 1$.

VII.4.2 « Véritable » courant faible $j^{\mu}_{T^3}(\overline{\nu_{e_L}}, \nu_{\mu_L})$

On note que les termes $\overline{\nu_{e_L}}\gamma^\mu \nu_{\mu_L}$ et $\overline{\nu_{\mu_L}}\gamma^\mu \nu_{e_L}$ en $|\Delta St| = 1$ correspondent à ce qu'on cherche, de « véritables » courants faibles notés $j^{\mu}_{T^3}(\overline{\nu_{e_L}}, \nu_{\mu_L})$ et $j^{\mu}_{T^3}(\overline{\nu_{\mu_L}}, \nu_{e_L})$, où lors d'une annihilation, les charges faibles T^3 s'annulent et les nombres de génération Ge s'additionnent.

$\nu_{eL}(T^3 = \frac{1}{2}, Ge = 0)$

$W^3(T^3 = 0, Ge = -1)$

$j^{\mu}_{T^3} = T^3\,\overline{\nu_{\mu L}}\gamma^\mu \nu_{eL}$

Temps

$\overline{\nu_{\mu L}}(T^3 = -\frac{1}{2}, Ge = -1)$

Figure 25 : diagramme annihilation de la charge faible

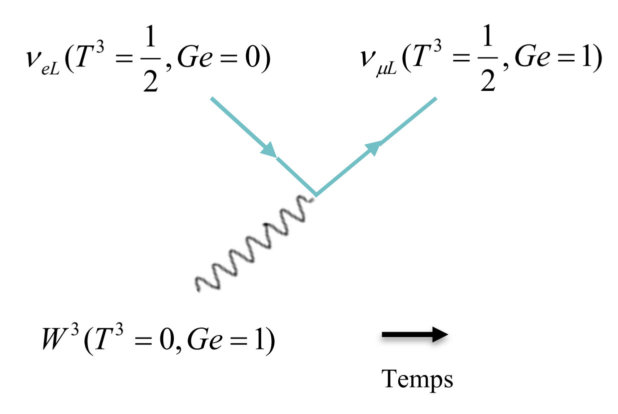


Figure 26 : diagramme diffusion de la charge faible

VII.4.3 Annihilation : annulation de la charge T^3

Pour $j^{\mu}_{T^3}(\overline{\nu_{e}}_L, \nu_{\mu_L})$, on calcule les nombres quantiques lors d'une réaction d'annihilation :

	$j^{\mu}_{T^3}(\overline{\nu_{e}}_L, \nu_{\mu_L})$	$\overline{\nu_{e}}_L$	ν_{μ_L}	Total
Charge	T^3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Nombres quantiques sources champs	Ge	0	1	1
	L_e	-1	1	0
	I^3	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
	S^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Nota 1
Comme pour les quarks, lors d'une diffusion avec changement de Ge, les 3 charges Q, Y_W, (T, T^3) sont conservées. A voir pourquoi, puisqu'on souhaite que simplement (T, T^3) soit conservée ?

Nota 2
A voir également pourquoi I^3 et S^3 ne s'annulent pas comme à l'attendu ?

VII.4.4 Diffusion : charge faible T^3 conservée lorsqu'on change de générations

Dans le tableau ci-dessous, on visualise le passage de e_L à μ_L, passage de type diffusion, avec conservation de la charge faible (T, T^3) et modification de Ge.

	Nombres sources champs				**Charges**		
Conservé	X		X		X	X	X
Modifié		X		X			
	(S, S^3)	(I, I^3)	L_e	Ge	$\boldsymbol{Q = I^3 - \frac{Le}{2} + \frac{Ge}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{Y_W}{2} = Q - T^3}$	$\boldsymbol{(T, T^3)}$

e_L ↓	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	1	0	-1	-1	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
μ_L	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(0,0)$	1	-1	-1	-1	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

VII.5 Courants faibles chargés

VII.5.1 Courant faible chargé $j^{\mu}_{T^-}$

Le Modèle électrofaible détermine un courant faible chargé $j^{\mu}_{T^-}$ portant la charge faible T^- interagissant avec le boson W^- :

$$j^{\mu}_{T^-} = \overline{(e \quad \mu)_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}\nu_e{}' \\ \nu_{\mu}{}'\end{pmatrix}_L$$

$$j^{\mu}_{T^-} = \overline{(e \quad \mu)_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}\cos\theta_p & \sin\theta_p \\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_e{}' \\ \nu_{\mu}{}'\end{pmatrix}_L$$

En développant, on obtient :

$$j^{\mu}_{T^-} = (\cos\theta_p\,\overline{e_L}\gamma^{\mu}\nu_{e_L} + \sin\theta_p\,\overline{e_L}\gamma^{\mu}\nu_{\mu_L} - \sin\theta_p\,\overline{\mu_L}\gamma^{\mu}\nu_{e_L} + \cos\theta_p\,\overline{\mu_L}\gamma^{\mu}\nu_{\mu_L})$$

$$j^{\mu}_{T^-} = \cos\theta_p\,(\overline{e_L}\gamma^{\mu}\nu_{e_L} + \overline{\mu_L}\gamma^{\mu}\nu_{\mu_L}) + \sin\theta_p\,(\overline{e_L}\gamma^{\mu}\nu_{\mu_L} - \overline{\mu_L}\gamma^{\mu}\nu_{\mu_L})$$

Nota 1
Le courant est donné à partir de la matrice PMNS et pour 2 générations de leptons.

Nota 2
On a le courant faible chargé électriquement et positivement :

$$j^{\mu}_{T^+} = \overline{(\nu_e{}' \quad \nu_{\mu}{}')_L}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}e \\ \mu\end{pmatrix}_L$$

VII.5.2 Courants hyper $j^{\mu}_{Y_W}(\overline{e_L}, \nu_{e_L})$ et $j^{\mu}_{Y_W}(e_L, \overline{\nu_{e_L}})$

On note que le terme $\overline{e_L}\gamma^{\mu}\nu_{e_L}$ correspond au courant hyper $j^{\mu}_{Y_W}$ que l'on cherche, c'est-à-dire un courant où lors d'une annihilation, les hypercharges faibles Y_W s'annulent et les isospins I^3 s'additionnent.

On donne les diagrammes de Feynman pour le courant $\overline{\nu_{e_L}}\gamma^{\mu}e_L$.

$e_L(Y_W = -1, I^3 = -\frac{1}{2})$

$B(Y_W = 0, I^3 = -1)$

$j^{\mu}_{Y_W} = \overline{\nu_{eL}}\gamma^{\mu}e_L$

Temps

$\overline{\nu_{eL}}(Y_W = 1, I^3 = -\frac{1}{2})$

Figure 27 : diagramme création de l'hypercharge faible

Nota
Soulignons l'instabilité apparente du boson B, qui lors d'un désintégration béta, interagit rapidement avec un couple électron e_L, antineutrinos $\overline{\nu_{eL}}$.

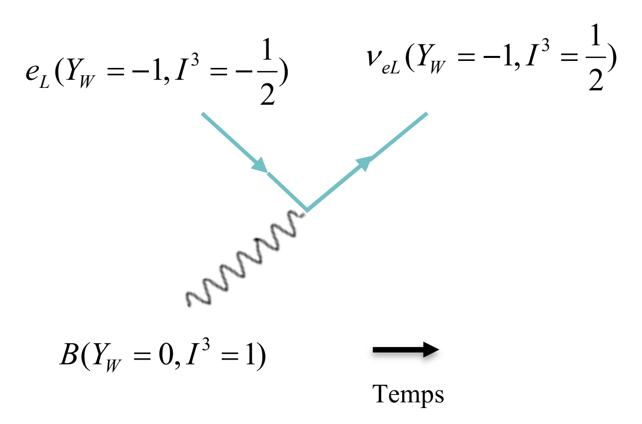


Figure 28 : diagramme diffusion de l'hypercharge faible

Comme pour les quarks, cela ne fonctionne que pour les leptons gauchers, avec l'hypercharge faible Y_W qui reste constante lors de l'inversion de l'isospin I^3. Pour les leptons droitiers, le neutrino ν_{eR} est non observé.

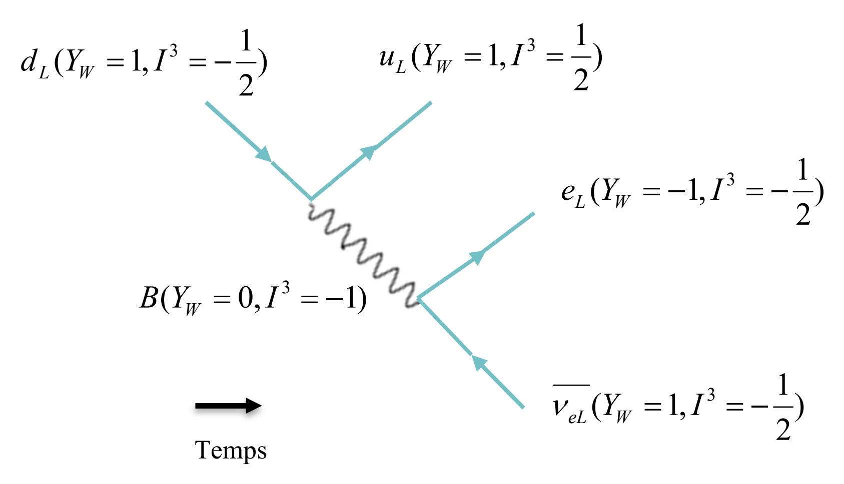


Figure 29 : diagramme diffusion chez les quarks et création chez les leptons

VII.5.3 Diffusion : hypercharge faible Y_W conservée lorsqu'on inverse l'isospin I^3

Dans le tableau ci-dessous, on visualise le passage de e_L à ν_{eL}, avec inversion de l'isospin I^3, conservations des autres nombres quantiques sources champs, conservation de l'hypercharge faible Y_W, modification des charges Q et (T, T^3).

	Nombres sources champs				**Charges**		
Conservé	X		X	X		X	
Modifié		X			X		X

	(S, S^3)	(I, I^3)	L_e	Ge	$\boldsymbol{Q = I^3 - \frac{Le}{2} + \frac{Ge}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{Y_W}{2} = Q - T^3}$	$\boldsymbol{(T, T^3)}$
e_L ↓	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	1	0	-1	-1	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
ν_{eL}	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	0	0	-1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

VII.5.4 Annihilation : annulation de l'hypercharge faible Y_W

Pour $j^{\mu}_{Y_W}(\overline{e_L}, \nu_{e_L})$, on calcule les nombres quantiques lors d'une réaction d'annihilation :

	$j^{\mu}_{Y_W}(\overline{e_L}, \nu_{e_L})$	$\overline{e_L},$	ν_{e_L}	Total
Charge	Y_W	1	-1	0
Nombres quantiques sources champs	I^3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Ge	0	0	0
	L_e	-1	1	0
	S^3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

VII.6 Conclusion

Pour les interactions faible et hyper, la conclusion est qualitativement identique pour les quarks et les leptons.

Les courants faibles neutres contiennent ce qu'on appelle le « véritable » courant faible, c'est-à-dire en analogie avec le courant électromagnétique, un courant faible formé d'un couple de leptons dont les charges faibles T^3 respectifs s'annulent et dont les nombres de génération respectifs Ge s'additionnent.
Les courants faibles chargés contiennent ce qu'on appelle le « véritable » courant hyper, c'est-à-dire en analogie avec le courant électromagnétique, un courant hyper formé d'un couple de leptons dont les hypercharges faibles Y_W respectifs s'annulent et dont les nombres d'isospin I^3 respectifs s'additionnent.

Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser à l'interaction forte et aux particules du noyau formées de quarks, les hadrons, les seules particules sujettes à cette interaction.

Chapitre VIII Proposition d'un modèle pour l'interaction forte en analogie avec l'interaction électromagnétique

Objet du chapitre

On rappelle d'abord quelques généralités sur deux propriétés de l'interaction forte : le confinement de charge et la liberté asymptotique. Ces propriétés sont développées au début des années 1970 dans le cadre de la Chromodynamique quantique.

En stricte analogie avec les interactions électromagnétique, faible et hyper développées dans les chapitres précédents, on propose ensuite un modèle pour l'interaction forte fondé sur une charge forte de couleur avec des particules médiatrices non chargées de couleur, transportant un nombre baryonique, interagissant avec des particules chargées forte, modifiant leur nombre baryonique et générant un courant fort j_{Co}^{μ}.

VIII.1 Généralités sur le confinement de charge et la liberté asymptotique

VIII.1.1 Porté limitée d'une force expliquée par la notion de confinement de charge

Le confinement de charge, c'est l'idée que des charges opposées s'attirent et que ces charges s'attirent tellement qu'au-delà d'une certaine échelle, il est impossible de les observer séparées. On obtient alors, au-delà de cette échelle, des charges nulles, neutres ou de couleur blanche pour reprendre la terminologie de la Chromodynamique quantique. L'interaction qui en découle (même si elle a une portée infinie), n'a plus d'effets.

VIII.1.2 Porté limitée d'une force expliquée par la décroissance rapide du potentiel

La force électrostatique et l'interaction forte possèdent toutes deux des charges qui prennent des valeurs opposées et qui s'attirent. L'attractivité de charges opposées de la force électrostatique et de l'interaction forte (suivant les idées de H. Yukawa) est décrite respectivement par :

- le potentiel coulombien

$$qA^t(r) = \frac{-g_Q{}^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- le potentiel de Yukawa

$$\psi(r) = -g_{Co}{}^2 \frac{e^{-(\frac{m_{mes}c}{\hbar}r)}}{r}$$

$g_Q{}^2 = e^2$ et $g_{Co}{}^2$ sont les constantes de couplage respectivement de la force électrostatique et de l'interaction forte, g_Q et g_{Co} sont les charges électriques et fortes élémentaires.
m_{mes} est la masse du mésotron, la particule médiatrice massique proposée par H. Yukawa.

Le potentiel coulombien décroit en $\frac{1}{r}$ jusqu'à l'infini, la portée de la force électrostatique est infinie.

Le potentiel de Yukawa décroit beaucoup plus vite à cause du terme en $e^{-(\frac{m_{mes}c}{\hbar}r)}$, dû à la masse de la particule médiatrice. Cela permet d'expliquer la faible portée des interactions nucléaires qui n'agissent plus au-delà du noyau atomique.

VIII.1.3 Confinement des charges fortes de couleur

On retrouve une idée de confinement aussi bien pour les charges électriques que pour les charges fortes de couleur. Par exemple, à l'échelle astronomique, lorsqu'on étudie le mouvement des planètes, la force électrostatique n'a plus d'effets. Les charges électriques opposées se compensent les unes, les autres. Seule intervient la force gravitationnelle.

Dans la théorie de la Chromodynamique quantique fondée sur $SU(3)_{couleur}$, l'échelle du confinement des charges fortes de couleur est beaucoup plus petite que celle de la force électrostatique. A l'échelle des nucléons ou des mésons libres, le confinement des charges de couleur existe déjà. Il est impossible d'observer des nucléons ou des mésons libres de charges de couleurs opposées (comme à l'échelle astronomique, il est impossible d'observer les effets de charges électriques opposées). On dit que les nucléons ou les mésons libres possèdent une charge de couleur blanche. Les 3 couleurs R, G, B se neutralisent.
Il faut aller à une échelle plus petite, celle des quarks, pour trouver des particules qui portent une charge de couleur et qui manifestent les effets de l'interaction forte.

Dans la Chromodynamique quantique, on explique l'échelle basse du confinement des charges de couleur par des variations de la constante de couplage α_{Co}. Cette constante de couplage α_{Co} n'est plus une constante, elle augmente avec la distance (voir plus loin, dans le paragraphe dépendance en énergie des constantes de couplage).

Nota 1
L'échelle du confinement n'est à priori pas le même pour $SU(2)_I$ et $SU(3)_{couleur}$. En effet, dans $SU(2)_I$ les nucléons ont une charge forte non nulle égale à (I, I^3). Dans $SU(3)_{couleur}$, les nucléons ont une charge forte de couleur nulle ou blanche.
Il en est de même pour les mésons pions qui ont charge forte égale à (I, I^3) dans $SU(2)_I$ et une charge de couleur blanche dans $SU(3)_{couleur}$.

Nota 2 sur la masse des gluons
Contrairement aux idées de H. Yukawa, dans la Chromodynamique quantique, les gluons G ont une masse nulle. La faible portée de l'interaction nucléaire entre les hadrons s'explique uniquement par le confinement des charges de couleur.

Dans le modèle qu'on va proposer, on reviendra à l'idée originelle de H. Yukawa. On attribuera aux gluons G un nombre quantique, le nombre baryonique, contenant une masse (ou une énergie massique).

Nota 2 sur la charge de couleur Co des gluons
Contrairement aux photons qui ne portent aucune charge électrique, les gluons G de la Chromodynamique quantique portent une charge de couleur et peuvent donc modifier la charge de couleur de la particule.
Les gluons G sont en cela analogues aux pions π^+ et π^- ou aux bosons faibles W^+ et W^-, qui définis tels des opérateurs d'échelle, peuvent augmenter ou diminuer de T^3 la charge faible d'un fermion, lui-même porteur d'une charge faible $T^{\pm}$.

Dans ce qui suit, en analogie avec γ et W^3 qui ne portent pas de charge respectivement électrique et faible, on va définir des gluons G qui ne portent pas de charge forte de couleur Co, et qui ne peuvent donc pas modifier la charge forte du fermion.
A l'instar du photon γ qui portent un spin S, et peut donc modifier le spin d'un fermion, à l'instar du boson W^3 qui porte un Ge et qui peut modifier la génération d'un quark, on attribuera au gluon un nombre baryonique Ba lui permettant de modifier le nombre baryonique du fermion avec lequel il interagit.

Notons qu'on peut avoir 2 types de gluons G (ceux portant une charge forte et ceux n'en portant pas), comme on peut avoir les 2 types de bosons W (ceux portant une charge faible et ceux n'en portant pas). Ce qui nous intéresse ici, ce sont les particules médiatrices analogues aux photons γ, c'est-à-dire celles qui ne portent pas de charges fortes mais un nombre quantique source champ.

VIII.1.4 Limite à l'attractivité entre 2 charges

En physique, lorsque que deux charges (ou masses) s'attirent, on constate généralement que ces deux charges (généralement opposées) ne s'attirent que jusqu'à un certain stade. Au-delà de ce stade, un phénomène compensatoire entre en action, qui évite que les deux charges ne s'écrasent l'une contre l'autre.

On retrouve cette idée dans le modèle de l'électron de Bohr. Le phénomène compensatoire pour éviter que l'électron de charge électrique – et le proton de charge électrique + ne s'attirent jusqu'à s'écraser l'un contre l'autre, est le mouvement de rotation de l'électron autour du proton. Ce mouvement s'interprète comme une force d'inertie centrifuge ou répulsive, qui compense la force électrostatique attractive, et vient « stabiliser » l'électron sur son orbite.

On retrouve également cette idée dans la théorie de la gravitation de Newton. Le phénomène compensatoire à l'attraction gravitationnelle est le même que dans le modèle de l'électron de Bohr. C'est un mouvement de rotation, par exemple celui de la Lune autour de la Terre, qui s'interprète comme une force d'inertie répulsive.

VIII.1.5 Liberté asymptotique des quarks

Selon la Chromodynamique quantique, le phénomène compensatoire qui évite que deux quarks de charges de couleur opposées ne s'écrasent l'un contre l'autre, c'est la liberté asymptotique.

Pour expliquer cette liberté asymptotique, la Chromodynamique quantique propose une constante de couplage de l'interaction forte α_{Co}, qui décroit lorsque les distances deviennent très petites. Ainsi, des quarks de charges colorées opposées, ne s'attirent plus lorsque les distances les séparant deviennent très petites et que α_{Co} tend vers 0. A la limite, l'interaction forte agissant entre eux est si faible, que les quarks se comportent quasiment comme des particules libres.

Pourquoi et comment cette constante de couplage α_{Co} varie ? Etudions maintenant succinctement ce que propose la Chromodynamique quantique.

VIII.2 Dépendance en énergie des constantes de couplage

VIII.2.1 Cas de l'Electrodynamique quantique relativiste

En Electrodynamique quantique relativiste, pour prendre en compte les effets du vide quantique, on suppose une possible variation de la constante de couplage en fonction du quadrivecteur énergie impulsion (ici noté q) du photon virtuel impliqué dans le mécanisme d'échange. On appelle constante de couplage effective, cette constante $\alpha_Q(q^2)$ fonction de q^2. On a :

$$\alpha_Q(q^2) \approx \frac{\alpha_Q}{1 - \frac{\alpha_Q}{3\pi} ln(\frac{q^2}{4{m_e}^2})}$$

On a à la limite :

$$\alpha_Q(\frac{q^2}{4{m_e}^2} \to 1) = \alpha_Q$$

avec α_Q la constante de couplage électromagnétique.

On note que la constante de couplage effective $\alpha_Q(q^2)$ augmente lorsque q^2 croit.

VIII.2.2 Cas de la Chromodynamique quantique

En Chromodynamique quantique, on construit une constante de couplage du même genre :

$$\alpha_{Co}(q^2) \approx \frac{\alpha_{Co}}{1 + B\alpha_{Co}\, ln(\frac{q^2}{q_0^2})}$$

Avec $B = \frac{11N_C - 2N_S}{12\pi}$,
N_C : 3 couleurs de quarks,
N_S : nombre de saveurs de quarks impliqués,
q_0 valeur de référence de q.

On a à la limite :

$$\alpha_{Co}(\frac{q^2}{q_0^2} \to 1) = \alpha_{Co}$$

On note que la constante de couplage effective $\alpha_{Co}(q^2)$ diminue lorsque q^2 croit.

Listons les caractéristiques saillantes de $\alpha_{Co}(q^2)$ suivant la Chromodynamique quantique.

Aux faibles énergies impulsions $q \leq 200MeV$, c'est-à-dire à grande distance relative des quarks $r = \frac{\hbar c}{q} \geq 1fm$, $\alpha_{Co} \geq 1$. La constante de couplage α_{Co} augmente rapidement avec l'éloignement. Le potentiel de l'interaction forte devient approximativement linéaire à la façon d'un ressort : $V(r) \approx \lambda r$ avec λ une constante de l'ordre de $1GeV \times fm^{-1}$. Cela reflète l'effet de confinement observé des quarks.

Aux grandes énergies impulsions $q >> 1GeV$, c'est-à-dire aux faibles distances relatives $r << 1fm$, on a $\alpha_{Co} << 1$. Cela fait apparaître les quarks comme quasi-libres. A la limite, on a $\alpha_{Co}(q^2 \to \infty) \to 0$, c'est ce qu'on appelle communément la liberté asymptotique.

VIII.3 Hypothèses pour un modèle de l'interaction forte avec des particules médiatrices non chargées

Après avoir évoqué succinctement quelques propriétés de la Chromodynamique quantique, on propose ici un modèle simple pour l'interaction forte qui s'inspire surtout de $SU(2)_I$ (c'est-à-dire la théorie de Jauge de Yang-Mills sur l'interaction forte). Malgré leur intérêt évident, on laisse donc de côté l'étude des variations des constantes de couplage.

Ce modèle s'inscrit en recherche d'analogies avec les interactions électromagnétiques, hyper et faibles. En particulier, on va proposer l'existence de particules médiatrices de type gluon G non porteuses de charge forte et porteuses d'un nombre quantique source champ, le nombre baryonique Ba.

VIII.3.1 Hypothèses sur la charge forte et le groupe de rotations $SU(2)_{Co}$

La Chromodynamique quantique s'appuie sur le groupe de rotations $SU(3)_{Couleurs}$.

Par simplicité et par analogie avec :

- la théorie de Yang-Mills qui s'appuie sur $SU(2)_I$ de charge forte (I, I^3),
- le Modèle électrofaible qui s'appuie sur $SU(2)_T$ de charge faible (T, T^3),

on propose pour l'interaction forte une modèle qui s'appuie sur $SU(2)_{Co}$ de charge forte de couleur (Co, Co^3).

On pose une charge de couleur (Co, Co^3), avec pour les fermions chargés forts des valeurs du type :

$$(Co, Co^3) = (\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$$

Nota 1 sur le nombre de dimensions du groupe de rotations
Si on accepte l'hypothèse de relier équations sources champs et interaction, il n'y a pas de raison de différencier interaction forte et faible par le nombre de dimensions du groupe de rotations associé. On choisit ici par simplicité d'avoir les interactions forte et faible basées sur $SU(2)$. Mais après tout, ces interactions nucléaires à faible portée peuvent être basées sur $SU(3)$, voire sur $SU(4)$, $SU(5)$…

Nota 2 sur la charge de couleur des leptons
Les leptons doivent avoir $(Co, Co^3) = (0,0)$, puisqu'ils ne sont pas sujets à l'interaction forte.

VIII.3.2 Hypothèses sur les particules médiatrices de l'interaction et sur le nombre quantique source champ transporté

A l'instar du photon γ qui est non chargé électriquement et qui transporte un nombre quantique source champ le spin S, on définit pour l'interaction forte des particules médiatrices, les gluons G, non chargées fort et porteuses du nombre quantique source champ Ba.

Nota sur le nombre baryonique
On reprendra aussi l'hypothèse proposée précédemment, que les quarks et les quarks composants des pentaquarks sont en fait des états excités des nucléons vis-à-vis du nombre baryonique, suivant l'interaction forte. On a pour les nucléons $\frac{1}{Ba} = 1$, pour les quarks $\frac{1}{Ba} = 3$ et pour les quarks composants des pentaquarks $\frac{1}{Ba} = 5$.

VIII.3.3 Hypothèses sur la charge forte de couleur Co

En s'inspirant de la relation de Gell-Mann Nishijima, on suggère que la charge forte de couleur se construise à partir des 3 nombres quantiques sources champs, autres que celui porté pas la particule médiatrice.

Ainsi, on pose que la particule médiatrice, le gluon G porte un nombre baryonique Ba, et que la charge de couleur Co se construise à partir de S, I et Ge.

On a une fonction f_{Co} avec :

$$(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$$

Nota
Dans la théorie de Yang-Mills, la charge forte est identifiée à l'isospin (I, I^3) et est générateur de $SU(2)_I$. Dans le Modèle originel des quarks, la charge forte est identifiée aux saveurs u, d, s et est générateur de $SU(3)_{saveurs}$.

On retrouve dans u et d l'isospin (I, I^3) et dans s l'étrangeté St, c'est-à-dire Ge.

A vérifier expérimentalement, si pour l'interaction forte, à l'instar de l'interaction faible, il n'existe pas aussi une violation de parité, c'est-à-dire une charge forte différente suivant l'hélicité de la particule ? On aurait alors une charge forte fonction également du spin (S, S^3).

VIII.3.4 Hypothèses sur les courants forts

Sur le modèle du courant électromagnétique j_Q^μ qui transporte une charge électrique Q, du courant faible $j_{T^a}^\mu$ qui transporte une charge faible T^a ou du courant hyper $j_{Y_W}^\mu$ qui transporte une hypercharge faible Y_W, on définit un courant fort $j_{Co^a}^\mu$ qui transporte une charge forte Co^a.

Pour expliciter ce courant, on reprend la parabole de Bohr. L'échange d'un nombre quantique source champ entre un fermion et une particule médiatrice porteuse de ce nombre quantique, génère un déplacement de charge X (électrique, hyper, faible ou forte) et donc un courant.
Dans l'autre sens, un courant ou une charge X en mouvement rayonne une onde particule médiatrice porteuse du nombre quantique source champ.

VIII.4 Application du modèle aux nucléons et quarks de 1ère génération

VIII.4.1 Partir de la théorie de Yang-Mills pour l'interaction forte

On a proposé :

$$(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$$

Si on reprend la théorie de Yangs-Mills pour l'interaction forte, dans le cas des nucléons et des quarks de 1ère génération, on peut identifier la charge forte Co^3 à l'isospin I^3 :

$$Co^3 = I^3$$

VIII.4.2 Diffusion : charge forte (Co, Co^3) conservée lorsqu'on modifie Ba

Lors du passage d'un proton p à un quark u, on a modification du nombre baryonique Ba et conservation de la charge forte identifiée à l'isospin :

$$Co^3 = I^3 = \frac{1}{2}$$

	Nombres sources champs				Charges			
Conservé	**X**	**X**		**X**			**X**	**X**
Modifié			**X**		**X**	**X**		
	(S, S^3)	(I, I^3)	$\frac{1}{Ba}$	Ge	**électrique** $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	**hyper** $\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	**faible** (T, T^3)	**forte** (Co, Co^3)
p ↓	$(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	0	+1	+1 +2	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (0,0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
u	$(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	3	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$ $+\frac{4}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (0,0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Nota
La charge faible (T, T^3) est à priori conservée lorsqu'on passe de p à u alors qu'on souhaiterait dans le cas général qu'elle soit modifiée. A voir pourquoi.

Pour les nucléons et quarks gauchers de 1ère génération, la charge forte et la charge faible peuvent être toutes deux identifiées à l'isospin.

Lors du passage d'un neutron n à un quark d, on a modification du nombre baryonique Ba et conservation de la charge forte égale à l'isospin : $Co^3 = I^3 = -\frac{1}{2}$.

	Nombres sources champs				**Charges**			
Conservé	**X**	**X**		**X**			**X ?**	**X**
Modifié			**X**		**X**	**X**		
	(S, S^3)	(I, I^3)	$\frac{1}{Ba}$	Ge	**électrique** $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$	**hyper** $\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$	**faible** (T, T^3)	**forte** (Co, Co^3)
n ↓	$(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	1	0	0	+1 0	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (0,0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
d	$(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	3	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (0,0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

On a les diagrammes de Feynman type diffusion correspondants :

$p(Co^3 = I^3 = \frac{1}{2}, \frac{1}{Ba} = 1)$ $u(Co^3 = I^3 = \frac{1}{2}, \frac{1}{Ba} = 3)$

Temps

$G(Co^3 = 0, \frac{1}{Ba} = 2)$

Figure 30 : passage d'un proton à un quark up, diffusion de la charge forte

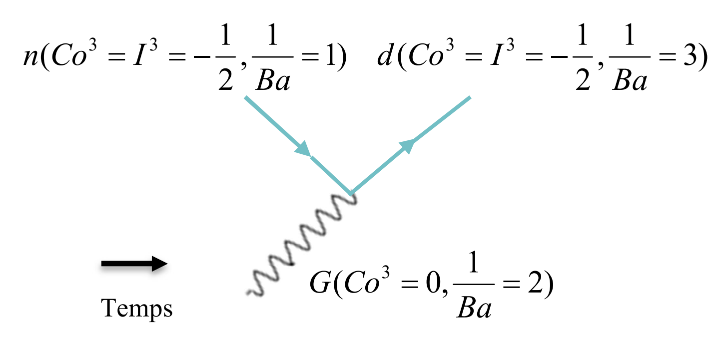


Figure 31 : passage d'un neutron à un quark down, diffusion de la charge forte

Nota
On suppose ici pouvoir additionner les termes en $\frac{1}{Ba}$ et non pas en Ba. C'est purement spéculatif et à vérifier expérimentalement.

VIII.4.3 Annihilation : annulation de la charge forte Co^3

Pour un courant fort du type $j^{\mu}_{Co^3}(n,p) = Co^3 n\gamma^{\mu} p$, on calcule les nombres quantiques lors d'une annihilation :

	$j^{\mu}_{Co^3}(n,p)$	n	p	**Total**
Charge forte	$Co^3 = I^3$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
Nombres quantiques sources champs	$\frac{1}{Ba}$	1	1	2
	Ge	0	0	0
	I^3	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
	S^3	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0

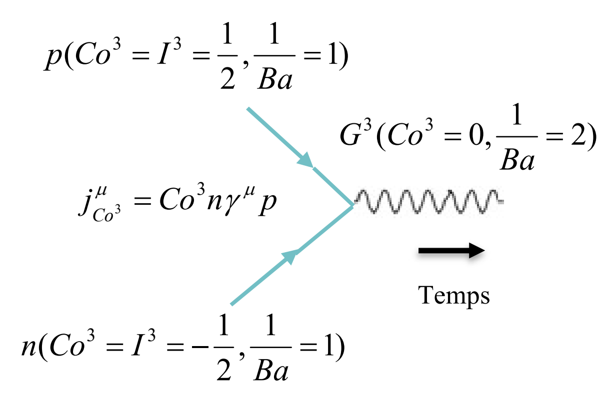


Figure 32 : annihilation de la charge forte

Nota 1, sur les particules médiatrices M^a non chargées
Dans ce mémoire, on cherche des particules médiatrices M^a non chargées analogues du photon γ, qui ne modifient pas la charge X^a du fermion, génèrent le déplacement de la charge X^a lors de l'échange d'un nombre quantique source champ, et créent un courant $j^{\mu}_{X^a}$.

On veut retrouver le théorème de Noether : une symétrie du système, c'est-à-dire une quantité conservée par transformation de Jauge globale, la charge X^a, implique l'existence d'un courant $j^{\mu}_{X^a}$ conservé transportant la charge X^a.

A l'instar du photon γ, les gluons G^1, G^2, G^3 proposés ici ne portent pas de charge forte Co^a, $a = 1,2,3$. Ils interagissent avec les fermions de charge forte Co^a, en échangeant des nombres baryoniques Ba.

Pour les interactions nucléaires, les gluons G^1, G^2, G^3 sont les analogues des 3 bosons faibles W^1, W^2, W^3. Ces derniers ne portent pas de charge faible T^a, $a = 1,2,3$. Ils interagissent avec les fermions de charge faible T^a, en échangeant des nombres de génération Ge.

Les particules médiatrices non chargées associées aux groupes $SU(n)$ avec $n \geq 2$, peuvent néanmoins réagir entre elles via des termes du type $g\varepsilon^{bca}A^{b\mu}A^{cv}$, et s'échanger des nombres quantiques sources champs. Comme ces particules médiatrices ne possèdent pas de charge, leurs interactions ne peuvent générer de mouvements de charge X^a, c'est-à-dire des courants $j^{\mu}_{X^a}$.

Nota 2, sur les particules médiatrices $M^{\pm}$ chargées

Les particules médiatrices $M^{\pm}$ porteuses de charge $X^{\pm}$, qui peuvent augmenter ou diminuer de $X^{\pm}$ la charge X^{a} d'un fermion, sont qualifiées d'opérateurs d'échelle. Elles ne sont pas ici présentées comme les réelles particules médiatrices de l'interaction, au sens qu'elles ne sont pas comme le photon, exemptes de charge.

Suivant la théorie de Yang-Mills de l'interaction forte, les pions π^{+}, π^{-} sont les particules médiatrices de type opérateur d'échelle de l'interaction forte, c'est-à-dire que ces pions sont porteurs d'une charge forte et peuvent modifier de I^{3} la charge forte d'un nucléon, tout en conservant son nombre baryonique Ba.

Suivant le Modèle des quarks de l'interaction forte, les mésons chargés électriquement formés d'un quarks et d'un antiquarks (à choisir parmi les saveurs u, $d$et s) sont les particules médiatrices de type opérateur d'échelle de l'interaction forte, c'est-à-dire que ces mésons sont porteurs d'une charge forte et peuvent modifier la charge forte d'un baryon, tout en conservant son nombre baryonique Ba.

Suivant le Modèle électrofaible, les bosons faibles W^{+}, W^{-} sont les particules médiatrices de type opérateur d'échelle de l'interaction faible, c'est-à-dire que ces bosons faibles sont porteurs d'une charge faible et peuvent modifier de T^{3} la charge faible d'un fermion gaucher, tout en conservant son nombre de générations (si l'on reste dans la même génération de quarks).

Pour l'interaction électromagnétique, l'analogue de ces particules médiatrices de type opérateur d'échelle qui modifient de $X^{\pm}$ la charge X^{a} d'une particule, n'est pas la particule médiatrice photon γ, mais plutôt les protons H^{+} et les électrons e^{-} intervenant dans les réactions chimiques (réactions acido-basiques, réactions d'oxydo-réduction…) qui modifient la charge électrique d'une particule ou d'un ensemble de particules, tout en conservant son nombre de spin S.

VIII.5 Conclusion du chapitre

Dans les chapitres précédents, on a tenté de présenter davantage les interactions faible et hyper que l'on rencontre dans le Modèle électrofaible en analogie avec l'interaction électromagnétique.

Dans ce chapitre, on a proposé un modèle simple d'interaction forte, en stricte analogie avec les interactions électromagnétique, hyper et faible, avec des particules médiatrices non chargées fort.
En s'inspirant de la théorie de Yang-Mills sur l'interaction forte, on a proposé dans le cas des nucléons et quarks de 1ère génération, une charge forte Co^{3} égale à l'isospin I^{3}. Lors d'une diffusion avec passage d'un nucléon à un quark, on a souligné que la charge forte $Co^{3} = I^{3} = \pm\frac{1}{2}$ est conservée et que le nombre baryonique Ba est modifié.

Dans le prochain chapitre, on va récapituler pour chaque interaction, l'équation source champ et le nombre quantique qu'on propose de lui associer.

Chapitre IX Equations sources champs, nombres quantiques et interactions

Objet du chapitre

Dans ce chapitre, on étudie pour chacune des 4 équations sources champs proposées pour la gravitation, son lien avec :

1. un nombre quantique source champ S^a, I^a, Ge, Ba,
2. une particule médiatrice portant le nombre quantique,
3. un fermion porteur d'une charge X,
4. un échange du nombre quantique source champ entre la particule médiatrice et le fermion,
5. un déplacement de la charge X,
6. une interaction.

IX.1 Relation source champ de Broglie, spin S, photon γ, interaction électromagnétique

Au début de ce mémoire, on a proposé que l'invariance de l'équation source champ de Broglie corresponde à la conservation des moments cinétiques orbitaux et de spin lors des réactions entre particules. On l'applique ici à l'interaction électromagnétisme. On testera dans les prochains paragraphes une généralisation sur les 3 autres interactions.

IX.1.1 Quantité échangée entre la particule médiatrice et le fermion : moment cinétique orbital ou moment cinétique de spin S

On propose d'associer le spin S à l'équation source champ de Broglie :

$$\frac{\hbar^z}{2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^x}{\vec{K}_{ty}^{1/x}}$$

$$\frac{\hbar^x}{2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^y}{\vec{K}_{tx}^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{\hbar^y}{2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^z}{\vec{K}_{tx}^{1/z}}$$

Nota

Les 3 dimensions réelles ou 2 dimensions complexes de $SU(2)_S$sont ici liées aux 3 dimensions de l'impulsion $\vec{p}$ dans l'Espace.

IX.1.2 Particule médiatrice, photon γ

Le photon γ est porteur d'un spin S. Ses trois autres nombres quantiques (I, Ge, Ba) sont nuls. Suivant la relation de Gell-Mann Nishijima $Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$, sa charge électrique est nulle : $Q = 0$.

Le spin $\frac{\hbar^z}{2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^x}{\vec{K}_{ty}^{1/x}}$ du photon γ se décompose en une impulsion $\vec{p}^x$ et une longueur d'onde $\frac{1}{K_{ty}^{1/x}} = \frac{\lambda^x}{2\pi}$.

Le photon γ possède une impulsion, une longueur d'onde, mais pas de masse.

Nota 1 sur la pulsation du photon

Pour un photon γ se propageant dans le vide à la vitesse c, on a $v_g = \frac{\partial\Omega}{\partial K} = v_\phi = \frac{\Omega}{K} = c$.

Si on connait son vecteur d'onde $K = \frac{p}{\hbar}$, on peut facilement en déduire sa pulsation $\Omega = Kc$.

Nota 2 sur les bosons interprétés comme composés de 2 particules
A l'instar des bosons mésons composés d'un quark et d'un antiquark, il pourrait être intéressant d'imaginer que chaque particule médiatrice soit en fait composée de deux particules de type fermion, de valeurs opposées pour trois nombres quantiques sources champs et de même valeur pour le nombre quantique les caractérisant.

Par exemple, un photon γ pourrait être composé de :

Particule	Spin S^3	Isospin I^3	Génération Ge	Nombre baryonique Ba
u_L	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$
$\overline{u_L}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$
γ	-1	0	0	0

On retrouve des suggestions très similaires chez de nombreux physiciens. Par exemple, L. de Broglie propose lui-aussi d'interpréter le photon comme l'assemblage de 2 particules. Malgré l'aspect spéculatif d'une telle proposition, l'intérêt est de diminuer le nombre de particules élémentaires.
En outre, comme on l'a déjà évoqué, cela permettrait également d'expliquer pourquoi le principe d'exclusion de Pauli ne s'applique pas aux Bosons. En effet, ces derniers seraient des particules composites formés de 2 particules, pour lesquelles en revanche le principe de Pauli s'appliquerait.

IX.1.3 Particules sujettes à l'interaction électromagnétique

Les particules sujettes à l'interaction électromagnétique sont les fermions possédant un nombre de spin S^3 demi-entier (positif ou négatif) et une charge électrique $Q \neq 0$.

En échangeant des spins S avec un photon γ, les fermions changent d'orbite. On a déplacement de la charge électrique Q et apparition d'un courant électromagnétique j_Q^μ.

IX.1.4 Exemples de réactions

On donne quelques réactions où intervient l'interaction électromagnétique :

- inversion du spin d'un électron (transition hyperfine), par exemple un électron d'hélicité gauche devient un électron d'hélicité droite (si même impulsion pour les 2 électrons),
- changement du niveau d'énergie d'un électron dans un atome (changement de son moment cinétique orbital et changement de son orbite),
- annihilation d'un électron et d'un positron de même spin avec production d'un photon γ.

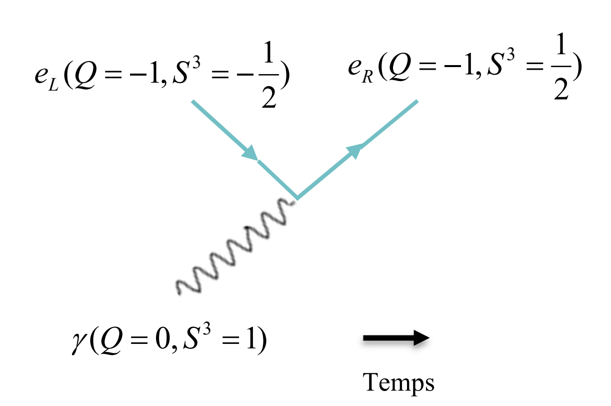


Figure 33 : diffusion de la charge électrique, transition hyperfine

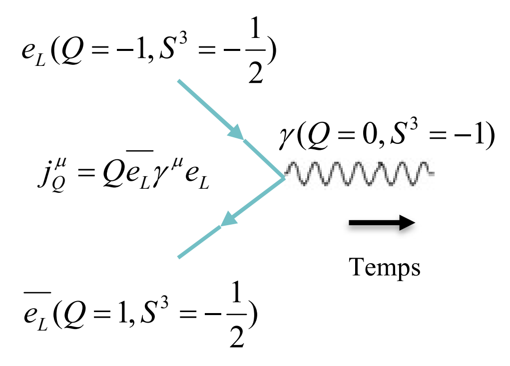


Figure 34 : annihilation de la charge électrique

IX.2 Relation source champ de Newton, isospin *I*, boson *B*, interaction hyper

En analogie avec ce qui a été proposé pour l'électromagnétisme, on souhaite ici tester si l'invariance de l'équation source champ de Newton (ou principe fondamentale de dynamique de Newton), peut correspondre à la conservation de l'isospin (et de son analogue en orbital) lors des réactions entre particules.

IX.2.1 Quantité échangée entre la particule médiatrice et le fermion : isospin *I*

On propose d'associer l'isospin I à l'équation source champ de Newton :

$$\frac{\hbar^z}{2} = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})^y_{xt}\frac{\partial x}{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}$$

$$\frac{\hbar^x}{2} = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^y}{dt})^z_{yt}\frac{\partial y}{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{yz}}$$

$$\frac{\hbar^y}{2} = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^z}{dt})^x_{zt}\frac{\partial y}{\partial \vec{\Omega}^{1/t}_{yz}}$$

Nota, proposer un cas où l'isospin serait égale à l'équation source champ de Newton
Suivant la relation de Gell-Mann Nishijima, on a :

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$$

Dans le cas où $\frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2} = 0$, c'est-à-dire où on élimine les termes de masse, on obtient :

$$Q = I^3$$

On propose ici que l'isospin est le nombre quantique associé à l'équation source champ de Newton :

$$I^3 = -\frac{dp}{dt} \times \frac{\partial r}{\partial \hbar\Omega}$$

On obtient donc :

$$Q = -\frac{dp}{dt} \times \frac{\partial r}{\partial \hbar\Omega}$$

On retrouve l'expression du principe fondamental de la dynamique pour la force électrostatique :

$$\frac{dp}{dt} = -Q\frac{\partial\hbar\Omega}{\partial r}$$

$$\text{avec } \hbar\Omega = eA^t$$

On propose un 2ème cas un peu plus loin où on tient compte des masses.

IX.2.2 Particule médiatrice, le boson B

Le boson B est porteur d'un isospin I. Par analogie avec le photon, ses trois autres nombres quantiques (S, Ge, Ba) sont nuls et son hypercharge faible Y_W est nulle.

En plus de la relation de S. Glashow pour le Modèle électrofaible $Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$, on suppose une relation du type :

$$Y_W = f_Y((S, S^3), Ge, Ba)$$

Le boson B possède une quantité de mouvement, une pulsation, mais pas de masse.

Nota sur les caractéristiques hypothétique du boson *B*
Bien que le boson B soit présent dans le Modèle électrofaible, il n'a pas encore été découvert expérimentalement. Il doit s'apparenter au photon γ au sens que tous deux possèdent une impulsion $\vec{p}$ et aucune énergie massique au repos $m^t c^2$.
Néanmoins, le boson B est chargé électriquement via son isospin I. Il pourrait subir les effets d'un champ électrique. C'est lui qui « recueille » la charge électrique négative lors d'une désintégration β^- d'un neutron en un proton.
Soulignons que le boson B serait la seule particule possédant une charge électrique, mais pas de masse au repos.

IX.2.3 Particules sujettes à l'interaction hyper : fermions porteurs d'une hypercharge faible Y_W non nulle

Par analogie avec le spin, les particules sujettes à l'interaction hyper sont les fermions possédant un isospin I demi-entier (positif ou négatif) et une hypercharge faible Y_W non nulle.

En échangeant des isospins I avec la particule médiatrice B, les fermions modifient leur orbite, tout en conservant constante leur hypercharge faible Y_W (invariance du principe fondamental de la dynamique de Newton). On observe le déplacement de l'hypercharge faible Y_W et l'apparition d'un courant hyper $j^{\mu}_{Y_W}$.

Par exemple, lors d'une désintégration β^-, en passant d'un neutron à un proton, il y a un changement d'orbite (pris au sens large) du nucléon, déplacement de l'hypercharge faible Y_W portée par le nucléon et apparition d'un courant hyper $j^{\mu}_{Y_W}$.

IX.2.4 Exemple de réaction

Désintégration β^-, avec passage d'un neutron gaucher à un proton gaucher (ou d'un quark d_L à un quark u_L).

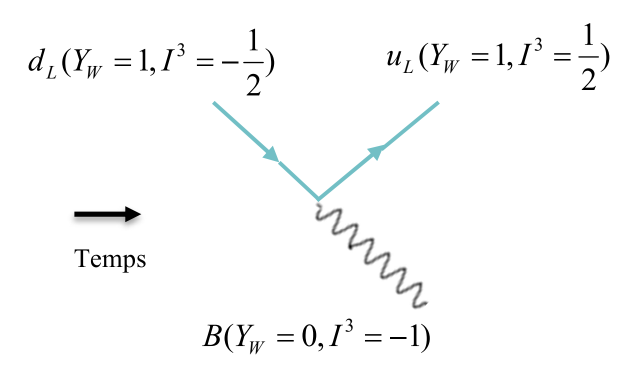


Figure 35 : diffusion de l'hypercharge faible

Nota
La conservation de l'hypercharge faible Y_W ne fonctionne que pour les fermions gauchers.

IX.3 Relation source champ de Compton, nombre de générations Ge, Bosons W^a, interaction faible

En analogie avec ce qui a été proposé pour l'électromagnétisme, on souhaite ici tester si l'invariance de l'équation source champ de Compton, peut correspondre à la conservation du nombre de générations lors des réactions entre particules.

IX.3.1 Quantité échangée entre la particule médiatrice et le fermion : nombre de générations Ge

On propose d'associer le nombre de générations Ge à l'équation source champ de Compton :

$$\hbar = -\left(\frac{d\vec{m}^t c^2}{dx}\right)_{tx}^{y} \frac{\partial t}{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}$$

IX.3.2 Particules médiatrices, les bosons faibles W^1, W^2, W^3

Les bosons faibles W^1, W^2, W^3 sont porteurs du nombre de générations Ge.

Par analogie avec le photon, leurs trois autres nombres quantiques ((S, S^3), (I, I^3), Ba) sont nuls et leur charge faible (T, T^3) est nulle.

Selon le Modèle électrofaible, on a une relation du type entre les 3 charges :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$$

On propose également une relation du type :

$$(T, T^3) = f_T((S, S^3), (I, I^3), Ba)$$

Les boson faibles W^1, W^2, W^3 possèdent une énergie massique $p^t c = m^t c^2$et une longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{K}$. Suivant les idées de H. Yukawa, leur énergie massique explique la faible portée de l'interaction faible.

Nota, sur les réactions internes entre bosons faibles
Même s'ils ne possèdent pas de charge faible T^a, les bosons faibles peuvent réagir entre eux via le terme $g_T \varepsilon^{123} W^{1\mu} W^{2\nu}$.

Puisqu'ils ne portent pas de charge faible T^a, les bosons faibles W^1, W^2, W^3 ne génèrent pas de courants faibles j^μ_{Ta} lors de leur déplacement.

IX.3.3 Particules sujettes à l'interaction faible : fermions porteurs d'un charge faible T^a non nulle

Les particules sujettes à l'interaction faible sont les fermions gauchers et les anti-fermions droitiers de charge faible T^a non nulle.

Les fermions droitiers et les anti-fermions gauchers ont une charge faible T^a nulle, ils ne sont pas sujets à l'interaction faible.

En échangeant des Ge avec la particule médiatrice, les fermions gauchers changent « d'orbite » tout en conservant constante leur charge faible T^a. On observe un déplacement de la charge faible T^a et l'apparition d'un courant faible j^μ_{Ta}.

IX.3.4 Exemple de réaction

Désintégration du kaon : $K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \nu + \bar{\nu}$

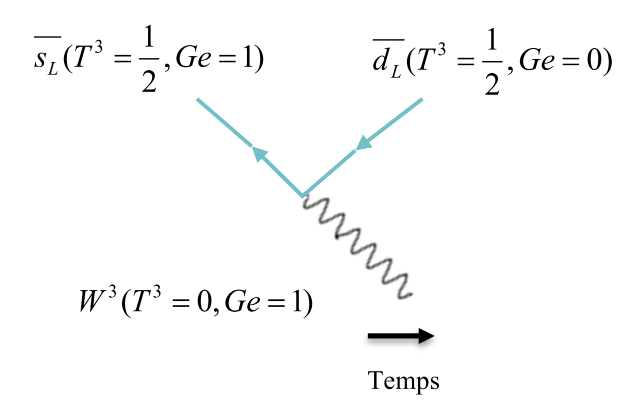


Figure 36 : diffusion de la charge faible

IX.4 Relation source champ d'Einstein, nombre baryonique Ba, gluons G^a, interaction forte

En analogie avec ce qui a été proposé pour l'électromagnétisme, on souhaite ici tester si l'invariance de l'équation source champ d'Einstein, peut correspondre à la conservation du nombre baryonique lors des réactions entre particules.

IX.4.1 Quantité échangée entre la particule médiatrice et le fermion : nombre baryonique Ba

On propose d'associer le nombre baryonique à l'équation source champ d'Einstein :

$$\hbar = \frac{\vec{m}^t c^2}{\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}}$$

IX.4.2 Particules médiatrices, les gluons G^1, G^2, G^3

Les gluons G^1, G^2, G^3 sont porteurs du nombre baryonique Ba.

Par analogie avec le photon, leurs trois autres nombres quantiques $((S, S^3)$, (I, I^3), $Ge)$ sont nuls et leurs charge forte Co est nulle.

On suppose une relation du type :

$$(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$$

Les gluons G^1, G^2, G^3 possèdent une énergie massique et une pulsation.

IX.4.3 Particules sujettes à l'interaction forte : hadrons portant une charge forte non nulle

Les particules sujettes à l'interaction forte sont les hadrons, qui possèdent une charge forte non nulle.

IX.4.4 Exemple de réaction

Un proton p se transforme en quark u.

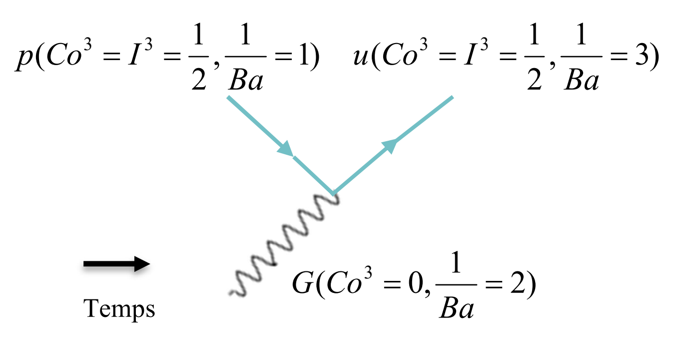


Figure 37 : diffusion de la charge forte

Nota, proposer un deuxième cas où l'isospin serait égale à l'équation source champ de Newton
On s'intéresse aux nucléons. En première approximation, le nombre baryonique correspond au nombre de masse A :

$$Ba = A$$

On a la masse du noyau d'un atome, par exemple un atome de carbone de nombre de masse $A = 12$, ${}^{12}C$:

$$m_{{}^{12}C} = Am_{nu} = 12m_{nu}$$

avec m_{nu} la masse de la particule nucléon.

On propose que Ba soit associé à l'équation source champ d'Einstein. On a :

$$Ba = A = \frac{m_{noyau}c^2}{\hbar\Omega_{nu}}$$

avec Ω_{nu} la pulsation de l'onde nucléon.

Pour le noyau de ^{12}C, on a :

$$m_{{}^{12}C} = 12m_{nu} = \frac{m_{{}^{12}C}c^2}{\hbar\Omega_{nu}}m_{nu}$$

Suivant la relation de Gell-Mann Nishijima, on a :

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} + \frac{Ge}{2}$$

Dans le cas où $\frac{Ge}{2} = 0$, c'est-à-dire où on élimine les termes de l'interaction faible, on obtient :

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2}$$

$$I^3 = Q - \frac{Ba}{2}$$

$$I^3 = Q - \frac{A}{2}$$

On propose que l'isospin soit le nombre quantique associé à l'équation source champ de Newton. On a :

$$I^3 = -\frac{dp}{dt} \times \frac{\partial r}{\partial \hbar \Omega}$$

$$Q - \frac{A}{2} = -\frac{dp}{dt} \times \frac{\partial r}{\partial \hbar \Omega}$$

$$\frac{dp}{dt} = -Q\frac{\partial \hbar \Omega}{\partial r} + \frac{A}{2}\frac{\partial \hbar \Omega}{\partial r}$$

On pose pour les énergies :

$$\hbar \Omega = eA^t$$

$$\hbar \Omega = 2m_{nu}V^t$$

On a alors :

$$\frac{dp}{dt} = -eQ\frac{\partial A^t}{\partial r} + m_{nu}A\frac{\partial V^t}{\partial r}$$

On retrouve l'expression du principe fondamental de la dynamique avec une force électrostatique : $-eQ\frac{\partial A^t}{\partial r} = eQ\vec{E}s$ et une force gravitationnelle : $m_{nu}\,A\frac{\partial V^t}{\partial r} = -m_{nu}A\vec{G}r$:

$$\frac{dp}{dt} = eQ\vec{E}s - m_{nu}A\vec{G}r$$

IX.5 Charges fonctions de 3 nombres quantiques sources champs

Récapitulons maintenant les arguments que l'on a évoqués dans ce mémoire, pour exprimer chaque charge en fonction des 3 nombres quantiques sources champs complémentaires, c'est-à-dire autres que celui porté par la particule médiatrice de l'interaction concernée.

IX.5.1 Charge électrique $Q = f_Q((I, I^3), Ba, Ge)$?

On a la relation de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I^3 + \frac{Ba}{2} +$$

$\frac{Ge}{2}$ où on retrouve I^3, Ba et Ge

On a proposé une relation analogue pour les leptons :

$$Q = I^3 - \frac{L_e}{2} + \frac{Ge}{2}$$

On s'attend néanmoins à une fonction f_Q plus complexe qu'une simple somme puisqu'on additionne des termes de nature différente avec d'un côté I^3, de l'autre Ba, L_e et Ge.

Nota sur le spin
La charge électrique Q n'est pas fonction du spin (S, S^3), puisque ce dernier n'est pas modifié lorsqu'on passe de la matière à l'antimatière.

IX.5.2 Charge forte $(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$?

Dans la théorie de Yang-Mills, la charge forte est identifiée à (I, I^3).
Dans le Modèle des quarks, la charge forte est identifiée à $(I, I^3) \times Ge$.

Comme on l'a évoqué, à vérifier expérimentalement, si pour l'interaction forte, à l'instar de l'interaction faible, il n'existe pas aussi une charge forte différente suivant l'hélicité de la particule ? On aurait alors une charge forte fonction également du spin (S, S^3).

Nota 1 sur le nombre baryonique
La charge forte (Co, Co^3) ne semble pas fonction du nombre baryonique Ba. Dans le Modèle des quarks, les nucléons et les quarks ont même charge forte et un nombre baryonique différent.

Nota 2 sur le pion π^0 portant une charge forte fonction du spin ?
Dans la théorie de Yang-Mills, le pion π^0 porte une charge forte et peut modifier la charge forte d'une particule. Le pion π^0 possède un spin nul. Néanmoins, puisque π^0 est neutre électriquement, la charge forte qu'il porte, devrait être fonction du spin, le seul nombre quantique source champ non chargé électriquement.

IX.5.3 Charge faible $(T, T^3) = f_T((S, S^3), (I, I^3), Ba)$?

Dans l'interaction faible, on note une violation de parité qui s'explique par une charge faible différente suivant l'hélicité de la particule. On a donc une charge faible fonction du spin (S, S^3).

Pour les baryons et les leptons gauchers de 1ère génération, la charge faible est identifiée à (I, I^3).

On n'a pas apporté d'arguments en faveur d'une charge faible fonction de Ba ou de L_e.
Lors du passage de la matière à l'antimatière, T^3 et Ba s'inversent tous les deux.

Nota 1 sur le nombre de génération
Contrairement à l'isospin (I, I^3), la charge faible (T, T^3) reste identique quelle que soit la génération Ge de la particule. La charge faible (T, T^3) n'est pas donc à priori fonction de Ge.
Par contre, lors du passage de la matière à l'antimatière, T^3 et Ge s'inversent tous les deux. Par exemple, lorsqu'on passe du quark c au quark $\bar{c}$.

Nota 2 sur le boson Z^0
Dans le Modèle électrofaible, le boson Z^0 porte une charge faible et peut modifier la charge faible d'une particule. Contrairement au pion π^0, le boson Z^0 possède un spin non nulle égale à 1. Puisque le boson Z^0 est neutre électriquement, la charge faible qu'il porte, devrait être fonction du spin, le seul nombre quantique source champ non chargé électriquement.

IX.5.4 Hypercharge faible $Y_W = f_Y((S, S^3), Ba, Ge)$?

L'hypercharge faible est différente suivant l'hélicité de la particule. On a donc une hypercharge faible fonction du spin (S, S^3).

Pour les quarks et leptons gauchers de 1ère, 2ème et 3ème génération (ainsi que pour leurs antiparticules), on peut poser :

$$Ba - L_e = Y_W$$

L'hypercharge faible est donc fonction de Ba et de L_e.

Contrairement à l'hypercharge Y, l'hypercharge faible Y_W reste identique quelle que soit la génération Ge de la particule. On n'a pas apporté d'arguments en faveur d'une hypercharge faible fonction de Ge. Par contre, lors du passage de la matière à l'antimatière, Y_W et Ge s'inversent tous les deux.

Nota sur l'isospin
Lorsque I^3 varie, l'hypercharge faible Y_W reste constante. L'hypercharge faible Y_W n'est donc pas à priori fonction de (I, I^3).

IX.5.5 Charges générateurs de groupes $SU(n)$

On dresse le tableau synthétique ci-dessous :

	Equations sources champs à vecteur d'onde	**Equations sources champs à pulsation**
Equations sources champs à impulsion	$\frac{\hbar^z}{2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^x}{\vec{K}_{ty}^{1/x}}$ Spin (S, S^3) générateur de $SU(2)_S$ Charge électrique Q générateur de $U(1)_Q$	$\frac{\hbar^z}{2} = -\frac{1}{2}(\frac{d\vec{p}^x}{dt})_{xt}^y \frac{\partial x}{\partial \vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}$ Isospin (I, I^3) générateur de $SU(2)_I$ Hypercharge faible Y_W générateur de $U(1)_{Y_W}$
Equations sources champs massiques	$\hbar = -(\frac{d\vec{m}^t c^2}{dx})_{tx}^y \frac{\partial t}{\partial \vec{K}_{ty}^{1/x}}$ Génération Ge générateur de $U(1)_{Ge}$ Charge faible (T, T^3) générateur de $SU(2)_T$	$\hbar = \frac{\vec{m}^t c^2}{\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}}$ Nombre baryonique Ba générateur de $U(1)_{Ba}$ Charge forte (Co, Co^3) générateur de $SU(2)_{Co}$ (ou de $SU(3)_{Co}$)

On observe que :
- lorsque le nombre quantique source champ est générateur de $SU(2)$, sa charge correspondante est générateur de $U(1)$,
- lorsque le nombre quantique source champ est générateur de $U(1)$, sa charge correspondante est générateur de $SU(2)$.

Cela va dans le sens des relations : charges X fonctions des nombres quantiques sources champs, que l'on propose. On a en effet une charge X générateur de $SU(n)$ lorsque 2 nombres quantiques dont elle est fonction, sont générateurs de $SU(n)$.

$$Q = f_Q((I, I^3), Ba, Ge)$$

$$Y_W = f_Y((S, S^3), Ba, Ge)$$

$$(T, T^3) = f_T((S, S^3), (I, I^3), Ba)$$

$$(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$$

IX.5.6 Remarques et interrogations sur les charges *X*

Nota 1, inversion ou modification d'une charge X, conservation du nombre quantique source champ associé
Lors d'une transformation où une charge X est modifiée, le nombre quantique source champ associé à l'interaction correspondante doit être conservé.

Pour l'interaction électromagnétique, lorsqu'on passe par exemple d'un électron e à un antiélectron $\bar{e}$ (inversion de la charge électrique Q), le spin S^3 est conservée. Cela correspond au courant électromagnétique $\bar{e}\gamma^\mu e$.

Pour l'interaction forte, lorsqu'on passe par exemple d'un neutron n à un proton p (inversion de la charge forte $Co^3 = I^3$), le nombre baryonique Ba est conservé. Cela correspond au courant fort $n\gamma^\mu p$.

Pour l'interaction hyper, lorsqu'on passe par exemple d'un antiquark $\overline{u_L}$ à un quark d_L (inversion de l'hypercharge faible Y_W), l'isospin I^3 est conservé. Cela correspond au courant hyper $\overline{u_L}\gamma^\mu d_L$ (contribution au courant faible chargé dans le Modèle électrofaible).

Observons que cela fonctionne moins bien pour l'interaction faible. Lorsqu'on passe d'un antiquark $\overline{s_L}$ à un quark d_L (inversion de la charge faible T^3), Ge n'est pas conservé puisqu'il passe de 1 à 0. Cela correspond au courant faible $\overline{s_L}\gamma^\mu d_L$ (contribution au courant faible neutre dans le Modèle électrofaible).

Par contre, cela fonctionne pour les nucléons et quarks de 1ère génération. Lorsqu'on passe d'un neutron n_L à un proton p_L ou d'un quark d_L à un quark u_L (inversion de la charge faible $T^3 = I^3$), le nombre de générations Ge est conservé.

Nota 2, charge en mouvement = rayonnement d'une onde progressive
Pour l'interaction électromagnétique, une charge électrique en mouvement accéléré rayonne une onde progressive électromagnétique (photon γ portant un spin S suivant une autre représentation du phénomène). Cette onde s'interprète comme les variations dans l'Espace-Temps d'un champ électromagnétique se déplaçant à la vitesse c dans le vide.

Suivant une analogie entre les 4 interactions, une charge électrique Q, une hypercharge faible Y_W, une charge faible T, une charge forte Co en mouvement (les courants j_Q^μ, j_Y^μ, j_T^μ, j_{Co}^μ) rayonnent respectivement une onde progressive électromagnétique (photon γ portant un spin S), une onde progressive hyper (boson B transportant un isospin I), une onde progressive faible (bosons W transportant un Ge), une onde progressive forte (gluons G transportant un Ba).
Ces ondes s'interprètent comme les variations dans l'Espace-Temps respectivement d'un champ électromagnétique, d'un champ hyper, d'un champ faible, d'un champ fort se déplaçant (à vérifier que ce soit à la vitesse c dans le vide).

Nota 3, sur des équations sources champs
Dans le 3ème mémoire, on a proposé des équations sources champs pour la gravitation en analogie avec les équations sources champs de Maxwell fondées sur la charge électrique. A voir s'il existe également des équations sources champs pour les 3 autres charges (faible, forte et hyper) ?

Nota 4, comment effectuer le lien entre le champ (ou le potentiel) représentant la particule médiatrice et la quantité quantique source champ transportée par la particule médiatrice ?
En Electrodynamique quantique relativiste, le lien entre le champ électromagnétique, le photon et le spin S est l'un des fondamentaux de la théorie.

Néanmoins, le spin n'apparait pas dans la transformation de Jauge de la fonction d'onde : $\psi \to \psi' = exp(\ ieQ\alpha(x))\psi$, ni dans la dérivée covariante : $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqQA^\mu$, ni dans le lagrangien : $L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A^\mu$.

Le lien n'est donc à priori pas si évident entre le champ électromagnétique et le spin S.

Il en est de même pour les 3 autres interactions, où il n'y a pas de lien évident entre :
- le champ ou le potentiel représentant la particule médiatrice (ainsi que la transformation de Jauge et le terme d'interaction),

- le nombre quantique source champ transporté par la particule médiatrice.

C'est d'ailleurs pour cela que le Modèle standard n'associe pas le boson B, les bosons W^1, W^2, W^3, et les gluons G^1, G^2, G^3 respectivement à I^a, Ge et Ba.

Dans le modèle de l'électron de Bohr, le lien entre le moment cinétique $\sigma = rmv = \hbar$ et l'énergie potentielle électrostatique $Ep = eA^t = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (en quelque sorte, le lien entre le spin et le champ électromagnétique) se fait via le principe fondamental de la dynamique de Newton. On a :

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\sigma = rmv = \hbar$$

$$rmv \times v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

On obtient l'expression de la vitesse de l'électron :

$$\hbar \times v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Ainsi que la constante de couplage électromagnétique :

$$\alpha_Q = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

A voir donc, pour les 4 interactions, comment obtenir un lien général entre :
- le champ représentant la particule médiatrice,
- la quantité quantique source champ transportée par la particule médiatrice ?

IX.6 Etapes de la parabole de Bohr

IX.6.1 Etapes de la parabole de Bohr pour les 4 interactions

Dans le tableau ci-dessous, on synthétise les étapes de l'effet d'Einstein et de la parabole de Bohr pour les 4 interactions ($a = 1,2,3$).

Etapes	**Interaction électromagnétique**	**Interaction hyper**	**Interaction faible**	**Interaction forte**
1- La particule médiatrice M et la quantité source champ qu'il transporte	Un photon γ porteur de spin S^a (quantité neutre électriquement)	Un boson B porteur d'isospin I^a (quantité chargée électrique)	Un boson W porteur de nombre de générations Ge (quantité chargée électrique)	Un gluon G porteur de nombre baryonique Ba (quantité chargée électrique)
2- Le fermion porteur d'une charge X	Un fermion porteur de charge électrique Q	Un fermion porteur d'hypercharge faible Y_W	Un fermion gaucher porteur de charge faible T^a	Un hadron porteur de charge forte Co^a
3- Echange de la quantité source champ entre la particule médiatrice et le fermion	Echange de spin S^a entre le photon et le fermion	Echange d'isospin I^a entre le boson B et le fermion	Echange de nombre de générations Ge entre le boson W et le fermion gaucher	Echange de nombre baryonique Ba entre le gluon G et le hadron

	Modification d'une quantité propre au fermion et fonction de son impulsion. Modification qui implique un changement de son niveau d'énergie (correspondant par exemple à un changement d'orbite)	Modification d'une quantité propre au fermion et fonction de son impulsion. Cela implique-t-il un changement d'orbite du fermion ?	Modification d'une quantité propre au fermion gaucher et fonction de sa masse. Cela implique-t-il un changement d'orbite du fermion gaucher ?	Modification d'une quantité propre au hadron et fonction de sa masse. Cela implique-t-il un changement d'orbite du hadron ?
4- Exemples de réactions observées	Changement du niveau d'énergie de l'électron Transition hyperfine	Passage d'un neutron n à un proton p, par exemple lors d'une désintégration β^- Changement de saveurs pour le quark ou le lepton de même génération	Changement de générations du fermion, par exemple lors d'une désintégration β à courant neutre (passage d'un quark $\bar{s}$ à un quark $\bar{d}$)	Passage du nucléon p à un quark u, ou à un quark composant d'un pentaquark
5- Charge conservée lors de la réaction	Q conservée lors de la transition hyperfine, e_R et e_L ont même Q	Y_W conservée lors de la désintégration β^-, n_L et p_L ont même Y_W	T^a conservée lors du changement de générations, $\bar{s}$ et $\bar{d}$ ont même T^a	Co^a conservée lors du changement baryonique, p et u ont même $Co^3 = I^3$
6- Effet, apparition d'un courant, observation de l'interaction	Déplacement dans l'Espace de la charge électrique Q entre 2 niveaux d'énergie (ou 2 orbites de l'électron) Courant électromagnétique j_Q^μ	Déplacement dans l'Espace de l'hypercharge faible Y_W Courant hyper $j_{Y_W}^\mu$	Déplacement dans le « Temps » de la charge faible T^a Courant faible $j_{T^a}^\mu$	Déplacement dans le « Temps » de la charge forte Co^a Courant fort $j_{Co^a}^\mu$

Nota 1, sur les 2 sens de la parabole
Comme on l'a déjà évoqué, les étapes de la parabole de Bohr fonctionnent dans l'autre sens. C'est-à-dire un courant de charge X rayonne une onde particule transportant un nombre quantique source champ.

Nota 2, définition d'une interaction
La notion d'interaction est directement liée au déplacement de la charge X associée à l'interaction.
Suite à l'échange d'un nombre quantique source champ porté par une particule médiatrice, on observe une interaction lorsqu'on a déplacement d'une charge X fonction des nombres quantiques sources champs autres que celui porté par la particule médiatrice.

Par exemple, un photon γ peut échanger des spins. Par contre, il n'y a pas de déplacement de la charge Q, puisque la sienne est nulle. Un photon γ n'est donc pas sujet à l'interaction électromagnétique.

Nota 3, modification de la masse et donc de l'orbite ?
Pour tenter de répondre à l'interrogation : « la modification d'une quantité propre au fermion et fonction de sa masse, implique-t-elle un changement d'orbite de ce fermion ? », reprenons la 3ème loi de Kepler modifiée par I. Newton :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

avec T la période de révolution,
a le demi grand axe de la trajectoire elliptique,
M la masse du corps orbité,
m la masse du corps orbitant.

Retenons que suivant cette 3ème loi, la variation de masse m du corps orbitant (par exemples lorsqu'un hadron passerait de nucléon à quark, ou lorsqu'un fermion gaucher changerait de générations) modifie le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ et donc son orbite.

IX.6.2 Transformation de Jauge $SU(n)$

Lors d'une transformation de Jauge de $SU(n)$, on a (avec $a = 1,2,3$) :
- des quadrivecteurs potentiels A^μ , B^μ , $W^{a\mu}$, $G^{a\mu}$, représentant respectivement les particules médiatrices γ, B, W^aet G^a, transportant les nombres quantique S^a, I^a, Ge et Ba, qui sont annulés,
- les 4 nombres quantiques de type charge Q, Y_W, T^a, Co^a, associés à des charges élémentaires $g_Q = e$, g_Y, g_T, g_{Co} et à des quadrivecteur charges courants j_Q^μ, $j_{Y_W}^\mu$, $j_{T^a}^\mu$, $j_{Co^a}^\mu$, qui sont conservés (en adéquation avec le théorème de Noether),
- des termes d'énergie d'interaction entre quadrivecteur courants et quadrivecteur potentiels, du type $ej_Q^\mu \cdot A^\mu$, $g_Y j_{Y_W}^\mu \cdot B^\mu$, $g_T j_{T^a}^\mu \cdot W^{a\mu}$, $g_{Co} j_{Co^a}^\mu \cdot G^{a\mu}$, qui sont à ajouter dans le Lagrangien afin de rendre invariantes les grandes lois de la Nature.

On récapitule dans le tableau ci-dessous, pour une transformation de Jauge, les analogies entre les 4 interactions, avec les étapes correspondantes de la parabole de Bohr :

Etapes de la parabole	**Notions quantiques**	**Interaction électromagnétique**	**Interaction hyper**	**Interaction faible**	**Interaction forte**
1-	**Particules médiatrices**	γ	B	W^a	G^a
1-	**Quadrivecteurs potentiels annulés**	A^μ	B^μ	$W^{a\mu}$	$G^{a\mu}$
1-	**Nombres quantiques source champ**	S^a	I^a	Ge	Ba
2-	**Nombres quantiques charge** X	Q	Y_W	T^a	Co^a
2-	**Charges élémentaires**	$g_Q = e$	g_Y	g_T	g_{Co}
6-	**Quadrivecteurs charges courants**	j_Q^μ	$j_{Y_W}^\mu$	$j_{T^a}^\mu$	$j_{Co^a}^\mu$

6-	**Energies d'interaction à ajouter dans le Lagrangien**	$ej_Q^{\mu} \cdot A^{\mu}$	$g_Y j_{Y_W}^{\mu} \cdot B^{\mu}$	$g_T j_{T^a}^{\mu} \cdot W^{a\mu}$	$g_{Co} j_{Co^a}^{\mu} \cdot G^{a\mu}$

IX.7 Conclusion du chapitre, des hypothèses à confirmer

Dans ce chapitre on a récapitulé les analogies développées tout au long de ce mémoire entre les 4 interactions. On a listé les arguments en faveur d'une charge X fonction des 3 nombres quantiques sources champs autres que celui porté par la particule médiatrice. Puis, on a rappelé comment l'effet d'Einstein et la parabole de Bohr pourraient s'appliquer à chaque interaction.

Néanmoins, si les similitudes présentées entre les 4 interactions sont souvent fortes quant à cette parabole de Bohr, le lien proposé entre équations champs source et interactions n'est pas, il est vrai, toujours probant. Par exemple, il n'y a pas de preuves concrètes que l'interaction hyper et l'isospin correspondent bien au principe fondamental de la dynamique de Newton. Quant à l'idée d'une construction des charges X à partir des nombres quantiques sources champs complémentaires, elle reste pour l'instant une hypothèse tant que les fonctions du type f_Q, f_Y , f_T , f_{Co} ne seront pas mieux connues.

On dresse le tableau suivant pour schématiser cette conclusion :

	Interaction électromagnétiques	**Analogies avec les 3 autres interactions**
Caractéristiques connues de l'électromagnétisme	Effet photoélectrique et paraboles de Bohr	Plutôt probant
Caractéristiques nouvelles et proposée dans ce mémoire pour l'électromagnétisme	Relation entre le spin et l'équation source champ de Broglie	Moyennement probant pour les 3 autres interactions
	Charge Q fonction de (I, I^3), Ba et Ge, c'est-à-dire des nombres quantiques sources champs complémentaires	Moyennement probant pour les 3 autres interactions

Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser à nouveau aux ondes gravitationnelles et à l'interaction gravitationnelle.

Chapitre X Réflexions sur l'interaction gravitationnelle

Objet du chapitre
On examine les liens entre les 4 interactions quantiques que l'on vient d'évoquer avec une hypothétique interaction gravitationnelle quantique.

X.1 Appliquer l'effet d'Einstein et la parabole de Bohr à une éventuelle interaction gravitationnelle quantique

X.1.1 Préambule

Dans les chapitres précédents, on a décrit 4 interactions : électromagnétique, hyper, faible et forte. Par ailleurs, il existe une autre célèbre interaction : l'interaction gravitationnelle, interaction qui au niveau quantique reste hypothétique. En effet, celle-ci n'est pas confirmée par l'expérience et ne fait d'ailleurs pas partie du Modèle standard. Par exemple, on ne trouve ni l'équation source champ Gauss gravitation, ni la constante gravitationnelle G, ni le champ gravitationnel *Gr* dans le mécanisme BEH attribuant une masse aux fermions.

Nota
Si on ne retrouve ni l'équation source champ Gauss gravitation, ni la constante gravitationnelle G, ni le champ gravitationnel *Gr* dans le Modèle électrofaible, la masse est par contre omniprésente en tant que composante temporelle du quadrivecteur énergie impulsion : ($p^t c = \gamma mc^2, p^x = \gamma mv^x, p^y, p^z$).

Dans ce chapitre, on va examiner si l'interaction hyper et l'interaction électromagnétique peuvent être rapprochées de l'interaction gravitationnelle, puisque ces interactions ont toutes trois une portée infinie.

Soulignons préalablement que les notions de force gravitationnelle développée au 17ème siècle par I. Newton, puis de champ gravitationnel développé au 19ème siècle sous l'influence de M. Faraday, sont finalement des notions assez différentes d'une hypothétique interaction gravitationnelle quantique, qui suppose la présence de particules médiatrices et l'échange de quantités quantifiées.

Nota
L'interaction faible et l'interaction forte ne sont elles-mêmes pas des forces, au sens qu'elles n'interviennent pas dans le principe fondamental de la dynamique de Newton. A l'instar de l'interaction électromagnétique, elles possèdent néanmoins une énergie d'interaction. Pour l'interaction électromagnétique, cette énergie d'interaction est justement égale à une énergie potentielle généralisée, dont on peut faire dériver via l'équation d'Euler Lagrange les forces électriques et magnétiques.

X.1.2 Le gravospin et le graviton

Si on généralise l'effet d'Einstein et la parabole de Bohr à une interaction gravitationnelle quantique, on a :

- un nombre quantique qu'on pourrait appeler le gravos ou le gravospin,
- des particules médiatrices, les gravitons qui porteraient ce gravospin,
- des particules de type fermion porteuses d'une charge : en l'occurrence une masse, et d'un gravospin qui peut s'inverser,
- une réaction entre particules qui consiste en un échange de gravospins entre un graviton et un fermion,
- une inversion du gravospin du fermion provoquant un déplacement du fermion, ce dernier conservant constante sa masse au cours de ce déplacement,
- un courant massique j_m^μ.

On aurait un équivalent à l'effet photo-électrique d'A. Einstein, ce serait l'effet graviton - courant massique.

Nota
A l'inverse, un courant massique j_m^μ, c'est-à-dire une masse en mouvement, pourrait générer une onde gravitationnelle de gravitons transportant des gravospins.

Dans les prochains paragraphes, on va suggérer que ces hypothétiques gravospins et gravitons n'existent pas, au sens que l'on retrouve le courant massique j_m^μ de la parabole de Bohr, à la fois dans l'interaction hyper et dans l'interaction électromagnétique.
En effet, dans certains cas, lors d'une inversion du spin ou de l'isospin, on a un changement d'orbite, déplacement d'une particule, une masse qui reste constante au cours du déplacement, et donc bien un courant massique tel qu'on le souhaite.

Nota sur un effet « photo massique »
On parle d'effet photoélectrique, comme un effet de la lumière et des photons sur la mise en mouvement des électrons, de leurs charges électriques, et apparition d'un courant électrique.
Les électrons ayant une masse, on pourrait tout aussi bien parler d'un effet « photo massique », comme un effet de la lumière et des photons sur la mise en mouvement des électrons, de leurs masses, et apparition d'un courant massique.

Cela rejoint d'ailleurs ce qu'on a proposé à la fin du 3ème mémoire, c'est-à-dire interpréter la lumière à la fois comme une onde électromagnétique et une onde gravitationnelle.
Avec les effets photoélectrique et « photo massique », des ondes électromagnétiques et gravitationnelles peuvent générer dans des « antenne » des mouvements accélérés de charges électriques et de masses, c'est-à-dire des courants électriques et des courants massiques.

X.2 Peut-on voir l'interaction électromagnétique et l'interaction hyper, comme des constituants de l'interaction gravitationnelle ?

X.2.1 Analogies entre interactions électromagnétique, hyper et gravitationnelle

On propose ici un tableau d'analogies, certainement à compléter, entre les 3 interactions électromagnétique, hyper et gravitationnelle.

	Interaction électromagnétique	**Interaction hyper**	**Interaction gravitationnelle**
Particules médiatrices	Photon γ (neutre électriquement)	Boson B (hypercharge faible neutre)	
Nombre quantique source champ	Spin S $$\frac{\hbar}{2}=\frac{1}{2}\frac{p}{K}$$	Isospin I $$\frac{\hbar}{2}=-\frac{1}{2}\frac{\dot{p}\partial x}{\partial \Omega}$$	
Charge portée par la particule sujette à l'interaction	Charge électrique Q	Hypercharge faible Y_W	Masse m ou charge $X(m)$
Exemples de réactions entre particules	Transition hyperfine, inversion du spin S, déplacement avec conservation de la charge électrique Q	Désintégration béta, passage d'un neutron à un proton, inversion de l'isospin I, déplacement avec conservation de	Transition hyperfine et désintégration béta, déplacement avec conservation de la masse

		l'hypercharge faible Y_W	
Constante	$\frac{1}{\varepsilon_0}$		$-4\pi G$
Poisson	$\Delta A^t = \nabla^2 A^t = -\frac{\rho_{charge}}{\varepsilon_0}$		$\Delta V^t = \nabla^2 V^t = 4\pi G \rho_{masse}$
Energie potentielle	$Ep = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$		$Ep = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
Potentiel de Yukawa	$\psi(r) = -g^2 \frac{e^{-(\frac{m_\gamma c r}{\hbar})}}{r}$ avec masse m_γ du photon qui tend vers 0		$\psi(r) = -g^2 \frac{e^{-(\frac{mcr}{\hbar})}}{r}$ avec masse m de la particule médiatrice qui tend vers 0
Constante de couplage dans le potentiel de Yukawa	$g^2 = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}$		$g^2 = G m_1 m_2$
Constante de couplage dans le Modèle électrofaible	$\alpha_Q = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$	$\alpha_Y = \frac{{g_Y}^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{100}$	On utilise aussi parfois : $\alpha_{X(m)} = \frac{G {m_{proton}}^2}{\hbar c}$
Bilan énergétique non relativiste	$E_m = E_c + E_p$		$E_m = E_c + E_p$
Modèle non relativiste	Modèle planétaire de l'électron de Rutherford-Bohr-Broglie-Schrödinger-Pauli L'électron est « stabilisé » par la force attractive électrostatique générée par le proton et par la force d'inertie centrifuge.		Modèle planétaire de Kepler-Newton La planète (ou le satellite) est « stabilisée » par la force attractive gravitationnelle générée par l'étoile et par la force d'inertie centrifuge.
Equation d'onde stationnaire non relativiste	Equation d'onde de Schrödinger $\Delta\psi + \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E_m - E_p)\psi = 0$ $\Delta\psi + \frac{2m_{élec}}{\hbar^2}(E_m - q_{élec}A^t)\psi = 0$ Poisson : $\Delta A^t = -\frac{q_{proton}}{\varepsilon_0}\lvert\psi\rvert^2$		Equation d'onde de Schrödinger – Newton $\Delta\psi + \frac{2m_{pla}}{\hbar^2}(E_m - E_p)\psi = 0$ $\Delta\psi + \frac{2m_{pla}}{\hbar^2}(E_m - m_{pla}V^t)\psi = 0$ Poisson : $\Delta V^t = 4\pi G m_{étoile}\lvert\psi\rvert^2$

X.2.2 Etude des charges

On rappelle les relations qu'on a proposées, donnant les 4 charges en fonction des 4 nombres quantiques sources champs :

$$Q = f_Q((I, I^3), Ba, Ge)$$

$$Y_W = f_Y((S, S^3), Ba, Ge)$$

$$(T, T^3) = f_T((S, S^3), (I, I^3), Ba)$$

$$(Co, Co^3) = f_{Co}((S, S^3), (I, I^3), Ge)$$

On note que la charge Q et l'hypercharge faible Y_W sont les charges les plus massiques, au sens qu'elles sont à la fois fonctions des 2 nombres quantiques sources champs à énergie massique $m^t c^2$: Ba et Ge.

Les courants j_Q^μ et j_Y^μ peuvent tous deux s'interpréter comme des courants transportant des énergies massiques, c'est-à-dire des déplacements de masse sous l'effet d'un champ électromagnétique et d'un champ hyper.
Ces phénomènes font penser à la modification du mouvement d'un corps massique sous l'effet d'un champ gravitationnel, c'est-à-dire à la force gravitationnelle.

X.2.3 Etude de transitions

Dans le cas de l'interaction électromagnétique, lors d'une inversion de spin S d'un proton ou d'un électron, on a par exemple déplacement du proton ou de l'électron (avec conservation de la masse de la particule lors du déplacement).
On a déplacement d'une charge électrique, mais aussi d'une masse car proton et électron sont des particules massiques.

Dans le cas de l'interaction hyper, lors de la désintégration β^- d'un neutron en proton avec l'inversion de l'isospin I^3, on a déplacement du nucléon avec une quasi-conservation de la masse (le neutron possède à priori une masse très légèrement supérieure au proton).
On a déplacement de l'hypercharge faible Y_W, mais pas de la charge électrique Q. Pour une conservation globale de la charge électrique, on admet que le boson B est chargé électriquement.

A noter que pour les leptons, cela fonctionne nettement moins bien. Si on admet que le passage d'un neutrino à un électron correspond à une inversion de l'isospin I^3, on a un déplacement du lepton. Cependant, la masse n'est pas conservée, puisque le neutrino possède une masse à priori bien plus petite que l'électron.

A voir si on peut retrouver une conservation de la masse, si on s'intéresse globalement aux 3 différentes générations de lepton : électronique, muonique et tauique ?
A voir également si on peut retrouver une conservation de la masse pour les baryons (ou les quarks), si on s'intéresse globalement aux 3 différentes générations de quarks ? Le souci de la légère différence de masse entre proton et neutron devrait alors être résolu.

X.2.4 Désintégration β^-, cas des particules gauchères du noyau de 1ère génération (lorsque $T^3 = I^3$)

On rappelle la relation de S. Glashow donné dans le Modèle électrofaible :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - T^3$$

Pour les particules gauchères de 1ère génération, on note que la charge faible T^3 est égale à l'isospin I^3
En substituant I^3 à T^3, on obtient :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - I^3$$

Lors du passage d'un proton p_L à un neutron n_L, on peut interpréter la relation $\frac{Y_W}{2} = Q - I^3$ valable à la fois pour le proton p_L et le neutron n_L, de la façon suivante :

Nombre quantique	$p_L \to n_L$	**Description**
I^3	$(+\frac{1}{2}) \to (-\frac{1}{2})$	L'isospin I^3 s'inverse lorsqu'on passe de p_L à n_L, cela génère le déplacement du nucléon et de son hypercharge faible Y_W.
Y_W	$(+1) \to (+1)$ Conservation de l'hypercharge faible. La charge Y_W « colle » au nucléon.	L'hypercharge faible Y_W se déplace et reste constante lorsqu'on passe de p_L à n_L de masse similaire (la force gravitationnelle a pour effet le déplacement d'une masse qui reste constante. Rapprocher dans ce cas Y_W et masse).
Q	$(+1) \to (0)$	La charge électrique ne se déplace pas lorsqu'on passe de p_L à n_L.

X.2.5 Transition hyperfine

On a dans le tableau ci-dessus l'analogue pour l'interaction électromagnétique et le passage d'un électron e_L à un électron e_R (on aurait aussi pu prendre : $p_L \to p_R$).

Nombre quantique	$e_L \to e_R$	**Description**
S^3	$(-\frac{1}{2}) \to (+\frac{1}{2})$	Le spin s'inverse lorsqu'on passe de e_L à e_R, cela génère un changement d'orbite de l'électron et le déplacement de la charge électrique Q.
Q	$(-1) \to (-1)$ Conservation de la charge électrique. La charge Q « colle » à l'électron.	La charge électrique Q se déplace et reste constante lorsqu'on passe de e_L à e_R (la force électromagnétique a pour effet le déplacement d'une charge électrique qui reste constante.). On a également déplacement d'une masse qui reste constante, puisque e_L et e_R ont même masse.
Y_W	$(-1) \to (-2)$	L'hypercharge faible Y_W ne se déplace pas lorsqu'on passe de e_L à e_R.

Pour **l'interaction hyper** et pour les particules gauchères du noyau de 1ère génération, on a :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - I^3$$

L'hypercharge faible est fonction de la charge électrique et de la quantité transportée par le boson B.

Pour **l'interaction électromagnétique** et pour les électrons e_L et e_R, la relation analogue est :

$$\frac{Q}{2} = Y_W + 1 + S^3$$

La charge électrique est fonction de l'hypercharge faible et de la quantité transportée par le photon γ.

X.2.6 Quelle contribution à l'énergie massique ont les nombres quantiques Q et Y_W ?

Les électrons e_L et e_R ont une même masse (ou énergie massique $m^t c^2$). La contribution à l'énergie massique de e_L et e_R apparait essentiellement due à la charge électrique qui reste constante lorsqu'on passe de e_L et e_R. Cela se vérifie lorsqu'on examine le neutrino ν_{eL}, l'analogue de l'électron e_L pour l'hypercharge faible ($Y_W = -1$), mais pour lequel la charge électrique Q est nulle. La masse du neutrino ν_{eL} est très petite, voire nulle.

Par contre, pour les nucléons n_L et p_L, la situation est différente. Lorsqu'on examine le neutron n_L, l'analogue du proton p_L pour l'hypercharge faible ($Y_W = 1$), mais pour lequel la charge électrique Q est nulle, sa masse est légèrement plus importante que celle du proton. La contribution à l'énergie massique de n_L et p_L apparait essentiellement due à l'hypercharge faible Y_W, qui reste constante lorsqu'on passe de n_L et p_L.

X.2.7 Cas des interactions forte et faible

Lors d'une interaction forte entre un fermion et un gluon G, avec échange de Ba et modification du Ba du fermion, on n'observe pas de conservation de la masse du fermion lors de son « déplacement » de nucléon à quark. Les quarks de $Ba = \frac{1}{3}$ ont par exemple une masse bien plus petite que les nucléons correspondants de $Ba = 1$.
Il n'y a donc pas de rapprochement possible avec une interaction gravitationnelle et un courant massique qui se conserve lors du « déplacement » du fermion de nucléon à quark.

Il en est de même pour une interaction faible entre un fermion et un boson W, avec échange du nombre de générations Ge. On n'observe pas une conservation de la masse du quark lorsque celui-ci passe de la 1ère génération à la 2ème génération. Un quark de 1ère génération est beaucoup moins massique qu'un quark de 2ème génération.

Les contributions à l'interaction gravitationnelle semblent donc essentiellement provenir de l'interaction électromagnétique et de l'interaction hyper.

X.2.8 Sur la charge de l'interaction gravitationnelle et le courant massique

Si on accepte que l'interaction gravitationnelle soit constituée des interactions électromagnétique et hyper, l'interaction gravitationnelle doit avoir comme nombres quantiques sources champs : le spin (S, S^3) et l'isospin (I, I^3).

D'après ce qui précède, la charge X de l'interaction gravitationnelle devrait être fonction des nombres sources champs complémentaires, c'est-à-dire du nombre baryonique Ba et du nombre de générations Ge. On a donc pour la charge X de l'interaction gravitationnelle une fonction f_X du type :

$$X(m) = f_X(Ba(m), Ge(m))$$

Le nombre baryonique $Ba(m)$ et le nombre de générations $Ge(m)$ sont tous deux fonctions de la masse m. On obtient comme à l'attendu une charge $X(m)$ de l'interaction gravitationnelle fonction de la masse.

On rappelle la relation de Gell-Mann Nishijima, pour une charge électrique Q portée par un hadron :

$$Q(m,p) = I^3(p) + \frac{Ba(m)}{2} + \frac{Ge(m)}{2}$$

Pour passer de l'interaction électromagnétique à l'interaction gravitationnelle, on élimine dans la charge électrique $Q(m,p)$ les termes à impulsion p, ici l'isospin $I^3(p)$. On peut donc s'attendre, pour un hadron, à une relation du type :

$$X(m) = \frac{Ba(m)}{2} + \frac{Ge(m)}{2}$$

Dans le cas des hadrons de 1ère génération, on a :

$$X(m) = \frac{Ba(m)}{2}$$

et donc une charge $X(m)$ identique (à un facteur ½ près) au nombre baryonique.

Pour les leptons de 1ère génération, on peut s'attendre à :

$$X(m) = \frac{L_e(m)}{2}$$

Dans tous les cas, on aurait un courant massique transportant la quantité conservée $X(m)$.

Nota sur $X(m)$ négatif ou positif
Le nombre baryonique $Ba(m)$, ainsi que le nombre de générations $Ge(m)$ peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. Il en est donc de même pour $X(m)$. A expliquer alors pourquoi la masse m est toujours positive ?

X.2.9 Sur la charge de l'interaction nucléaire et un courant « impulsionnel »

Par un raisonnement analogue, on obtient une charge $X(p)$ de l'interaction nucléaire union des interactions nucléaires fortes et faibles, fonction du spin (S, S^3) et de l'isospin (I, I^3). Tous deux sont fonctions de l'impulsion p. On aurait donc pour la charge $X(p)$ de l'interaction nucléaire, une fonction f_X du type :

$$X(p) = f_X((S, S^3)(p), (I, I^3)(p))$$

On aurait également un courant « impulsionnel » transportant la quantité conservée $X(p)$.

X.2.10 Interaction gravitationnelle et interaction nucléaire, analogues l'une de l'autre dans l'Espace et le Temps ?

Dans le mémoire 2, on a proposé que la masse m^t soit l'analogue dans le Temps, du mouvement ou de la vitesse $v^{x,y,z}$ dans l'Espace.
Suivant la même proposition, l'interaction gravitationnelle qui conserve la masse m^t et qui fait varier l'impulsion $p^{x,y,z}$ serait l'analogue dans l'Espace et le Temps de l'interaction nucléaire qui fait varier la masse m^t et qui conserverait l'impulsion $p^{x,y,z}$.
L'interaction gravitationnelle aurait une portée infinie dans l'Espace et l'interaction nucléaire une portée infinie dans le Temps.

	Quantité conservée	**Quantité variable**
Interaction gravitationnelle	Masse m^t	Impulsion $p^{x,y,z}$ Mouvement ou vitesse $v^{x,y,z}$
Interaction nucléaire	Impulsion $p^{x,y,z}$ Mouvement ou vitesse $v^{x,y,z}$	Masse m^t

X.3 Trouver expérimentalement le boson B ?

Suivant ce qui a été exposé précédemment, on se propose ici de dresser une liste de caractéristiques pour le boson B, afin de le retrouver expérimentalement.

X.3.1 Caractéristiques selon le Modèle électrofaible

Le Modèle électrofaible définit un boson B particule médiatrice de l'interaction hyper. Il n'attribue aucune masse au boson B à partir du mécanisme BEH. Le boson B participe aux désintégrations $\beta^{\pm}$. Lors d'une désintégration β^-, il est très instable, puisqu'il se désintègre très rapidement en un électron et un antineutrino. Il possède à priori une masse nulle et l'interaction hyper une portée infinie.

X.3.2 Nouvelles caractéristiques proposées dans ce mémoire

Dans ce mémoire, par rapport au Modèle électrofaible, on propose de nouvelles caractéristiques pour le boson B.
Le boson B porte un isospin I^3. A l'instar du photon, il possède une impulsion. Lors d'une désintégration β^-, un boson B est émis par un neutron lorsque ce dernier se transforme en proton. On

a la réaction de diffusion faisant intervenir l'interaction hyper, avec inversion de I^3 et conservation de Y_W :

$$n_L(I^3 = -\frac{1}{2}, Y_W = 1, Q = 0) \to p_L(I^3 = \frac{1}{2}, Y_W = 1, Q = 1) + B(I^3 = -1, Y_W = 0, Q = -1)$$

Le boson B interagit également avec le couple électron e_L, antineutrinos $\overline{\nu_{eL}}$, avec inversion de I^3 et conservation de Y_W. On a les réactions de diffusion et de création :

$$\nu_{eL}(I^3 = \frac{1}{2}, Y_W = -1, Q = 0) + B(I^3 = -1, Y_W = 0, Q = -1) \to e_L(I^3 = -\frac{1}{2}, Y_W = -1, Q = -1)$$

$$B(I^3 = -1, Y_W = 0, Q = -1) \to \overline{\nu_{eL}}(I^3 = -\frac{1}{2}, Y_W = 1, Q = 0) + e_L(I^3 = -\frac{1}{2}, Y_W = -1, Q = -1)$$

Suivant la relation de Gell-Mann Nishijima, l'isospin I^3 est chargé électriquement. Le boson B qui porte un isospin I^3, est donc chargé électriquement (c'est ce qu'on indique ci-dessus avec $Q = -1$).

Comme déjà souligné dans ce chapitre, lors de l'inversion de l'isospin I^3 et passage du neutron au proton, on a conservation de la masse et apparition d'un courant massique conservé, comme on l'aurait pour une force gravitationnelle. On a donc l'interaction hyper et le boson B qui interviennent dans l'interaction gravitationnelle. Le boson B et le photon γ sont les deux ondes particules constituantes des ondes gravitationnelles.

Nota 1 sur les ondes gravitationnelles
Si on suppose qu'un courant massique rayonne une onde gravitationnelle, et que les interactions électromagnétiques et hyper sont toutes deux des contributions à l'interaction gravitationnelle et donc à l'existence d'un courant massique, les ondes électromagnétiques et hyper doivent toutes deux être des contributions aux ondes gravitationnelles.

Nota 2 sur les particules médiatrices sujettes aux autres interactions ?
On propose dans ce mémoire qu'une particule médiatrice est chargée pour les 3 interactions, autres que celle pour laquelle elle est la médiatrice. Dans ce cas, à vérifier expérimentalement si la particule médiatrice d'une interaction est sujette ou non aux 3 autres interactions ?
Si c'est le cas, en interagissant, une particule médiatrice doit gagner un nombre quantique source champ et se transformer en fermion.
A ce sujet, notons qu'un photon est sensible à la gravitation, puisqu'un rayon lumineux est dévié par un champ gravitationnel.

Nota 3 sur la masse au repos
Soulignons que ce qui est nul, aussi bien pour le photon γ que pour le boson *B*, c'est leur masse au repos m_O^t par rapport à l'observateur. Lorsqu'ils ont une vitesse *c*, on ne sait rien de leur masse. Cela explique notamment la sensibilité à la gravitation du photon γ ou sa participation à la diffusion Compton. On y reviendra à la fin du prochain mémoire.

En résumé, voici les caractéristiques qualitatives du boson B qui permettraient de le retrouver expérimentalement. Le boson B possède une masse nulle au repos, une impulsion, un isospin I^3, une charge électrique, une charge forte et une charge faible. On le trouve dans les désintégrations $\beta^{\pm}$. Il devrait contribuer, comme le photon γ, à l'interaction gravitationnelle.

X.4 Charge des particules suivant l'interaction

Dans le tableau ci-dessous, on liste les particules suivant leurs participations aux interactions.

	Interaction gravitationnelle	Interaction nucléaire

La particule ne participe pas à l'interaction si sa charge nulle	**Interaction électromagnétique**	**Interaction hyper**	**Interaction faible**	**Interaction forte**
	Cohésion de l'atome	**Cohésion de l'atome**	**Cohésion du noyau + cohésion des leptons**	**Cohésion du noyau**
Proton gaucher	+X	+X	$+X^3$	$+X^3$
Neutron gaucher		+X	$-X^3$	$-X^3$
Proton droitier	+X	+X		$+X^3$
Neutron droitier		+X		$-X^3$
Electron gaucher	-X	-X	$-X^3$	
Neutrino gaucher		-X	$+X^3$	
Electron droitier	-X	-X		
Neutrino droitier ou stérile (non observé)		-X?		

Nota 1 sur le neutrino stérile
En 1967, B. Pontecorvo propose l'existence d'un neutrino stérile, du type neutrino droitier ou antineutrino gaucher, non sujet aux interactions électromagnétique, forte et faible. En effet, ses charges électrique, forte et faible sont nulles.
Selon B. Pontecorvo, ce neutrino stérile devrait prendre part aux phénomènes d'oscillation des neutrinos, il posséderait une masse et serait donc sujet à l'interaction gravitationnelle. Pour l'instant, ce neutrino stérile n'a jamais été détecté.

Si on reprend la relation de Glashow $Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$, un neutrino droitier possède une hypercharge faible Y_W nulle, est n'est donc pas sujet à l'interaction hyper.
Cependant, si on accepte que les neutrinos aient une masse et que l'interaction hyper apporte une contribution à l'interaction gravitationnelle, un neutrino droitier pourrait tout de même être sujet à l'interaction hyper et posséder une hypercharge faible non nulle. La relation de Glashow serait à alors amender.

A confirmer ou à infirmer cela par l'expérience, afin de mieux comprendre l'interaction gravitationnelle et ce neutrino stérile.

Nota 2 sur la caractérisation des particules à partir de leurs participations ou non aux interactions
Inspiré par ce tableau, on peut suggérer que toute particule est *d'abord* caractérisée par les interactions auxquelles elle participe ou non.
Ainsi, suivant cette idée, un proton ou un électron se différencient respectivement d'un neutron ou d'un neutrino *essentiellement* parce que proton et électron sont soumis à l'interaction électromagnétique, alors que neutron et neutrinos ne le sont pas.
De même, les hadrons particules du noyau se différencient des leptons particules hors du noyau *essentiellement* parce que les hadrons sont soumis à l'interaction forte, alors que les leptons ne le sont pas.

De même, les particules gauchères se différencient des particules droitières *essentiellement* parce que les premières sont soumises à l'interaction faible, alors que les deuxièmes ne le sont pas.

Ce qui reste à expliquer, c'est pourquoi lorsqu'on annule la charge électrique d'une particule, c'est-à-dire lorsqu'on la rend insensible à l'interaction électromagnétique, par exemple en passant d'un proton à un neutron, d'autres caractéristiques de la particule se modifient ? En passant du proton au neutron, l'isospin, ainsi que les charges fortes et faibles sont inversés, la masse varie aussi très légèrement…
De même, lorsqu'on annule la charge forte d'une particule, c'est-à-dire lorsqu'on la rend insensible à l'interaction forte, par exemple en passant d'un proton à un électron, pourquoi d'autres caractéristiques de la particule se modifient ? En passant du proton à l'électron, la charge électrique est inversée, la masse varie très fortement…
De même, lorsqu'on annule la charge faible d'une particule, par exemple en passant d'un électron gaucher à un électron droitier, pourquoi d'autres caractéristiques de la particule se modifient ? En passant d'un électron gaucher à un électron droitier, l'hypercharge faible varie (mais à priori pas la masse).

Nota 3 sur des particules d'hypercharge nulle ?
Les interactions électromagnétiques, fortes et faibles permettent chacune de distinguer deux catégories de particules (les particules sujettes à une interaction et celles non sujettes, car de charge nulle). Pour l'interaction hyper, existe-t-il également deux catégories de particules : les sujettes à l'interaction hyper et les non-sujettes car d'hypercharge faible nulle ?

Nota 4 sur les attractions des différentes interactions
Soulignons que les interactions électromagnétique et hyper sont attractives entre hadrons (particules du noyau) et lepton (particules autour du noyau) et assurent donc la cohésion de l'atome. Protons et électrons ont des charges électriques opposées et donc s'attirent. Hadrons et leptons ont des hypercharges faibles opposées et donc s'attirent.
L'interaction nucléaire forte est attractive entre proton et neutrons et assure donc la cohésion du noyau. Protons et neutrons ont des charges nucléaires fortes opposées et donc s'attirent.
L'interaction nucléaire faible assure la cohésion parmi les particules du noyau : les hadrons et parmi les particules autour du noyau : les leptons.

X.5 Proposition d'une synthèse en format « Coriolis » avec rotations « généralisées » annulées lors de changement de référentiels

Dans le tableau ci-dessous, suivant une approche en format « Coriolis », on donne les quantités d'inertie à ajouter dans les « lois de la Nature », afin que ces dernières demeurent invariantes lors d'un changement de référentiels.

Accélération ou interaction d'inertie	**Portée dans l'Espace**	**Portée dans le Temps**	**Quantité conservée lors du changement de référentiels**	**Rotation « généralisée » annulée lors du changement de référentiels**	**Quantité modifiée**	**Format « Coriolis »**	**Orientation**
Accélération de Coriolis	Infinie		$\vec{v}^{x,y,z}$ vitesse	$2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$	$\vec{m}^t$	$\vec{a}_{Cor}{}_{ty}^{x} = -\vec{v}^y \wedge 2\vec{\Omega}_{xy}^{1/t}$	Espace
Champ Electromoteur	Infinie		$\vec{v}^{x,y,z}$ vitesse	$\vec{B}_{xy}^{1/t}$	$\vec{m}^t$	$\vec{E}m_{ty}^{x} = \vec{v}^y \wedge \vec{B}_{xy}^{1/t}$	Espace
Champ « hypermoteur »	Infinie		$\vec{v}^{x,y,z}$ vitesse	$\overrightarrow{Bh}_{xy}^{1/t}$	$\vec{m}^t$	$\vec{H}m_{ty}^{x} = \vec{v}^y \wedge \overrightarrow{Bh}_{xy}^{1/t}$	Espace
Gravitation	Infinie		$\vec{m}^t$ masse	$2\vec{K}_{tx}^{1/y}$	$\vec{v}^{x,y,z}$	$\vec{F}_K{}_{ty}^{x} = \vec{m}^t \wedge 2c^2\vec{K}_{tx}^{1/y}$	Espace

Electrique	Infinie		$\vec{q}^t(\vec{m}^t)$ charge électrique	$\vec{El}^{1/y}_{tx}$	$\vec{S}^{x,y,z}(\vec{v}^{x,y,z})$ spin, moment cinétique	$\vec{F}_{El\,ty}^{\;x} = \vec{q}^t \wedge \vec{El}^{1/y}_{tx}$	Espace
Hyper	Infinie		$\vec{Y_W}^t(\vec{m}^t)$ hypercharge	$\vec{Bh}^{1/y}_{tx}$	$\vec{I}^{x,y,z}(\vec{v}^{x,y,z})$ isospin	$\vec{F}_{Bh\,ty}^{\;x} = \vec{Y_W}^t \wedge \vec{Bh}^{1/y}_{tx}$	Espace
Nucléaire		Infinie	$\vec{v}^{x,y,z}$ vitesse	$2\vec{K}^{1/y}_{tx}$	$\vec{m}^t$	$\vec{In}_{K\,ty}^{\;t} = \vec{v}^x \wedge 2c^2\vec{K}^{1/y}_{tx}$	Temps
Nucléaire forte		Infinie	$\vec{Co}^{x,y,z}(\vec{v}^{x,y,z})$ charge forte	$\vec{S}^{1/y}_{tx}$	$\vec{Ba}^t(\vec{m}^t)$	$\vec{In}_{S\,ty}^{\;t} = \vec{Co}^x \wedge \vec{S}^{1/y}_{tx}$	Temps
Nucléaire faible		Infinie	$\vec{T}^{x,y,z}(\vec{v}^{x,y,z})$ charge faible	$\vec{W}^{1/y}_{tx}$	$\vec{Ge}^t(\vec{m}^t)$	$\vec{In}_{W\,ty}^{\;t} = \vec{T}^x \wedge \vec{W}^{1/y}_{tx}$	Temps

On note qu'il existe 3 types de quantités d'inertie à ajouter :
- type accélérations d'inertie,
- type forces d'inertie ou interactions gravitationnelle, électromagnétique et hyper,
- type interactions nucléaires forte et faible.

Les 3 types de quantités d'inertie à ajouter se distinguent par l'orientation, dans l'Espace ou dans le Temps, de la quantité conservée et de la rotation « généralisée » annulée lors du changement de référentiels.
On a 3 combinaisons possibles : Espace Temps, Temps Espace, Espace Espace (avec pour cette dernière combinaison, 2 dimensions différentes de l'Espace perpendiculaires entre elles). La combinaison Temps Temps est impossible, car il faudrait 2 dimensions du Temps perpendiculaires entre elles.

Accélération ou interaction d'inertie	**Quantité conservée lors du changement de référentiels**	**Rotation « généralisée » annulée lors du changement de référentiels**	**Orientation de l'accélération ou de l'interaction d'inertie**
Accélérations d'inertie	De type orienté dans l'**Espace** $\vec{v}^{x,y,z}$	Rotation dans un plan spatial, orientée dans le **Temps** $2\vec{\Omega}^{1/t}_{xy}$	**Espace**
Interactions gravitationnelle, électromagnétique et hyper	De type orienté dans le **Temps** $\vec{m}^t$	Rotation dans un plan spatiotemporel, orientée dans l'**Espace** $2\vec{K}^{1/y}_{tx}$	**Espace**
Interactions nucléaires forte et faible	De type orienté dans l'**Espace** $\vec{v}^{x,y,z}$	Rotation dans un plan spatiotemporel, orientée dans l'**Espace** $2\vec{K}^{1/y}_{tx}$	**Temps**

Nota 1
On suppose ici explicitement :
- qu'une transformation de jauge locale,
- et qu'un changement de référentiels où on annule une rotation « généralisée »,

sont la même chose.

Nota 2
Pour étudier forces et interactions, on doit pouvoir se restreindre aux rotations « généralisées » dans un plan *spatiotemporel* annulées lors d'un changement de référentiels. En effet, lorsqu'on effectue un

changement de référentiels où on annule une rotation « généralisées » dans un plan *spatial* et que la quantité conservée est une vitesse, on obtient par exemple une accélération ou un champ électromoteur. Si de plus, on a comme quantité conservée une masse ou une charge électrique lors du changement de référentiels, on obtient une force. Celle-ci pourra alors toujours obtenue par l'annulation d'une rotation « généralisée » dans un plan *spatiotemporel*.

En résumé, forces et interactions sont à ajoutées dans les Lois de la Nature, lorsqu'on annule lors d'un changement de référentiels une rotation généralisée dans un plan *spatiotemporel* et que la quantité conservée est de type charge pour les 4 interactions fondamentales, de type masse pour l'interaction gravitationnelle et à priori de type vitesse pour l'interaction nucléaire (à confirmer pour cette dernière).

X.6 Conclusion du chapitre, sur la contribution à l'interaction gravitationnelle

En conclusion de ce chapitre, la parabole de Bohr ne semble pas s'appliquer à l'interaction gravitationnelle. En effet, on ne retrouve ni particule médiatrice, ni nombre quantique type gravospin pour la gravitation. En revanche, appréhender l'interaction gravitationnelle comme constituée par l'interaction hyper et par l'interaction électromagnétique, semble une piste prometteuse. En effet, sous l'effet de ces 2 interactions, par exemple lors d'inversions de spin S^3 et d'isospin I^3, on observe le déplacement d'un fermion avec conservation (ou quasi-conservation) de sa masse. C'est l'effet recherché pour l'interaction gravitationnelle.

Quant aux interactions fortes et faibles, elles ne semblent pas contribuer à l'interaction gravitationnelle, puisque lors d'un changement de Ba ou de Ge, la masse du fermion n'est pas conservée, avec impossibilité d'obtenir le courant massique désiré.

X.7 Conclusion du mémoire, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, sur la Matière noire et l'hypothèse et d'une nouvelle interaction

En physique, les 2 champs principaux d'expérimentation ont été d'une part l'observation des astres qui a tendu peu à peu vers un infiniment grand dans l'Espace et vers un lointain passé (étude des phénomènes de portée infinie dans l'Espace), d'autre part l'observation du « terrain », qui a tendu peu à peu vers la Physique des particules et un infiniment petit dans l'Espace (étude des phénomènes de portée infinie dans le Temps ?).
Naïvement, un observateur d'autrefois aurait pu supposer que les observations et lois des astres n'avaient rien à voir avec les observations et lois du « terrain ». Les échelles sont en effet si différentes que des points communs ne peuvent exister.

Pourtant, si on examine l'histoire de la physique, cela a été tout le contraire. Ces aller-retours incessants entre les observations des astres et celles du terrain, ces analogies, voire ces identités constatées entre lois des astres et lois du terrain, se sont souvent révélés singulièrement féconds dans la compréhension de l'Univers.
On peut penser à la célèbre parabole de la pomme d'I. Newton, observation de terrain, qui combinée avec l'observation des astres, a permis d'énoncer la loi de la gravitation universelle. Mais il y a de nombreux autres cas.
L'énigme de la matière noire, c'est-à-dire le non-respect de la gravitation newtonienne à l'échelle des Galaxies, est un autre bon exemple pour montrer l'alliance féconde des expériences menées sur l'infiniment grand et celles menées sur l'infiniment petit, dans la compréhension de l'Univers.

Pour expliquer la Matière noire, on peut actuellement distinguer 3 pistes, suivant les hypothèses proposées. La première piste est la proposition de matière supplémentaire, en l'occurrence la matière noire elle-même. La deuxième piste est la modification des lois de Newton à grande échelle. C'est par exemple la voie suivie par Mordehai Milgrom, dans le modèle empirique baptisé Mond (Modified Newtonian dynamics). La troisième piste est l'hypothèse d'une nouvelle interaction à grande portée qui viendrait compenser certains aspects de la gravitation. C'est la piste suivie par Attila

Krasznahorkay, dans ses recherches sur les particules, avec une nouvelle interaction véhiculée par le boson X17.
Les pistes suivies pour comprendre la matière noire, le sont donc à la fois vers l'infiniment grand et vers l'infiniment petit. Sans doute que cette alliance féconde parviendra un jour, à en résoudre l'énigme.

Dans le mémoire 4, on avait proposé d'expliquer la Matière noire par un analogue en gravitation, des phénomènes d'induction en électromagnétisme. En quelque sorte, une modification des lois gravitationnelles « usuelles » de Newton, et un rapprochement avec la piste de M. Milgrom.
Dans ce mémoire, on suggère que l'interaction gravitationnelle soit constituée de 2 interactions, dont une interaction hyper, que l'on peut qualifier de « nouvelle », même si elle explicitement présente dans le Modèle électrofaible. On rejoint alors la piste d'A. Krasznahorkay.

Finalement, ce mémoire avait deux objectifs. D'abord celui de montrer que les 4 interactions présentes dans le Modèle standard se ressemblaient davantage que ce dernier le présentait, notamment en suivant la parabole de Bohr. Ensuite, celui de donner une réalité à cette interaction hyper, la transformer en une interaction comparable aux 3 autres, qu'elle ne soit pas un simple « artefact technique » comme elle apparait dans Modèle électrofaible.
Les propositions faites dans ce mémoire ne seront peut-être pas retenues. Quoiqu'il en soit, la compréhension de la gravitation, de la matière noire, la quête d'une nouvelle interaction, feront certainement partie des enjeux majeurs de la physique du 21ème siècle.

Selon les idées proposées ici, les analogies entre lois des astres et lois du terrain, entre lois de l'infiniment grand et lois des particules se sont souvent révélées singulièrement fécondes dans la compréhension de l'Univers, justement à cause des analogies entre l'Espace et le Temps.
Un autre enjeu majeur sera une meilleure compréhension de ce qu'est le Temps. Depuis le début de cet essai, on a constamment utilisé une dimension temporelle identique aux trois dimensions spatiales. Cette approche du Temps se retrouve en fait constamment en Physique quantique et dans la théorie de Relativité. Dans le prochain mémoire, on va s'intéresser à la question suivante : pourquoi le Temps de la physique nous parait si différent de notre Temps ressenti ?

Bibliographie du mémoire 5

Sur de nouveaux nombres quantiques

[1] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL. Téléchargeable sur Internet sur le site http://www.sciences.ch/htmlfr/accueil.php
[2] D. Fontaine, Mélange des saveurs selon le modèle standard, Liège, 2007
[3] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007

Sur l'interaction forte, la Voie octuple et le Modèle des quarks

[4] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL
[5] Johann Collot, Classification des particules subatomiques Propriétés des interactions fondamentales, UJF Grenoble, années 2004-2005
[6] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007

Sur les nombres quantiques du Modèle électrofaible

[7] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL
[8] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007
[9] Wikipedia, Mésons, pions

Aparté sur l'antimatière

[10] Johann Collot, Cinématique, taux de désintégration et sections efficaces de réactions, UJF Grenoble, années 2005-2006

Sur l'angle de Cabibbo, les courants faibles neutres et chargés

[11] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL
[12] D. Fontaine, Mélange des saveurs selon le modèle standard, Liège, 2007
[13] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007
[14] P. Vilain, Les Courants neutres et les Particules charmées en Physique du Neutrino. Université Libre de Bruxelles, Avril 2005
[15] Wikipedia, matrice CKM

Sur les leptons et l'angle de Pontecorvo

[16] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL
[17] Johann Collot, Masse et oscillations de neutrinos, UJF Grenoble, années 2004-2005
[18] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007
[19] P. Vilain, Les Courants neutres et les Particules charmées en Physique du Neutrino. Université Libre de Bruxelles, Avril 2005
[20] Wikipedia, matrice PMNS (oscillation des neutrinos)

Sur l'interaction forte et la Chromodynamique quantique

[21] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL
[22] R. Feynman, QED: The Strange Theory of Light and Matter, Princeton University Press, 1985

Table des matières

Mémoire 6 Le Temps ressenti et le Temps en physique

Résumé du mémoire
On s'interroge ici sur les différences entre le Temps ressenti (Temps orienté telle une flèche), que l'on peut aussi qualifier de Temps psychologique, et le Temps utilisé en physique (Temps souvent décrit mathématiquement comme une dimension spatiale).

Pour répondre à cette interrogation, on étudiera les concepts les plus variés. Idée de John Wheeler et de Richard Feynman d'un électron qui remonte le Temps (idée évoquée dans le discours de réception du prix Nobel de R. Feynman en 1965). Travaux de Rudolf Clausius sur l'entropie (1865), de Ludwig Boltzmann sur l'entropie statistique (vers 1870), de Claude Shannon sur l'entropie de l'information (années 1950). Expériences de Chien-Shiung Wu (1957) sur la violation de parité lors de la désintégration bêta du cobalt-60. Relativité générale (A. Einstein vers 1915). Premiers modèles de Big-bang qui en découlent, modèles proposés par Willem de Sitter, Alexandre Friedmann et Georges Lemaître dans les années 1920. Découvertes en 1920 par Edwin Hubble d'un Univers en expansion, puis en 1965 par Arno Penzias et Robert Wilson d'un fond diffus cosmologique, deux découvertes qui viennent confirmer les modèles du Big-bang et en font une théorie. Analogies dans les années 1970 entre la thermodynamique « classique » et celle de trous noirs, par Jacob Bekenstein et Stephen Hawking.

Enfin, on élargira nos réflexions à d'autres domaines que la physique comme l'approche phénoménologiste d'Edmund Husserl (début du 20ème siècle) ou l'hypothèse Gaïa de James Lovelock (1979).

Chapitre I Pourquoi le Temps utilisé en physique semble si différent du Temps ressenti ?

Objet du chapitre
On souligne la contradiction entre le Temps fréquemment utilisé en physique : un Temps à 2 sens, traité dans les équations comme une dimension spatiale, et le Temps ressenti par nous êtres humains qui est orienté vers le futur. Pour souligner cette contradiction, le physicien A. Eddington introduit en 1927 le concept de flèche du Temps.

I.1 Le Temps de la physique, le Temps ressenti et la flèche du Temps

Dans les mémoires précédents, on a traité identiquement la dimension Temps et les trois dimensions de l'Espace. Par exemple, on a proposé la notion de vecteur rotation dans un plan spatiotemporel sur le modèle d'un vecteur rotation dans un plan spatial. Pour obtenir les équations sources champs appliquées à la gravitation, on a utilisé un Temps à deux sens similaire à une dimension spatiale. Un Temps finalement très différent du Temps ressenti, dans lequel nous vivons.

En fait, ce constat s'applique à de nombreux autres modèles et théories physiques, où les caractéristiques du Temps utilisé paraissent souvent bien différentes de celles du Temps ressenti. En particulier, la plupart des équations fondamentales de la physique sont invariantes par renversement du Temps.

A contrario, le Temps ressenti, dans lequel nous vivons, est orienté et ne s'apparente pas à une dimension spatiale. Il semble s'écouler à peu près linéairement (même si tous, nous percevons une accélération de l'écoulement en vieillissant). En 1927, pour caractériser ce Temps ressenti et orienté, le physicien A. Eddington introduit la notion de flèche du Temps. Une notion qui insiste sur le constat que le Temps, notre Temps, semble s'écouler toujours dans la même direction et dans le même sens. La flèche du Temps est fréquemment qualifiée de flèche psychologique car elle se réfère à notre esprit.

Ainsi, l'une des questions fondamentales de la physique est celle-ci : pourquoi à partir d'équations mathématiques le plus souvent réversibles dans le Temps, notre Temps ressenti prend-il une direction particulière ?

Nota sur la durée concrète d'Henri Bergson (1859 – 1942)
De nombreux scientifiques et philosophes ont proposés de distinguer deux formes de Temps. Même si les termes utilisés sont souvent différents de ceux de Temps ressenti et de Temps de la physique, on peut y retrouver des significations similaires ou tout du moins proches.
Par exemple, dans *Essai sur les données immédiates de la conscience* (1889), H. Bergson oppose deux notions du Temps. La première notion est le Temps que se représente notre intelligence. Ce Temps est semblable à un schéma géométrique, il est homogène et conçu comme un continu à une dimension.
La deuxième notion est pour H. Bergson la véritable nature du Temps. Il est réel et possède une durée concrète qui est progrès véritable, création de formes nouvelles et invention continue.
Dans ce mémoire, contrairement à H. Bergson, on ne suggère pas que l'un des deux Temps soit réel et l'autre une simple représentation. Par contre, on souligne cette démarcation entre un Temps de la physique (selon H. Bergson, celui que se représente notre intelligence) et un Temps ressenti (selon H. Bergson, celui qui est réel et en mode invention continue).

I.2 Le Temps dans la théorie de la Relativité, souvent présenté comme similaire à une dimension spatiale

Dans les écrits scientifiques d'A. Einstein, une idée revient inlassablement. C'est le traitement de la dimension Temps à l'image des trois dimensions de l'Espace.

Malgré la difficulté d'accepter intuitivement une telle ressemblance entre Temps et Espace, A. Einstein et ses successeurs ont constaté que l'analogie entre Temps et Espace est bien souvent féconde dans les tentatives de compréhension de l'Univers.

Par exemple, dans la théorie de la Relativité, on retrouve un traitement identique entre Temps et Espace dans la proposition d'un continuum Espace-Temps à quatre dimensions, dans des déformations des distances à l'image de celles des durées, ou dans la variable locale ct traitée (presque) comme les variables locales x, y, z.

On l'observe aussi dans la notion de quadrivecteur Espace-Temps. En géométrie, dans un Espace à trois dimensions, on utilise usuellement la notion de vecteur. Les mathématiciens généralisent cette notion de vecteur dans un espace à n dimensions identiques.
On doit à H. Minkowski et A. Einstein l'introduction du quadrivecteur Espace-Temps dans la théorie de la Relativité. Au lieu de travailler dans un Espace à trois dimensions, utilisant des vecteurs, ou plutôt des tri-vecteurs Espace pour reprendre une terminologie analogue, on travaille dans un Espace-Temps à quatre dimensions, utilisant des quadrivecteurs Espace-Temps. Cela suppose implicitement une dimension temporelle de même nature que les trois dimensions spatiales.

La théorie de la Relativité et son prolongement à l'électromagnétisme et à la Physique quantique, l'Electrodynamique quantique relativiste, utilisent de nombreux quadrivecteurs Espace-Temps : le quadrivecteur énergie impulsion (généralisation du tri-vecteur quantité de mouvement), le quadrivecteur pulsation vecteur d'onde, le quadrivecteur potentiel électromagnétique, le quadrivecteur densité de charge courants, etc. Tous ces quadrivecteurs manifestent une identité d'approche pour le Temps et l'Espace.

I.3 La plupart des théories physiques sont réversibles dans le Temps

A travers quelques exemples, soulignons maintenant que la plupart des théories physiques, de la gravitation newtonienne, en passant par la théorie de la Relativité, jusqu'à l'Electrodynamique quantique relativiste sont réversibles dans le Temps.

I.3.1 Théorie de la Gravitation d'I. Newton

Commençons par l'expérience de pensée suivante. Imaginons une soucoupe volante A filmée par un expérimentateur E. La soucoupe volante possède une vitesse initiale, puis s'éloigne moteurs éteints de la Terre.

Lors du passage (usuel) du film vers le futur, l'expérimentateur E visualise un mouvement décéléré de la soucoupe volante A sous l'effet de la force gravitationnelle attractive de la Terre, en accord avec la théorie de la Gravitation d'I. Newton.
Lors du passage à rebours du film vers le passé, l'expérimentateur E visualise un mouvement accéléré de la soucoupe volante A se rapprochant de la Terre. Cette soucoupe volante A subit une force gravitationnelle attractive et un mouvement accéléré, également en accord avec la théorie d'I. Newton.

Cette expérience de pensée souligne la réversibilité dans le Temps de la théorie la Gravitation d'I. Newton. Que le film soit passé vers le futur ou vers le passé, les images visualisées sont en accord avec la théorie.

I.3.2 Théorie de la Relativité d'A. Einstein et antimatière de P. A. Dirac

Précédemment, on a souligné que la théorie de la Relativité traite le Temps et l'Espace comme s'ils étaient de nature similaire. Cependant, initialement, la théorie de la Relativité n'accorde pas au Temps 2 sens comme elle le fait pour les dimensions spatiales. Cela apparait dans le choix d'une énergie positive pour les solutions de l'équation :

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$

La question d'une réversibilité temporelle de la théorie de la Relativité se pose à partir de 1928, avec l'introduction par P. A. Dirac d'une équation d'onde nécessitant des solutions d'énergie à la fois positives et négatives, et donc implicitement réversibles dans le Temps :

$$E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$$

P. A. Dirac propose d'interpréter l'énergie négative comme de l'antimatière, c'est-à-dire des antiparticules de même masse et de charge électrique opposée à la particule de matière correspondante. Par exemple, l'antiélectron (qu'on appelle également le positron) est l'antiparticule de l'électron.

A l'époque, la proposition de P. A. Dirac laisse incrédule la plupart des physiciens. Cependant, quelques années plus tard, en 1932, Carl David Anderson découvre dans les rayonnements cosmiques du ciel des électrons à charge positive. L'hypothèse d'une antimatière devient largement acceptée par la communauté scientifique.

Nota
Cette hypothèse d'antimatière est d'autant plus intéressante qu'elle suggère une conservation énergétique à l'échelle de l'Univers. Si matière et antimatière sont en même quantité, le bilan total de l'énergie de l'Univers est nul.

I.3.3 Le positron, l'électron qui remonte le Temps et l'Electrodynamique quantique relativiste

Dans les années 1950, R. Feynman propose l'idée suivante : le positron (ou l'antiélectron) s'apparente à un électron remontant le Temps. R. Feynman associe le suffixe anti à la propriété de remonter le Temps.

On appelle cette association la prescription d'E. Stueckelberg et de R. Feynman, en référence à E. Stueckelberg qui a eu une idée similaire quelques années auparavant.

R. Feynman introduit cette association dans les équations de l'Electrodynamique quantiques relativistes. Soulignons qu'on la retrouve déjà dans les équations de l'électromagnétisme du 19ème siècle.

Soit une particule de charge électrique $-q$ remontant le Temps dans un champ électromagnétique. Montrons que cette particule subit les mêmes effets qu'une autre particule de charge q, de masse identique m, avançant dans le Temps dans le même sens que nous, c'est-à-dire vers le futur.

Dans un champ électromagnétique, une charge électrique répond à l'équation du mouvement :

$$m\frac{d^2\vec{X}}{d^2t} = q\vec{El} + q\frac{d\vec{X}}{dt} \wedge \vec{B}$$

Les champs $\vec{El}$ et $\vec{B}$ dérivent d'un quadrivecteur potentiel $\vec{A}$. On obtient l'équation du mouvement :

$$m\frac{d^2\vec{X}}{d^2t} = (q)\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (q)\frac{d\vec{X}}{dt} \times (\vec{\nabla}.\vec{A})$$

équivalente à :

$$m\frac{d^2\vec{X}}{d(-t)^2} = (-q)\frac{\partial\vec{A}}{\partial(-t)} + (-q)\frac{d\vec{X}}{d(-t)} \times (\vec{\nabla}.\vec{A})$$

On constate donc qu'une charge q, avançant dans le Temps suivant des instants t, présente une équation du mouvement équivalente à une charge $-q$, remontant le Temps suivant des instants $-t$.

Lors du discours de réception de son prix Nobel, R. Feynman explique comment l'idée d'un électron remontant le Temps, a germé dans son esprit. Lui-même s'inspire d'une idée de son ancien professeur J. A. Wheeler, cherchant à comprendre pourquoi tous les électrons de l'Univers ont la même masse et la même charge électrique.

« Feynman, s'exclama un jour J. A. Wheeler au téléphone, je sais pourquoi tous les électrons ont la même masse et la même charge.
–Pourquoi ? demanda R. Feynman.
–Parce que ce sont tous le même électron ! »
J. A. Wheeler expliqua alors que tous les électrons étaient une même particule qui effectue des allers-retours dans le Temps. Lors de l'aller vers le futur, il s'agit d'un électron et lors du retour d'un positron.
« Mais, Monsieur, dit R. Feynman, il n'y a pas autant de positrons et d'électron !
–Oh, peut-être sont-ils cachés dans les protons ou quelque chose de ce genre, répondit-il »

R. Feynman ne retient qu'une partie de l'idée originelle de son ancien professeur et l'applique à l'antiélectron.

Le dessin ci-dessous vient compléter le discours Nobel de R. Feynman. Il représente un électron se mouvant dans l'Espace et le Temps. Aux points A et C, électron et positron s'annihilent. On peut interpréter cette annihilation comme un demi-tour dans le Temps de l'électron, se transformant alors en positron.
A l'instant t_0, on observe 3 électrons et 2 positrons. Ces allers-retours dans le Temps permettent de générer de la matière et de l'antimatière.

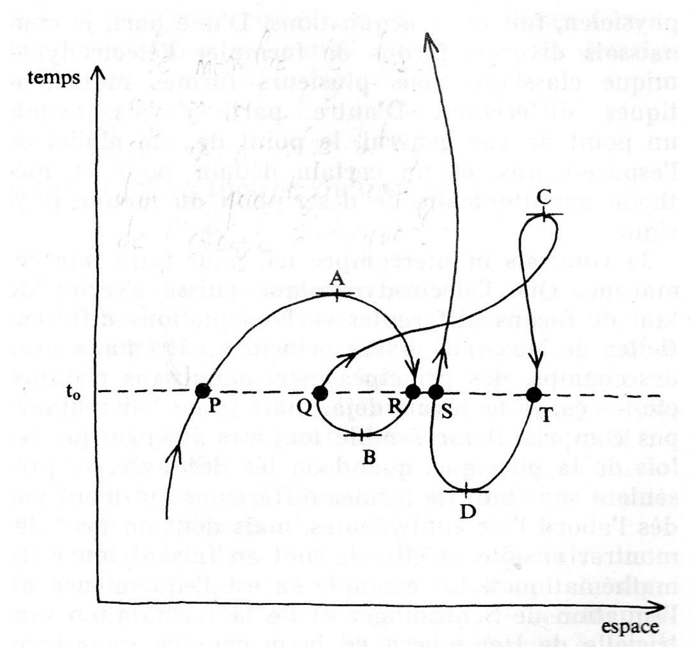


Figure 1 : dessin de R. Feynman, la ligne d'Univers d'un électron capable de remonter le Temps

Nota, générer de nouveaux éléments chimiques ou des isotopes en augmentant le nombre d'aller-retours dans le Temps d'un proton ou d'un nucléon ?
On peut s'amuser à reprendre l'idée de J. A. Wheeler, pour expliquer les différents numéros atomiques des atomes. Chaque noyau d'atome serait généré par un seul proton (de charge électrique $Q = +1$) faisant des allers-retours dans le Temps et donc apparaissant comme multiplié à un observateur suivant le nombre d'allers-retours effectués. L'Uranium $_{92}U$ se distinguerait de l'hydrogène $_1H$ par 92 allers-retours du proton au lieu de 1. On aurait néanmoins la même interrogation que R. Feynman, où sont

passées les charges électriques $Q = -1$? Peuvent-elles être cachées dans les électrons à l'image de ce que rétorque J. A. Wheeler ?
Pour tenter d'expliquer les neutrons, au lieu de voir les charges électriques $Q = +1$ aller dans le futur et les charges électriques $Q = -1$ retourner dans le passé, ce serait les hypercharges faibles $Y_w = +1$ qui iraient dans le futur et les hypercharges faibles $Y_w = -1$ qui retourneraient dans le passé. Chaque noyau d'atome serait généré par un seul nucléon (d'hypercharge faible $Y_w = +1$) faisant des allers-retours dans le Temps et donc apparaissant comme multiplié à un observateur suivant le nombre d'allers-retours effectués. L'Uranium d'isotope $^{235}_{92}U$ se distinguerait de l'Uranium d'isotope $^{232}_{92}H$par 235 allers-retours du nucléon au lieu de 232. On aurait néanmoins à nouveau la même interrogation : où sont passées les hypercharges faibles $Y_w = -1$? Peuvent-elles être cachées dans les électrons et les neutrinos tous deux de $Y_w = -1$ et allant dans le passé ?

I.3.4 Répulsion de charges opposées et attraction de charges identiques

A partir de l'idée de R. Feynman de l'électron qui remonte le Temps, il est possible de comprendre de façon intuitive pourquoi deux charges opposées se repoussent et pourquoi deux charges identiques s'attirent.

En Electrodynamique quantique, l'interaction électromagnétique se manifeste par exemple lors d'un échange de photon entre deux électrons de charges électriques identiques (avec comme conséquence de cet échange, une variation du mouvement des 2 électrons).
Intuitivement, on peut accepter que deux corps qui s'échangent un troisième, sont poussés à s'éloigner suivant le principe de conservation de l'impulsion. Deux électrons de même charges électriques, qui s'échangent un photon, sont ainsi poussés à s'éloigner (à noter que les 3 corps possèdent une impulsion).
C'est ce que décrit la figure ci-dessous :

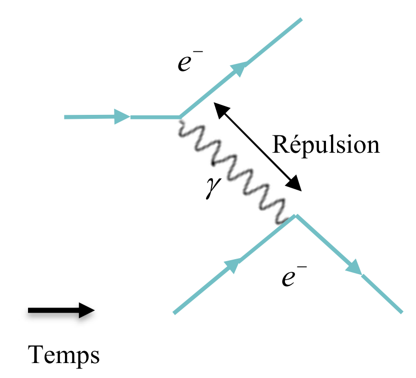


Figure 2 : 2 corps de mêmes charges électriques se repoussent

L'interaction électromagnétique se manifeste également lors d'un échange de photon entre un électron qui avance dans le Temps et un électron qui remonte le Temps, c'est-à-dire un positron.
Comme précédemment, on peut toujours accepter que deux corps qui s'échangent un troisième, sont poussés à s'éloigner. Ainsi, dans le sens du passé, électron et positron se repoussent. Et dans le sens du futur, la répulsion devient attraction : électron et positron de charges électriques opposées s'attirent.
C'est ce que décrit la figure ci-dessous :

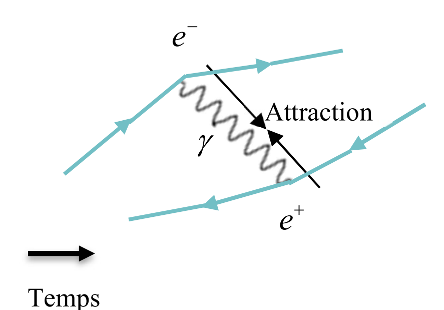


Figure 3 : 2 corps de charges électriques opposées s'attirent

Nota
Suivant le modèle de l'atome de Bohr, un premier électron excité émet un photon, il voit son énergie mécanique diminuer de ΔE_m, il change d'orbite circulaire et se rapproche par exemple du noyau de l'atome. Le photon émis possède une énergie $E = \Delta E_m = h\nu$ et une impulsion $p = \frac{E}{c} = \frac{\Delta E_m}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$.
Ce photon est ensuite absorbé par un deuxième électron. Ce dernier voit son énergie mécanique augmenter de ΔE_m, il change d'orbite circulaire et s'éloigne par exemple du noyau de l'atome.
On observe ainsi une interaction électromagnétique répulsive entre les deux électrons de même charge électrique, avec comme particule intermédiaire le photon.

I.4 Temps à 2 sens et principe de moindre action

I.4.1 Avantage et inconvénient d'un Temps à 2 sens

L'hypothèse d'un Temps à deux sens, identique aux trois dimensions spatiales présente un avantage indéniable. En effet, le modèle proposé pour l'Espace-Temps n'est pas complexifié. Au contraire, il se simplifie. L'introduction du Temps dans les équations mathématiques est même singulièrement triviale, puisqu'elle se fait identiquement aux 3 dimensions spatiales.

L'hypothèse d'un Temps à deux sens présente néanmoins un handicap majeur. C'est la perte au passage d'un principe à priori fondamental : le principe de causalité difficilement concevable avec un Temps réversible.

Pour pallier à la perte de ce principe de causalité, les partisans de la réversibilité du Temps, en particulier R. Feynman, insistent sur un autre principe fréquemment rencontré en physique : le principe de moindre action.

I.4.2 Du principe de moindre action

On peut dater la première véritable approche physique du principe de moindre action au 17ème siècle et à Louis Fermat, dans le cadre de l'optique géométrique et de l'étude de la lumière. L. Fermat insiste sur une minimisation de la trajectoire de la lumière.
Un siècle plus tard, en 1744, Pierre Louis Moreau de Maupertuis étend ce principe à la mécanique newtonienne et à l'étude des forces.
En 1756, Joseph-Louis Lagrange propose une description mathématique du principe et l'applique à des phénomènes variés de la physique. Par exemples, la trajectoire de la lumière dans des milieux dispersifs, les lois classiques de la dynamique newtonienne.
Dans sa thèse de 1942, R. Feynman s'intéresse à son tour à ce principe, il étudie son adaptation à la mécanique quantique.

Pour expliciter le principe de moindre action, reprenons la parabole savoureuse de R. Feynman rapportée dans son ouvrage *La nature de la physique*.

Sur une plage ensoleillée de l'océan, un maître-nageur court secourir une baigneuse qui se noie à une vingtaine de mètres du rivage. Le maître-nageur symbolise la lumière ou tout autre système qui

cherche à minimiser ses efforts. Athlétique, le maître-nageur reste néanmoins un terrien, il court beaucoup plus vite qu'il ne nage. Pour minimiser ses efforts et son temps de parcours, il effectue un trajet bien plus important sur le sable que dans l'eau.

Soit v_{plage} la vitesse du maître-nageur sur la plage, $v_{océan}$ la vitesse du maître-nageur dans l'océan et c une vitesse de référence. On a :

$$c > v_{plage} > v_{océan}$$

On définit les indices :

$$n_1 = \frac{c}{v_{plage}}$$

$$n_2 = \frac{c}{v_{océan}}$$

$$n_1 < n_2$$

La trajectoire du maître-nageur forme un angle au niveau du passage plage océan (sable eau). On retrouve la loi de Snell-Descartes pour la réfraction de la lumière :

$$n_1\, sin(\theta_1) = n_2\, sin(\theta_2)$$

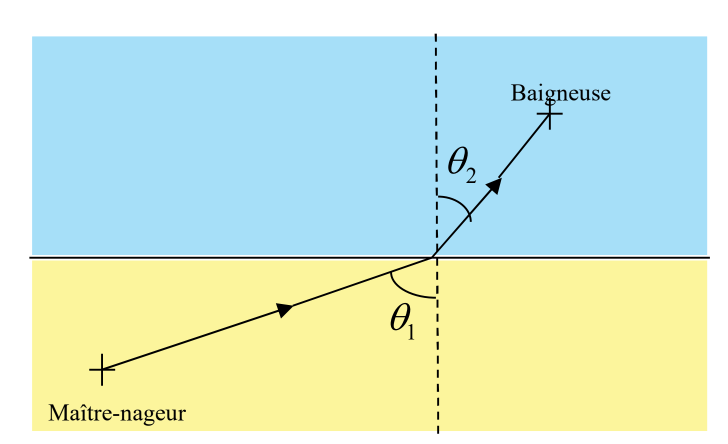


Figure 4 : minimisation de l'action du maître-nageur

En mécanique classique analytique, on définit l'action $S[q_2(t+\varepsilon), q_1(t)]$ à partir de l'intégrale du lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$ sur une durée ε :

$$S[q_2(t+\varepsilon), q_1(t)] = \int_t^{t+\varepsilon} L(q, \dot{q}, t)dt$$

Suivant l'expression mathématique du principe de moindre action, avec l'action considérée comme un extremum, on a :

$$\delta S[q] = 0$$

On en déduit l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = 0$$

Nota 1

Dans l'hypothèse d'un Temps à 2 sens, le principe de moindre action pourrait favorablement se substituer à celui de causalité comme principe constitutif de l'Univers. Le débat reste évidemment ouvert.

Nota 2
A partir du principe de moindre action, puis de l'équation d'Euler-Lagrange, il est possible de retrouver le principe fondamental de la dynamique de Newton. A voir s'il est également possible à partir de ce principe de moindre action de retrouver d'autres équations sources champs ?

I.4.3 Moment magnétique de spin et intégrales de chemin de R. Feynman

L'une des grandes réussites de l'Electrodynamique quantique relativiste, c'est de retrouver avec une grande précision la valeur expérimentale du moment magnétique de spin $\vec{\mu}_S$ de l'électron. Ce moment magnétique est décrit à l'aide du facteur de Landé g et du moment cinétique de spin $\vec{S}$:

$$\vec{\mu}_S = g\frac{-e}{2m_e}\vec{S}$$

Pour retrouver cette valeur expérimentale, on peut utiliser les intégrales de chemin de R. Feynman, construites sur le modèle de l'action S. On introduit en Electrodynamique quantique relativiste une formulation analogue de :

$$S[q_2(t+\varepsilon), q_1(t)] = \int_t^{t+\varepsilon} L(q, \dot{q}, t)dt$$

L'utilisation des intégrales de chemin de R. Feynman nécessite de tenir compte des *2 sens* du Temps, afin de retrouver la valeur de $\vec{\mu}_S$ mesurée expérimentalement. En effet, il faut à la fois introduire des particules qui avancent dans le Temps, et des antiparticules qui remontent le Temps.

I.5 Conclusion du chapitre

La plupart des théories physiques sont réversibles dans le Temps. En mécanique newtonienne, dans la théorie de la Relativité ou dans l'Electrodynamique quantique relativiste, les analogies Temps Espace sont souvent porteuses. Surtout, l'hypothèse d'un Temps à 2 sens permet de trouver des résultats expérimentaux dont l'obtention serait impossible autrement.
Cela vient en contradiction avec le Temps ressenti dans lequel nous vivons, qui présente une flèche qualifiée fréquemment de flèche psychologique, car elle se réfère à notre esprit.
Cette contradiction entre Temps utilisé en physique et Temps ressenti, apparait aujourd'hui comme l'une des grandes énigmes de la physique.

Dans les 3 prochains chapitres, on va voir néanmoins qu'il existe quelques cas en physique, théories ou faits expérimentaux, qui ne semblent pas réversibles dans le Temps. On les trouve par exemple en thermodynamique avec la notion d'entropie, de certaines expériences de particules élémentaires faisant intervenir les interactions faibles, ainsi que dans la théorie cosmologiste du Big-bang. Pour ces trois cas, on parle respectivement de flèche thermodynamique, de flèche microscopique et de flèche cosmologique. Ce sont ces trois flèches que nous allons maintenant étudier.

Chapitre II Existence d'une flèche thermodynamique ?

Objectif du chapitre
On s'intéresse ici à l'existence d'une flèche thermodynamique qui se manifeste dans la notion d'entropie.

II.1 Définitions de l'entropie

II.1.1 Entropie de Clausius

Si la plupart des théories physiques présentent une possible réversibilité temporelle, l'une d'entre elles, la thermodynamique fait figure d'exception. L'irréversibilité temporelle se manifeste dans la notion d'entropie, qui évolue en croissant dans le Temps.

On rappelle les formules de l'entropie d'un système introduites en 1865 par Rudolf Clausius dans le cadre du 2ème principe de la thermodynamique, d'après les travaux de Sadi Carnot :

- pour une transformation réversible dans le Temps, on a :

$$dS_{sys} = \frac{\delta Q_{rév}}{T}$$

- pour une transformation irréversible dans le Temps, on a :

$$dS_{sys} > \frac{\delta Q_{irrév}}{T}$$

$Q_{rév}$ est la quantité de chaleur reçue par un système thermodynamique lors d'une réaction réversible,
$Q_{irrév}$ est la quantité de chaleur reçue par un système thermodynamique lors d'une réaction irréversible,
T est la température du système thermodynamique.

On note que lors d'une réaction irréversible dans le Temps, l'entropie S_{sys} ne peut que croître.

II.1.2 Entropie statistique de Boltzmann, la mesure du désordre

Dans les années 1870, Ludwig Boltzmann développe la thermodynamique statistique. Il apporte un nouvel éclairage à la notion d'entropie en proposant l'entropie statistique d'un système :

$$S_{sys} = k_B \log w$$

avec $k_B \approx 1{,}38064 \times 10^{-23} m^2 kg \times s^{-2} K^{-1}$ la constante de Boltzmann et w le nombre d'états possibles du système étudié.

L'entropie statistique décrit la probabilité d'existence d'un système. Elle mesure le degré de désordre de ce système au niveau microscopique. Plus l'entropie du système est élevée, plus grand est le nombre d'états possibles, plus grande est sa probabilité d'existence, moins ses éléments sont ordonnés, liés entre eux. La part de l'énergie inutilisable pour l'obtention d'un travail grandit. Suivant la thermodynamique statistique, si l'on ne fait rien, le système tend naturellement vers le désordre.

II.2 Le Temps orienté en thermodynamique, rapprocher l'entropie et l'information ?

II.2.1 Démon de Maxwell

Parallèlement à L. Boltzmann, J. C. Maxwell s'intéresse lui-aussi à la thermodynamique statistique. Il semble être le premier à avoir fait un lien implicite entre entropie et information à travers une expérience de pensée qu'on appelle le démon de Maxwell.

Le démon de Maxwell est un être hypothétique qui traite de l'information et la mémorise. Le démon mesure la vitesse des molécules de gaz qui parviennent à l'entrée de deux compartiments. Il ouvre ou ferme un clapet entre les deux compartiments en fonction de la vitesse des molécules. Si les molécules vont vite, il les envoie dans le 1er compartiment. Si elles sont lentes, il les envoie dans le 2ème. Cette action construit deux compartiments différents, l'un chaud et l'autre froid.
Ainsi, le démon est capable de réduire l'entropie d'un gaz homogène à une température donnée. Il inverse le cours du Temps thermodynamique, agissant apparemment contre le second principe de la thermodynamique.

II.2.2 Entropie de Shannon, la mesure de l'information manquante pour un récepteur

Le démon de Maxwell a suscité de nombreux travaux et interrogations, afin de mieux comprendre comment il peut inverser le cours du Temps thermodynamique.
En 1929, Leo Szilard soutient l'idée que la création d'informations requiert de l'énergie pour tenir compte de la façon dont le démon de Maxwell agit. Dans les années 1950, John von Neumann et Claude Shannon rapprochent explicitement information et entropie.

Initialement, C. Shannon ne connait pas les travaux de L. Boltzmann sur l'entropie statistique. Il développe ses propres travaux sur l'information statistique. On a pour la formule de Shannon sur l'information :

$$I = k\, log(\frac{1}{p})$$

avec I la quantité d'information contenue dans une source, information manquante pour un récepteur et donc à acquérir,
p la probabilité d'un événement,
k une constante.

Si tous les événements, en nombre w, sont également probables, la probabilité de chacun vaut :

$$p = \frac{1}{w}$$

On obtient alors la formule de l'information manquante et à acquérir pour un récepteur :

$$I = k\, log\, w$$

En examinant les travaux de C. Shannon, J. von Neumann fait le lien avec ceux de L. Boltzmann. Il rapproche alors entropie et information manquante. Ainsi, I est aujourd'hui appelée entropie de Shannon ou entropie de l'information.

II.3 Conclusion du chapitre

L'irréversibilité temporelle de la thermodynamique se manifeste dans la notion d'entropie. Historiquement, cette notion d'entropie est introduite comme une mesure du désordre, qui ne peut que croître. A la fin du 19ème siècle, J. C. Maxwell est le premier à faire le lien entre entropie et information via son démon. Dans les années 1950, on associe désordre, entropie, information manquante et à acquérir. On peut alors relier la flèche de la thermodynamique à une flèche de l'information manquante, flèches contre lesquelles le démon de Maxwell peut apparemment s'opposer en traitant et en mémorisant l'information.

Chapitre III Existence d'une flèche microscopique des particules ?

Objectif du chapitre
On s'intéresse ici à l'hypothèse d'une flèche du Temps au niveau des particules élémentaires. On s'arrêtera sur quelques percées de la physique des années 1950-1960. Cette physique a particulièrement étudié les symétries P, C et T à travers les désintégrations de particules.

III.1 Existence d'une flèche microscopique du Temps ?

Dans le 1er chapitre, on a souligné que les lois de la mécanique classique, ainsi que celles de l'électromagnétisme étaient possiblement réversibles dans le Temps. La réversibilité temporelle semble même nécessaire pour l'Electrodynamique quantique relativiste des années 1950.
Pourtant, au cours des années 1950-1960, en étudiant de manière de plus en plus fine les collisions entre particules élémentaires, certains physiciens décèlent des indices d'irréversibilité temporelle. C'est ce que nous allons maintenant étudier en commençant par quelques rappels sur les opérateurs P, C et T.

III.1.1 Rappels sur les opérateurs *P* et *T*

L'opérateur P est une transformation qui inverse les coordonnées d'Espace (opération aussi appelée parité).

$$x \rightarrow x' = -x$$

Nota
Le moment cinétique orbital Let le moment cinétique de spin S ne sont pas affectés par l'opération de Parité. L'énergie et l'impulsion sont inversées. Par inversion des coordonnées d'Espace, on a :

$$L \rightarrow L' = L$$
$$S \rightarrow S' = S$$
$$p \rightarrow p' = -p$$
$$E \rightarrow E' = -E$$

L'opérateur T est une transformation qui inverse le sens du Temps.

$$t \rightarrow t' = -t$$

Nota
Par l'inversion des coordonnées du Temps, on a :

$$L \rightarrow L' = -L$$
$$S \rightarrow S' = -S$$
$$p \rightarrow p' = -p$$
$$E \rightarrow E' = -E$$

III.1.2 Rappels sur la conjugaison de charge électrique *C*

La conjugaison de charge électrique C est une transformation qui inverse la charge électrique d'une particule. Elle change aussi les quantités quantiques liées à la charge électrique. On trouve les moments magnétiques orbital et de spin, l'isospin I, l'hypercharge Y (et les nombres liés : nombre baryonique Ba, étrangeté St, nombre leptonique L_e, etc.).

La conjugaison de charge C n'affecte pas à priori les moments cinétiques orbitaux et de spin, la masse, l'impulsion, la vie moyenne d'une particule.

Nota 1

Les seules particules qui restent invariantes par conjugaison de charge C sont les particules vraiment neutres électriquement, c'est-à-dire celles qui ont leur charge électrique et les quantités quantiques liées nulles (moment magnétique, isospin, hypercharge, etc.).

On trouve le photon γ, le boson Z^0, ainsi que des états formés d'une particule et de son antiparticule : $e^-\bar{e}^+$, le méson pion π^0 formé d'un mélange de paires de quarks $u\bar{u}$ et $d\bar{d}$.

Notons que le neutron n'est pas vraiment neutre électriquement puisqu'il possède une hypercharge Y positive et un isospin I négatif. Il existe donc un antineutron neutre électriquement d'hypercharge opposée (négative) et d'isospin opposé (positif).

Nota 2
Les équations de l'interaction électromagnétique, ainsi que les équations de Maxwell sont invariantes par conjugaison de charge.

III.1.3 Rappels symétrie et violation de transformations

On appelle symétrie de P, C ou T, une conservation des lois du mouvement d'une particule par transformation P, C ou T.
On appelle violation de P, C ou T, une non conservation des lois du mouvement d'une particule par transformation P, C ou T.

III.1.4 Théorème CPT

Le théorème CPT stipule qu'une transformation $R = CPT$, c'est-à-dire une opération combinée de C, P et T laisse invariante les lois du mouvement pour une particule.

Le théorème CPT apparait pour la première fois en 1951, de manière implicite, dans les travaux de J. Schwinger. Ce dernier cherche alors à prouver la corrélation entre spin et statistique. Il tente de faire le lien entre les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein. Pour comprendre pourquoi l'électron possède un spin demi-entier alors que le photon possède un spin entier, il s'intéresse au théorème CPT.

En 1954, G. Lüders et W. Pauli établissent une démonstration du théorème CPT. Ainsi, ce dernier est parfois appelé théorème de Lüders-Pauli. Parallèlement et de manière indépendante, le théorème est aussi démontré par J. S. Bell. Ses preuves se basent sur la validité de l'invariance de grandes lois physiques vis-à-vis de la transformation de Lorentz et le principe de localité dans l'interaction des champs quantiques.

Ces démonstrations reposent sur le postulat que le monde dans lequel nous vivons est à la fois quantique, relativiste et causale. La preuve ou la réfutation expérimentale du théorème CPT reste aujourd'hui une question ouverte.

Nota 1
Si on admet le théorème CPT, une violation de CP implique une violation de T.

Nota 2
En lien avec le théorème CPT, toute particule possède une antiparticule (qui peut se confondre avec elle-même comme dans le cas du photon), de charge opposée ou nulle suivant la transformation C, d'impulsion et d'hélicité opposées suivant la transformation P, qui se propage en remontant le Temps suivant la transformation T.

III.2 Désintégrations $\beta^{\pm}$, violation de P et de C, conservation de la symétrie CP

III.2.1 Désintégration β^{-} du cobalt-60, violation de la symétrie P

En physique classique et en Electrodynamique quantique relativiste, les équations du mouvement sont séparément invariantes par transformations P, C et T.
Cependant, dans les années 1956-57, on constate avec surprise que l'invariance par parité P au niveau du spin n'est pas à priori satisfaite dans des réactions faisant intervenir l'interaction faible.

Les physiciens Tsung-Dao Lee et Chen Ning Yang s'intéressent alors à la conservation de la parité dans toutes les interactions fondamentales. Ils proposent de tester leurs idées à la physicienne expérimentale C.-S. Wu Chien-Shiung Wu sur la désintégration β^{-} du cobalt-60.

La réaction de désintégration est schématisée sur la figure ci-dessous. Les impulsions des particules sont en flèches fines et noires, les spins des particules sont en flèches grasses et colorées. On en déduit les hélicités pour les électrons et antineutrinos produits de la désintégration β^{-}.

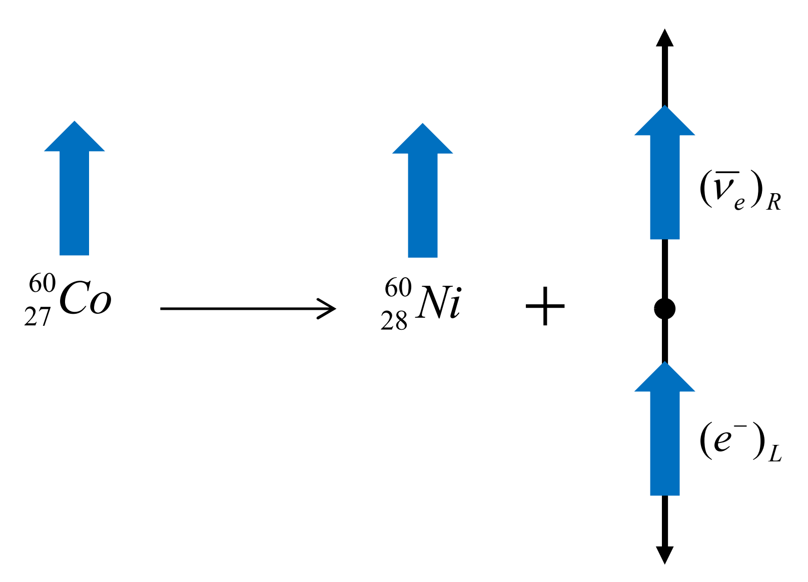


Figure 5 : désintégration β^{-} du cobalt en nickel

Si la parité P est conservée, on doit obtenir comme produit de la réaction autant d'électrons d'hélicité droite $(e^-)_R$ que d'hélicité gauche $(e^-)_L$. Or, C.-S. Wu obtient uniquement des électrons d'hélicité gauche $(e^-)_L$ et des antineutrinos d'hélicité droite $(\bar{\nu}_e)_R$ (les seuls d'ailleurs qui semblent exister).

Pour la désintégration β^{-} du Cobalt-60, la parité est donc violée au maximum, c'est-à-dire qu'on n'observe pas d'antineutrino d'hélicité gauche $(\bar{\nu}_e)_L$.

III.2.2 Rappels sur les pions

Suivant la théorie de Yang-Mills, les pions π^+, π^-et π^0 sont les particules médiatrices chargées fort de l'interaction forte. Ils sont porteurs d'une charge forte et peuvent modifier la charge forte d'un nucléon.

Les pions π^+, π^- sont de type opérateur d'échelle, ils peuvent augmenter ou diminuer d'un I^3 la charge forte d'un nucléon.
Suicant le Modèle des quarks, les pions π^+, π^-et π^0sont formés des quarks u et d (et antiquarks $\bar{u}$ et $\bar{d}$) de 1ère génération. Tous ont un isospin $I = 1$, un spin nul et une hypercharge nulle. On a le tableau suivant où on les distingue par la 3ème composante de leur isospin I^3 .

$\pi^+ \ u\bar{d}$	$\pi^0 \ (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$\pi^- \ \bar{u}d$
$(I, I^3) = (1, +1)$	$(I, I^3) = (1, 0)$	$(I, I^3) = (1, -1)$

III.2.3 Désintégrations $\beta^{\pm}$ des pions π^+ et π^-, particules de 1ère génération, conservation de la symétrie CP

Sur la figure ci-dessous, on indique les désintégrations $\beta^{\pm}$ observées des pions chargés π^+ et π^- en anti-muon, neutrino muonique, muon et antineutrino muonique.

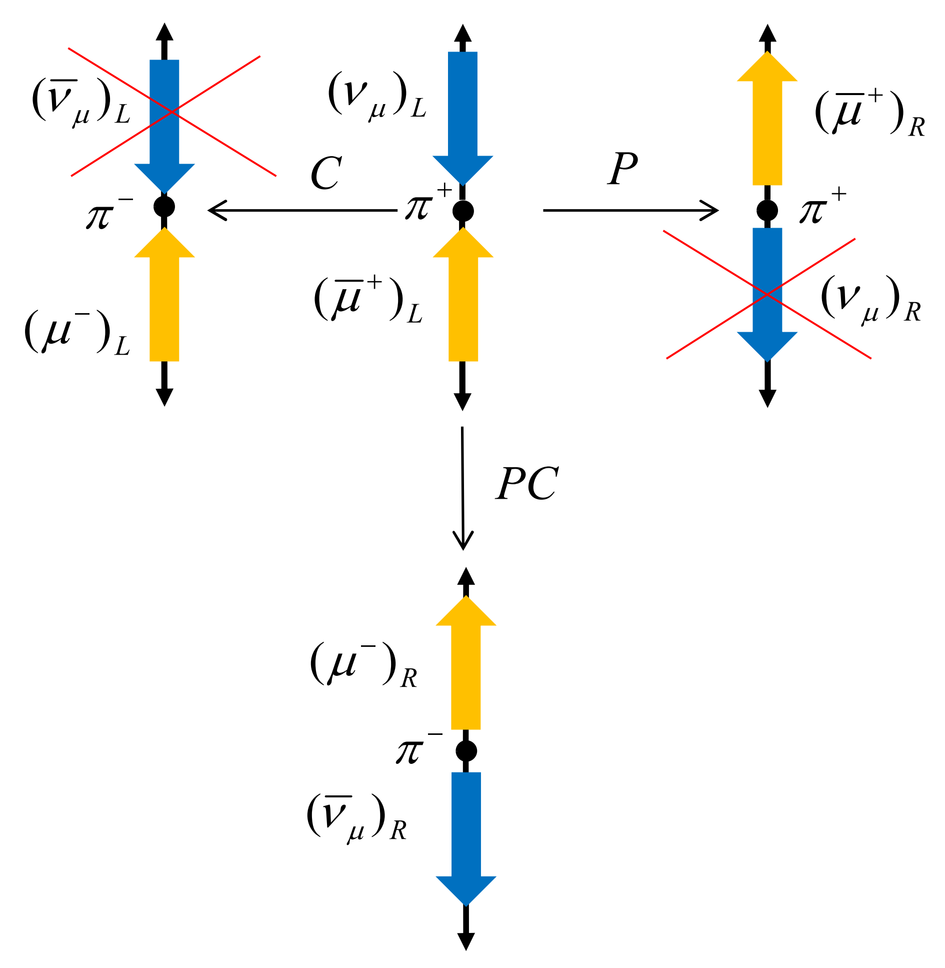


Figure 6 : desintégrations β^+ et β^- des pions π^+ et π^-

On part de désintégration β^+ d'un pion π^+ en neutrino muonique gaucher $(\nu_\mu)_L$ et anti-muon gaucher $(\bar{\mu}^+)_L$. On note que la symétrie P est violée au maximum, c'est-à-dire qu'on n'observe pas de neutrino muonique droitier $(\nu_\mu)_R$ lors de la désintégration β^+. De même, la symétrie C est violée au maximum, c'est-à-dire qu'on n'observe pas d'antineutrino muonique gaucher $(\bar{\nu}_\mu)_L$ lors de la désintégration β^- d'un pion π^-.

Par contre, on observe une désintégration β^- d'un pion π^- en anti-neutrino muonique droitier $(\bar{\nu}_\mu)_R$ et muon droitier $(\mu^-)_R$. Le passage d'une désintégration β^+ d'un pion π^+ à une désintégration β^- d'un pion π^- correspond à une transformation CP.

Ainsi, la transformation C seule est impossible car les anti-neutrinos muoniques gauchers n'existent pas. De même, la transformation P seule est impossible car les neutrinos muoniques droitiers n'existent pas. Comme les symétries C et P sont toutes deux violées au maximum, la symétrie CP est conservée. On retrouve la conservation des lois du mouvement d'une particule par transformation CP.

Dans le cas des pions, on s'arrête aux quarks de 1ère génération. On va maintenant s'intéresser aux quarks de 2ème génération, qui possèdent un nombre d'étrangeté St non nul. On va étudier la physique des kaons et constater dans ce cas une violation de la symétrie CP.

III.3 Physique des kaons, violation de la symétrie CP

III.3.1 Rappels sur les kaons

Suivant le Modèle des quarks, les mésons kaons appartiennent aux particules médiatrices de l'interaction forte (c'est-à-dire que les kaons sont porteurs d'une charge forte et peuvent modifier la charge forte d'un baryon).
Les kaons sont formés des quarks u, d et s (ainsi que de leurs antiquarks). Ils sont à l'origine de la proposition du nombre d'étrangeté St.

Pour les kaons K^+, K^-, K^0, $\bar{K}^0$, on a la décomposition en quarks suivante :

$K^+\ u\bar{s}$	$K^0\ d\bar{s}$
$\bar{K}^0\ \bar{d}s$	$K^-\ \bar{u}s$

Examinons de plus près le cas des kaons et antikaons neutres K^0 et $\bar{K}^0$.

III.3.2 Désintégration $\beta^\pm$ des kaons neutres

Les kaons et antikaons neutres K^0 et $\bar{K}^0$ peuvent se désintégrer en pions π^+, π^-, π^0. On a par exemple les réactions de désintégration $\beta^\pm$ où intervient l'interaction faible :

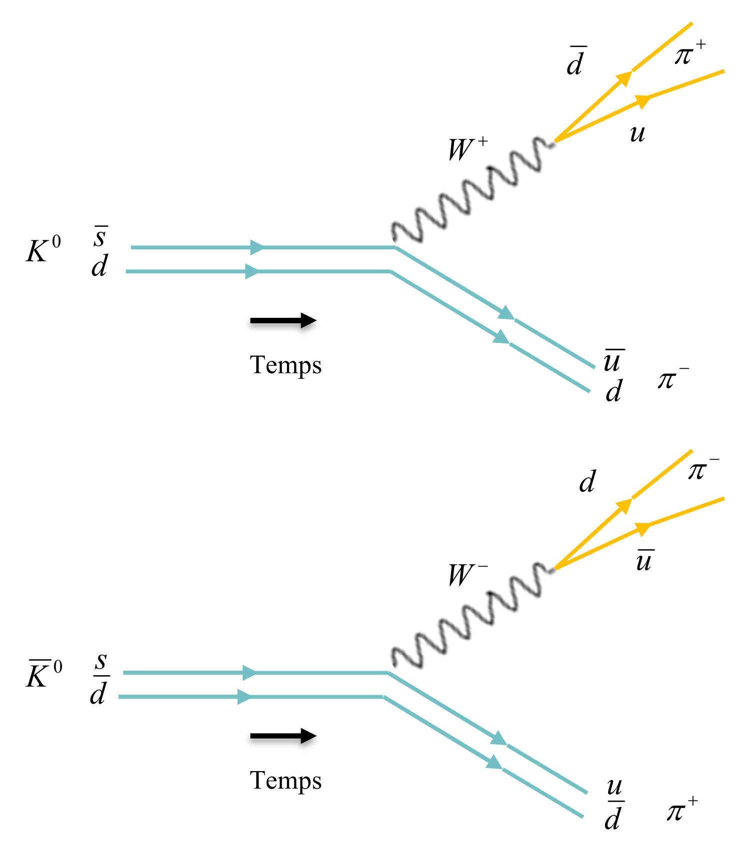


Figure 7 : désintégrations β^+ de K^0 et β^- de $\bar{K}^0$

Nota
Observons que le nombre d'étrangeté St n'est pas conservé lors de ces 2 désintégrations.

En 1964, J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch et R. Turlay mettent en évidence la violation de la symétrie CP dans l'interaction faible en étudiant les propriétés des kaons neutres. Rappelons ici leur modèle.

III.3.3 Violation de la symétrie CP dans l'interaction faible, modèle de Christenson-Cronin-Fitch-Turlay

Les kaons sont produits par interaction forte et se désintègrent par interaction faible. Tout comme les pions, ils ont une parité négative. On a les transformations suivantes par l'opérateur de parité P :

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle$$

$$P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

Par conjugaison de charge C, on a :

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

$$C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

En combinant les deux transformations CP, on obtient :

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

$$CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

Soient $\eta_{CP} = 1$ et $\eta_{CP} = -1$, les valeurs propres des opérateurs conjugaison de charge C et parité P, associées aux états propres $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$. On a les relations :

$$CP|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle$$

avec $\eta_{CP} = 1$

$$CP|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$$

avec $\eta_{CP} = -1$

On donne les états propres de la transformation CP $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ en fonction des états produits par interaction forte $|K^0\rangle$ et $|\bar{K}^0\rangle$:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

Si la symétrie CP est conservée dans l'interaction faible, les états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ doivent représenter des particules observées, c'est-à-dire les états propres de l'interaction faible. Ces particules se désintègrent par la voie $\eta_{CP} = 1$ pour l'état $|K_1^0\rangle$ et par la voie $\eta_{CP} = -1$ pour l'état $|K_2^0\rangle$, c'est-à-dire en deux et trois pions respectivement.

Nota, brève explication pour comprendre les désintégrations des kaons K_1^0 et K_2^0 en respectivement 2 et 3 pions

Soit un système à 2 pions dans un état de moment cinétique orbital relatif L, on a :

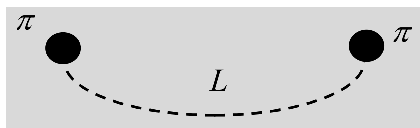


Figure 8 : système à 2 pions

On a la valeur propre de la transformation CP donnée par la formule :

$$\eta_{CP} = (\pi\pi) = (-1)^2(-1)^L = (-1)^L$$

L'analyse des distributions angulaires de pions révèle que $L = 0$.
On a donc :

$$\eta_{CP}(\pi\pi) = 1$$

Pour un système de trois pions, avec l et L les moments cinétiques orbitaux, on a :

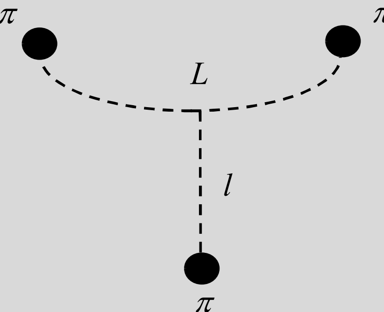


Figure 9 : système à 3 pions

On a la valeur propre de la transformation CP donnée par la formule :

$$\eta_{CP}(\pi\pi\pi) = (-1)(-1)^l(-1)^L$$

L'analyse des distributions angulaires de pions révèle que $L = l$.
On a donc :

$$\eta_{CP}(\pi\pi\pi) = -1$$

Puisque le système à 2 pions correspond à $\eta_{CP}(\pi\pi) = 1$, K_1^0 doit se désintégrer en 2 pions. De même, puisque le système à 3 pions correspond à $\eta_{CP}(\pi\pi\pi) = -1$, K_2^0 doit se désintégrer en 3 pions.

Expérimentalement, on distingue un kaon neutre long K_L doté d'un temps de vie long d'un kaon neutre court K_S doté d'un temps de vie court. Les kaons observés K_L et K_S sont tous deux les états propres de l'interaction faible.

Si la symétrie CP est conservée par interaction faible, on devrait observer un état $K_L = |K_2^0\rangle$ qui se désintègre uniquement en 3 pions et un état $K_S = |K_1^0\rangle$ qui se désintègre uniquement en deux pions. On a les 2 réactions de désintégration :

$$K_L \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

$$K_S \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Cependant, avec une probabilité très faible mais non nulle, on observe une désintégration de K_L en deux pions.

On a en effet les relations :

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\left(\left|K_1^0\right\rangle - \varepsilon\left|K_2^0\right\rangle\right)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\left(\varepsilon\left|K_1^0\right\rangle + \left|K_2^0\right\rangle\right)$$

avec $\varepsilon = 2{,}284 \pm 0{,}014 \times 10^{-3}$

De ce fait, les 2 états propres de l'interaction faible $|K_S\rangle$ et $|K_L\rangle$ ne sont pas exactement identiques aux 2 états propres de la transformation CP $\left|K_1^0\right\rangle$ et $\left|K_2^0\right\rangle$. Cela indique que la symétrie CP est violée par interaction faible.

Nota 1 sur la matrice CKM
Pour prendre en compte la violation de la symétrie CP dans l'interaction faible, Makato Kobayashi et Toshihide Maskawa proposent en 1973 une 3ème génération de quarks. Ils introduisent une phase complexe δ dans la matrice CKM matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa comprenant 3 générations de quarks. La phase δ introduit un terme qui viole la symétrie de la transformation CP.

$$M_{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 s_1 & s_1 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + c_3 s_2 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 c_3 s_2 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

A noter qu'avec la matrice de Cabibbo à deux générations de quarks, la violation de la symétrie CP n'est pas prise en compte.

Nota 2 sur le théorème CPT
Si l'on accepte le théorème CPT, une violation de la symétrie CP implique une violation (indirecte) de la symétrie T.

Nota 3, violation directe de la symétrie T ?
Il existe des expériences qui suggèrent une violation directe de la symétrie T. Cette violation est observée en 1998 lors de l'expérience CPLEAR au CERN. Elle porte également sur les kaons neutres.

L'expérience CPLEAR montre que la probabilité d'oscillation d'un kaon neutre en son antikaon n'est pas rigoureusement égale à son image par renversement temporel : la probabilité d'oscillation d'un anti-kaon en kaons. Schématiquement, on a :

$$K^0 \rightarrow \bar{K}^0 \neq \bar{K}^0 \rightarrow K^0$$

Nota 4, sur l'anticharge faible
Dans le mémoire 5, on a souligné que le passage de la matière à l'antimatière, c'est-à-dire l'opération CP est liée à l'interaction électromagnétique. L'analogue pour l'interaction faible serait l'opération qui inverse la charge faible C_T (et peut-être en outre l'opération P).

Comme on l'a évoqué, le spin S est conservé lors du passage de la matière à l'antimatière, alors qu'il devrait être modifié lors du passage de la charge faible à l'anticharge faible.
De même, le nombre de génération Ge s'inverse lors du passage de la matière à l'antimatière, alors qu'il devrait être conservé lors du passage de la charge faible à l'anticharge faible.

Dans ce cas, on peut raisonnablement accepter pour l'interaction faible, une conservation de la symétrie $C_T P$, une violation de la symétrie CP, tout en refusant une violation de la symétrie T.
Le théorème CPTne s'appliquerait alors qu'à l'interaction électromagnétique.

III.4 Conclusion du chapitre, existence ou non d'une flèche microscopique ?

En conclusion, la question sur l'existence ou non d'une flèche microscopique reste encore très discutée. Dans ce chapitre, on a évoqué le modèle de Christenson-Cronin-Fitch-Turlay qui met en évidence chez les kaons neutres une violation de la symétrie CP dans l'interaction faible.

Néanmoins, dans ce mémoire, on penchera pour l'absence de violation de la symétrie T au niveau des particules élémentaires. C'est-à-dire que l'on appliquera le théorème CPT uniquement à l'interaction électromagnétique. Quoiqu'il en soit, la question reste ouverte et on n'apportera ici aucun véritable nouvel argument.

Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser à la flèche cosmologique et aux origines de la théorie du Big-bang.

Chapitre IV Flèche cosmologique et éléments sur les théories de la Relativité générale, du Big-bang et des trous noirs

Objet du chapitre
On donne quelques éléments sur les théories de la Relativité générale, du Big-bang et des trous noirs, en soulignant les irréversibilités temporelles rencontrées.
On évoque d'abord la théorie du Big-bang, depuis les prémices dans les années 1910 avec la théorie de la Relativité générale, jusqu'à la découverte dans les années 1960 d'un rayonnement électromagnétique fossile. On termine avec quelques grandes idées de la thermodynamique des trous noirs proposées dans les années 1970.

IV.1 Rappels historiques sur la théorie de la Relativité générale

IV.1.1 La Relativité générale d'A. Einstein (années 1910)

Au cours des années 1910, A. Einstein développe la théorie de la Relativité générale qui s'applique à la gravitation. Il se fixe pour principal objectif le respect du principe suivant : les lois de la Nature restent les mêmes lors d'un changement de référentiels quelconque (par exemple un mouvement accéléré, un mouvement de rotation, etc.).

Pour développer sa théorie sur la gravitation et trouver une équation comparable à la loi universelle de la gravitation de Newton $\vec{F}_{Gr} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} = m\vec{G}r$, A. Einstein part d'une analogie avec l'équation source potentiel de Poisson gravitation :

$$\nabla^2 V^t = 4\pi G\rho$$

V^t est le potentiel newtonien,
G la constante gravitationnelle,
ρ la densité de masse.

L'idée d'A. Einstein, c'est d'étendre l'équation de Poisson gravitation aux 4 dimensions de l'Espace-Temps. Pour cela, dans la théorie de la Relativité générale, $\nabla^2 V^t$ est assimilé au tenseur de Ricci R_{ij} (les termes de $\nabla^2 V^t$ et de R_{ij} comportent tous deux des dérivées secondes). La densité de masse ρ est assimilée au tenseur T_{ij}, le tenseur énergie impulsion.

A. Einstein propose une première équation :

$$G_{ij} = R_{ij} = \frac{4\pi G}{c^4}T_{ij}$$

G_{ij} est appelée le tenseur d'Einstein.

Le souci, c'est qu'en analogie avec $\nabla^2 V^t$ qui possède une dérivée nulle, le tenseur d'Einstein $G_{ij} = R_{ij}$ ainsi défini ne possède pas une dérivée covariante nulle.

Afin d'obtenir une dérivée covariante nulle, le tenseur d'Einstein est alors redéfini avec :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$$

R est la courbure scalaire.
g_{ij} est le tenseur métrique.

A. Einstein propose une deuxième équation :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Nota 1, l'équation d'Einstein vue comme une généralisation à l'Espace-Temps de Gauss gravitation
L'équation d'Einstein appliquée à la gravitation est une équation source (tenseur énergie impulsion T_{ij}) potentiel (G_{ij}) dans un Espace-Temps à 4 dimensions. On peut l'interpréter comme une généralisation des 3 dimensions de l'Espace aux 4 dimensions de l'Espace-Temps de l'équation source potentiel de Poisson gravitation : $\nabla^2 V^t = 4\pi G\rho$ ou de l'équation source champ de Gauss gravitation « usuelle » :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{Gr}(M).\, d^2\vec{S} = \iint_V -4\pi G\rho_{masse} dV = -4\pi G M_{int}$$

$$div\vec{Gr} = -4\pi G\rho_{masse}$$

Nota 2, différences avec les équations sources champs proposées dans cet essai
Une première différence est au niveau du tenseur énergie impulsion T_{ij}, pour tout ce qui est densité d'impulsion ou flux d'énergie. Dans les équations sources champs proposées ici, pour les densités d'impulsion, on a remplacé la constante G par la constante $\frac{{l_p}^2 c}{\hbar}$ ou $\frac{1}{\hbar}$ (avec l_p la longueur de Planck).
Une autre différence est au niveau du tenseur de Ricci R_{ij}, l'équation d'Einstein ne possède pas de termes du type $-\frac{\partial V^x}{\partial t}$ présent par exemple dans le vecteur d'onde $K_{xt}^{1/y}$. Il n'y a donc pas prise en compte des phénomènes gravitationnels analogues à ceux de l'induction électromagnétique $-\frac{\partial A^x}{\partial t}$.

IV.1.2 La métrique de Minkowski

On rappelle la métrique g_{ij} donnée sous sa forme différentielle et générale :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Suivant les idées d'A. Einstein, l'intervalle d'Espace-Temps ds^2 doit être conservé quel que soit le changement de référentiels.

Dans le cas de la Relativité restreinte, on s'arrête aux changements de référentiels galiléens (ou inertiels). L'intervalle d'Espace-Temps à conserver est :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

On a la métrique dite de Minkowski :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.1.3 La métrique de K. Schwarzschild (1915)

En 1915, Karl Schwarzschild propose une résolution simple de l'équation d'Einstein dans le cas d'une symétrie sphérique : champ gravitationnel généré par une masse sphérique, statique (sans rotation) non chargée et entourée de vide.

Cette masse peut être une étoile, une planète ou un trou noir de Schwarzschild. La résolution est donnée en coordonnées sphériques (métrique de Schwarzschild en coordonnées polaires) :

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r})c^2 dt^2 - (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\,\theta\, d\phi^2)$$

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r})c^2 dt^2 - (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} dr^2 - r^2 dS$$

où :

- ds est l'intervalle d'Espace-Temps d'un déplacement infinitésimal dt, dr, $d\theta$, $d\phi$ à partir du point P centre de la symétrie sphérique,
- t, r, θ, ϕ sont les coordonnées dites de Schwarzschild du point P dans l'Espace-Temps,
- t est la coordonnée de Temps auquel on considère le point P (mesuré par une horloge située à une distance infinie de l'objet massif),
- r est la coordonnée radiale du point P,
- θ est la colatitude du point P en radians,
- ϕ est la longitude du point P en radians,
- $dS = d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\,\theta\, d\phi^2$ l'intervalle d'Espace sur la sphère de surface S pouvant croître ou décroître,
- $r_s = \frac{2G}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild de l'objet massif, avec G la constante gravitationnelle, M la masse de l'objet, et c la vitesse de la lumière.

Nota 1 sur le rayon de Schwarzschild ou rayon de l'horizon d'un trou noir

On parle aussi souvent pour $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ de rayon de l'horizon d'un trou noir. Suivant la Relativité générale, les photons, en deçà du rayon de ce trou noir, ne peuvent s'en échapper.

Nota 2 sur le rayon de Schwarzschild, la masse de Planck et les micros trous noirs quantiques

On définit parfois la masse de Planck comme la masse d'une particule, dont la longueur d'onde de Compton réduite serait égale au demi-rayon de Schwarzschild.

La longueur de Compton réduite est égale à :

$$\frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_p c}$$

et le demi-rayon de Schwarzschild est égale à :

$$\frac{r_s}{2} = \frac{Gm_p}{c^2}$$

On a :

$$\frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{r_s}{2}$$

$$\frac{\hbar}{m_p c} = \frac{Gm_p}{c^2}$$

On obtient la masse de Planck :

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

A souligner que la longueur de Compton réduite et le demi-rayon de Schwarzschild sont alors tous deux égaux à la longueur de Planck :

$$\frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{r_s}{2} = \sqrt{\frac{G^2 \hbar c}{c^4 G}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = l_p$$

Pour ce type de particules, on parle alors de micros trous noirs quantiques ou de particules de Planck.

IV.2 Rappels historiques sur la théorie du Big-bang

IV.2.1 Modèle d'Univers statique et constante cosmologique (1917)

A partir de la mécanique newtonienne et de l'équation de Poisson gravitation, il y avait déjà eu des tentatives pour décrire l'état général de l'Univers. En 1917, dans un célèbre article intitulé *Considérations cosmologiques sur la théorie de la Relativité générale*, A. Einstein propose un modèle cosmologique de l'Univers, à partir de l'équation qu'il a proposée quelques années plus tôt.

A. Einstein utilise ce qu'on appelle aujourd'hui le principe cosmologique. Ce principe stipule que l'Homme n'occupe pas une position privilégiée dans l'Univers. Cela se traduit par un Univers homogène et isotrope, c'est-à-dire semblable à lui-même quels que soient le lieu et la direction d'observation.

Au principe cosmologique, A. Einstein ajoute implicitement une autre hypothèse, celle que l'Univers est statique, c'est-à-dire n'évolue pas avec le Temps. Il propose de transformer l'équation de Poisson $\nabla^2 V^t = 4\pi G\rho$, en ajoutant ce qu'il appelle une constante Universelle Λ (appelée aujourd'hui constante cosmologique). Il obtient :

$$\nabla^2 V^t - \Lambda V^t = 4\pi G\rho$$

Nota sur l'univers ressort
Si on change le signe de Λ et qu'on annule la source, avec $\nabla^2 V^t + \Lambda V^t = 0$, on peut interpréter l'introduction de Λ, comme l'Univers assimilé à un gros ressort, effectuant des oscillations mais ne s'étendant pas infiniment (c'est-à-dire contraire à l'idée d'un Univers en expansion).

Pour un ressort :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On a une solution du type :

$$x = A\,cos(\,\omega_0 t) + B\,sin(\,\omega_0 t)$$

A. Einstein effectue une approche semblable pour son équation $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$. Il la transforme en introduisant une constante cosmologique Λ et obtient :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - g_{ij}.\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Nota
On trouve aussi souvent la forme suivante, avec Λ de signe contraire :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

IV.2.2 Modèle d'Univers en expansion, métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (années 1920)

Dans les années 1920, Willem de Sitter, Alexandre Friedmann et Georges Lemaître utilisent l'équation d'Einstein (celle sans constante cosmologique) pour développer un modèle d'Univers non plus statique, mais en expansion. Il s'agit du 1er modèle de Big-bang, même si à l'époque, ce nom ne lui est pas encore attribué.

Ce modèle d'Univers en expansion est décrit par la métrique dite de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker qui reprend en partie la métrique de Schwarzschild (surtout pour les intervalles d'Espace) :

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2(\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2dS)$$

où :

- $R(t)$ est le rayon de l'Univers. Le signe de $\dot{R}(t)$ renseigne sur l'évolution de l'Univers. $\dot{R}(t) > 0$ pour un Univers en expansion, $\dot{R}(t) < 0$ pour un Univers en contraction et $\dot{R}(t) = 0$ pour un Univers statique, le tout considéré à l'instant t.
- k est la courbure de l'Espace, $k = \{-1,0,+1\}$. Si $k = 0$ le modèle est dit plat (correspondant à l'espace euclidien de la Relativité restreinte), si $k = -1$ le modèle est dit ouvert (correspondant à une géométrie hyperbolique), et si $k = +1$ le modèle est dit clos (correspondant à une géométrie sphérique).
- $dS = d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\,\theta\, d\phi^2$ l'intervalle d'Espace sur la sphère de surface S pouvant croître ou décroître.
- t est le Temps cosmique.

En examinant cette métrique, on constate qu'elle contient un certain nombre d'hypothèses implicites :

- que l'intervalle d'Espace varie proportionnellement au facteur $R(t)^2$ fonction des instants,
- enfin que le ***Temps est orienté*** à partir d'une origine.

Contrairement à la majorité des théories physiques (y compris la Relativité générale) qui sont possiblement réversibles dans le Temps, ce 1er modèle de Big-bang est postulé non réversible dans le Temps.
L'idée d'une croissance (ou d'une décroissance) de l'Univers à partir d'un instant initial est implicitement contenue dans la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. On retrouvera cela dans les autres modèles de Big-bang.

IV.2.3 Décalage vers le rouge (1929)

Les idées de W. de Sitter, A. Friedmann et G. Lemaître d'un Univers en expansion rencontrent surtout le scepticisme, voire l'indifférence. En 1927, G. Lemaître publie un article dont l'audience restera confinée. Il propose l'existence d'un rapport constant entre distance et vitesse d'éloignement de certaines nébuleuses (aujourd'hui appelées galaxies).

En 1929, Edwin Hubble publie un long article détaillé qui parvient cette fois à toucher un large public scientifique. Il constate un décalage vers le rouge du spectre discontinu de la lumière émis par les éléments chimiques des galaxies. Le décalage vers le rouge est proportionnel à la distance des galaxies depuis notre Galaxie, la Voie lactée. Ce décalage rappelle l'effet Doppler-Fizeau d'une onde lumineuse émise par une source qui s'éloigne de l'observateur.
E. Hubble propose alors que les galaxies s'éloignent de la Voie lactée, avec une vitesse proportionnelle à leur distance, c'est la loi de Hubble.

IV.2.4 Le fond diffus cosmologique prédit dans les années 1940 et découvert en 1965

Dans les années 1950, pour la première fois, le modèle est désigné sous le terme ironique de Big-bang par le physicien Fred Hoyle, qui lui-même défend les modèles d'état statique.

En 1965, le modèle du Big-bang reçoit une nouvelle confirmation expérimentale avec la découverte du fond diffus cosmologique. Pour bien comprendre, il faut remonter quelques années plus tôt, au modèle de Big-bang proposé par George Gamow, Ralph Alpher et Robert Herman.

L'expansion de l'Univers induit naturellement une densité plus grande par le passé. À l'instar d'un gaz qui s'échauffe lorsqu'on le comprime, l'Univers doit également avoir été plus chaud par le passé.

Dans les années 1940, G. Gamow, R. Alpher et R. Herman établissent que l'Univers doit être empli d'un rayonnement électromagnétique qui perd de l'énergie du fait de l'expansion. Ce rayonnement électromagnétique devait être d'autant plus intense que l'Univers était dense. Il doit encore exister aujourd'hui, bien que considérablement affaibli.

Depuis les travaux de Gustav Kirchhoff en 1862, de Joseph Stefan en 1879, de Ludwig Boltzmann en 1884, de Wilhelm Wien en 1896, ainsi que de Max Planck en 1900, on relie rayonnement électromagnétique émis par une source (appelée corps noir lorsqu'il est considéré comme un objet idéal) et sa température T.
On rappelle ci-dessous la loi de rayonnement de Planck, correction de celle de Wien pour les basses fréquences, qui vaut aussi pour son intérêt historique car elle introduit la constante h de Planck :

$$L_\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)} - 1}$$

L_λ luminance énergétique monochromatique,
λ longueur d'onde,
T température en kelvin,
$C_1 = 2\pi hc^2$ avec c la vitesse de la lumière et h la constante de Planck,
$C_2 = \frac{hc}{k_B}$ avec k_B la constante de Boltzmann.

Dans leurs travaux, G. Gamow, R. Alpher et R. Herman suggèrent que la température actuelle du rayonnement électromagnétique de l'Univers peut être calculée à partir de la connaissance de l'âge de l'Univers (13,8 milliards d'années environ), de la densité de matière, et de l'abondance d'hélium.

En 1964-1965, Arno Allan Penzias et Robert Wilson découvrent un rayonnement électromagnétique, appelé aujourd'hui fond diffus cosmologique ou rayonnement fossile. Conformément aux prédictions de G. Gamow, R. Alpher et R. Herman, le rayonnement correspond à celui d'un corps noir à basse température (2,7 kelvins) (la température prédite étant toutefois sensiblement différente).

IV.3 Question que soulève le Big-bang, sources d'inspiration

Suite à ses confirmations expérimentales, le modèle du Big-bang acquiert le statut de théorie. Néanmoins, comme beaucoup de théories fascinantes, celle du Big-bang soulève davantage de questions qu'elle n'en résout. On cite ici le problème de l'observateur, on aborde ensuite les sources d'inspiration de la théorie.

IV.3.1 Le problème de l'observateur

« L'observateur est aussi essentiel à la création de l'Univers que l'Univers l'est à la création de l'observateur. »
J. A. Wheeler

Pour poursuivre sur cette phrase de J. A. Wheeler, l'une des principales questions soulevée par la théorie du Big-bang, c'est ce paradoxe d'une théorie relativiste, qui se construit sans observateurs, et qui est vérifiée par des observations (décalage vers le rouge, fond diffus cosmologique) qui nécessitent un observateur.
On suggèrera dans les prochains chapitres une réponse à cette contradiction.

IV.3.2 Sources d'inspiration

On relève dans la théorie du Big-bang deux types d'influences à priori contradictoires, les unes d'inspiration mystique, les autres d'inspiration scientifique.

On relève d'abord l'idée d'un dessein originel, avec un instant de création de l'Univers (et donc possiblement un Créateur), puis une marche de l'Univers en croissance perpétuelle vers un destin tracé, voire mystique.

On relève ensuite l'influence des théories évolutionnistes des espèces (théories développées surtout au 19ème siècle par Jean-Baptiste de Lamarck, Charles Darwin, etc.). L'univers est décrit tel un immense organisme qui se serait peu à peu construit. Dans toutes ces théories, on relève le principe d'une Histoire et d'un Temps orienté.

IV.4 Thermodynamique des trous noirs

On s'intéresse ici essentiellement aux trous noirs les plus simples : les trous noirs de Schwarzschild. Ils répondent à la métrique de Schwarzschild vue précédemment. Ils possèdent un rayon de Schwarzschild $r_s = \frac{2G}{c^2}$, une masse M, mais pas de charge Q ou de moment cinétique J comme les trous noirs de Kerr-Newman. Ces derniers répondent à une métrique modifiée (par rapport à celle de Schwarzschild) pour résoudre l'équation d'A. Einstein.

IV.4.1 Principes de la thermodynamique des trous noirs

Dans les années 1970, Jacob Bekenstein et Stephen Hawking s'affrontent dans un débat d'idées fécond, portant sur des analogies entre la thermodynamique « classique » et les trous noirs, « objets cosmiques » théorisés dans la Relativité générale. Ce débat et autres travaux donneront naissance à la thermodynamique des trous noirs. On résume dans ce paragraphe quelques grandes idées de ce débat. On va voir que ces analogies reposent notamment sur l'indentification entre :

- 2 grandeurs intensives : la température T d'un système et la gravité de surface κ d'un trou noir,
- 2 grandeurs extensives : l'entropie S d'un système et la surface A d'un trou noir.

Pour un trou noir au repos, suivant A. Einstein, on pose une énergie interne :

$$U = Mc^2$$

avec M la masse du trou noir.

Suivant la formule proposée en 1972 par L. Smarr, on calcule la variation de surface A d'un trou noir, auquel on injecte une petite quantité de matière énergie dMc^2 et de travail δW_{BH} :

$$dMc^2 = \frac{c^2\kappa}{8\pi G} dA + \delta W_{BH}$$

avec κ la gravité de surface du trou noir.

En 1972, J. Bekenstein propose la notion d'entropie de trou noir S_{BH} (*BH* comme black hole ou Bekenstein Hawking), avec une entropie S_{BH} proportionnelle à la surface A du trou noir.
S. Hawking et J. Bekenstein constatent que lors de la fusion de deux trous noirs, la surface A du trou noir résultant est toujours plus grande que la somme des surfaces des deux trous noirs initiaux. On a donc, à l'instar de l'entropie $dS \geq 0$, on a $dA \geq 0$.

A partir de 1973, J. Bekenstein, S. Hawking, James M. Bardeen et Brandon Carter développent des analogies entre les 4 principes de la thermodynamique et des principes s'appliquant aux trous noirs. On donne ci-dessous un tableau de ces analogies.

	Thermodynamique	**Trous noirs**
Principe zéro	La température T d'un système est la même partout lorsque celui-ci est à l'équilibre thermique	La gravité de surface κ est constante sur toute la surface du trou noir
Premier principe	$dU = TdS + \delta W$ $dU = \delta Q + \delta W$	$dMc^2 = \frac{c^2\kappa}{8\pi G} dA + \delta W_{BH}$ $dMc^2 = TdS_{BH} + \delta W_{BH}$

		$dMc^2 = \delta Q_{BH} + \delta W_{BH}$
Second principe	La variation d'entropie dS est positif (ou nulle) dans toute transformation impliquant un système fermé	La variation de surface dA est positive (ou nulle) dans toute transformation impliquant des trous noirs
Troisième principe	Impossibilité d'obtenir $T = 0$ par un processus physique	Impossibilité d'obtenir $\kappa = 0$ par un processus physique

Nota sur les fonctions d'état
On parle de fonction d'état d'un système, lorsque celle-ci ne dépend pas des différents chemins possibles parcourus autrefois par le système : elle ne dépend que de l'état actuel du système. Autrement dit, l'histoire d'un système n'a pas d'incidence sur les fonctions d'états qui le caractérisent. En thermodynamique, l'énergie interne *U* ou l'entropie *S* sont de bons exemples de fonctions d'états.

Mathématiquement, on représente leurs variations infinitésimales par une différentielle totale exacte : dU et dS. Le travail W n'est pas une fonction d'état, il dépend du chemin parcouru par le système. Mathématiquement, on représente ses variations infinitésimales par une différentielle partielle : δU.
Si on suit strictement l'analogie entre thermodynamique et trous noirs, la surface *A* ou l'entropie S_{BH} doivent être des fonctions d'état. Leurs variations infinitésimales doivent être représentées par des différentielles totales exactes : dA et dS_{BH}.

IV.4.2 Température et rayonnement des trous noirs

En 1974, S. Hawking propose que les trous noirs rayonnent et s'inspirant de la loi de rayonnement de Planck, qu'ils possèdent une température T_{BH} proportionnelle à *κ :*

$$T_{BH} = \frac{\hbar\kappa}{k_B 2\pi c}$$

avec k_B la constante de Boltzmann.
Cette température T_{BH} proportionnelle à *κ*, valide l'identification de *T* à *κ*.

Nota, température d'un trou noir de Schwarzschild
Dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild, on a :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Suivant la loi universelle de la gravitation de Newton, on a pour la gravité de surface d'un corps sphérique :

$$\kappa = \frac{GM}{{r_s}^2}$$

Dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild, on a :

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}$$

On obtient la température d'un trou noir de Schwarzschild :

$$T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}$$

A partir de l'identification de $\frac{c^2\kappa}{8\pi G}dA$ à δQ_{BH} :

$$\delta Q_{BH} = \frac{c^2\kappa}{8\pi G}dA$$

et de la température d'un trou noir :

$$T_{BH} = \frac{\hbar\kappa}{k_B 2\pi c}$$

S. Hawking calcule l'entropie d'un trou noir :

$$dS_{BH} = \frac{\delta Q_{BH}}{T_{BH}}$$

En remplaçant par les termes adéquats :

$$dS_{BH} = \frac{\delta Q_{BH}}{T_{BH}} = \frac{c^2 kdA}{8\pi G}\frac{k_B 2\pi c}{\hbar k} = \frac{k_B c^3 dA}{4G\hbar}$$

il obtient en fonction de la surface *A* et de la longueur de Planck l_p :

$$S_{BH} = \frac{k_B A c^3}{4G\hbar} = \frac{k_B A}{4{l_p}^2} = k_B lnw$$

avec $w = exp(\frac{A}{4{l_p}^2})$ le nombre d'états possibles du système étudié (à ne pas confondre ici avec le travail).

Nota, entropie d'un trou noir de Schwarzschild
Dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild on a :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$A = 4\pi {r_s}^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}$$

$$S_{BH} = \frac{k_B A}{4{l_p}^2} = \frac{4\pi k_B G M^2}{\hbar c}$$

Le terme $S \leq \frac{4\pi k_B G M^2}{\hbar c}$ correspond à la limite de Bekenstein. Selon J. Bekenstein, si l'entropie d'un système dépasse cette limite, le système devient un trou noir.

IV.5 Conclusion du chapitre

On a évoqué dans ce chapitre deux « objets cosmiques » directement issus de la Relativité générale et des idées d'A. Einstein.
Le premier, le Big-bang est l'une des rares théories physiques postulées irréversibles dans le Temps. La théorie présente à la fois des prédictions étonnantes qui ont reçu confirmation et un problème conceptuel avec l'absence d'observateur.
Le deuxième, le trou noir n'est pas postulé irréversible dans le Temps. En revanche, ils possèdent des surfaces *A* et des entropies S_{BH} qui ne peuvent que croître dans le Temps et qui contiennent elles-aussi des irréversibilités temporelles.

Chapitre V Démarcation entre Vie et non Vie, l'approche phénoménologique, l'hypothèse Gaïa

Objet du chapitre
Pour répondre à la distinction entre le Temps de la physique et le Temps ressenti, on propose de caractériser la Vie par un Temps orienté. On parlera pour ce dernier de Temps biologique.

V.1 Démarcation entre Vie et non Vie

V.1.1 Une caractérisation de la Vie ?

Selon le biologiste Ladislas Robert, chercheur spécialiste de l'immunologie et du vieillissement, le « Temps existe en biologie depuis l'apparition de la Vie sur Terre ».

Cette relation entre Temps et Vie nous interpelle dans notre question initiale posée dans ce mémoire : pourquoi le Temps utilisé dans les équations physiques semble aussi différent que le Temps ressenti ou que celui utilisé en Biologie ?
Cela nous amène à proposer l'hypothèse suivante : la démarcation entre réversibilité temporelle et irréversibilité temporelle peut-elle être la même que celle entre non vivant et vivant ?

Cette hypothèse présente l'avantage de proposer une réponse simple à notre question initiale. Ce qui caractériserait le non vivant, ce serait une possible réversibilité temporelle. Et comme on l'a souligné, la plupart des théories physiques disposent d'une telle liberté.
Ce qui caractériserait le vivant, ce serait une irréversibilité temporelle, créée à partir de conditions d'origine, avec perte de libertés comme celle de la réversibilité temporelle, mais offrant en contrepartie le principe de causalité, la possibilité d'une Histoire et celle d'un destin.

Lorsqu'on observe dans les trois dimensions de l'Espace des corps matériels, ces derniers sont rarement symétriques dans les trois dimensions de l'Espace telles des sphères. La symétrie spatiale est simplement possible, elle n'est que très rarement exigée. Par analogie entre le Temps et l'Espace, la symétrie temporelle n'est que simplement possible.

En résumé, ce qui distinguerait le non vivant du vivant, c'est pour le premier une possible symétrie temporelle et pour le deuxième, une dissymétrie temporelle caractéristique, qu'on appelle la flèche du Temps.

Nota sur le film d'un être vivant
Lorsqu'on passe le film d'un être vivant à l'envers, on s'aperçoit très rapidement de l'anomalie. Au contraire, lorsqu'on passe le film d'une planète ou d'un astéroïde en mouvement, il est quasiment impossible de distinguer l'envers de l'endroit.
Pour certains phénomènes naturels comme la pluie ou la neige, on s'aperçoit également s'ils sont passés à l'envers ou à l'endroit. A voir si ces phénomènes naturels ne peuvent pas en réalité être rapprochés de la Vie ?

V.1.2 Caractérisation du vivant par L. Pasteur

La démarcation entre le non vivant et le vivant n'est pas chose facile, tant le vivant possède les mêmes molécules, les mêmes atomes que le non vivant. Dans la seconde moitié du 19ème siècle, Louis Pasteur propose la caractérisation la plus célèbre, et sans doute la plus énigmatique du vivant. En reprenant les travaux de E. Mitscherlich, il constate que le tartrate modifie la polarisation de la lumière, alors qu'une substance à priori identique : le paratartrate ne modifie pas cette polarisation.

Pour comprendre cela, rappelons que le tartrate est issu de la matière vivante, alors que le paratartrate provient de la matière minérale. Le tartrate et le paratartrate sont tous deux des substances dites chirales, c'est-à-dire composées de molécules non superposables avec leur symétrique dans un miroir.

Le tartrate, capable de modifier la polarisation de la lumière, est composé d'un seul type chiral de molécules. On parle d'une substance de molécules, soit dextrogyre, soit lévogyre. Le tartrate est par exemple dextrogyre.
Le paratartrate, incapable de modifier la polarisation de la lumière, est composé des deux types chiraux de molécules. On parle d'une substance de molécules à la fois lévogyres et dextrogyres.

Précurseur, L. Pasteur suppose que la capacité à modifier la polarisation de la lumière (c'est-à-dire le fait d'être des molécules d'un seul type chiral) est une caractéristique de la matière vivante (ou autrefois vivante). Il interprète ainsi comme vivantes des entités qui autrefois, n'étaient pas considérées de la sorte. Il s'agit des levures, des microorganismes, des bactéries… Suite à cela, L. Pasteur développe la vaccination et les expériences sur le système immunitaire. Cela ouvrira aussi la voie aux antibiotiques.

Cette caractérisation de la Vie (d'un seul type chiral) implique l'existence d'une orientation spatiale propre à la Vie. A voir s'il existe également une orientation spatio-temporelle propre à la Vie et un lien entre un seul type chiral des molécules du vivant et la flèche du Temps biologique ?

V.1.3 Dextrogyre, lévogyre, séries D et L

Une molécule dextrogyre (« qui tourne à droite », du latin dexter, droit) a ainsi la propriété de faire dévier le plan de polarisation de la lumière polarisée, vers la droite d'un observateur recevant la lumière. Cet observateur voit le plan de polarisation tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.
Une molécule lévogyre (« qui tourne à gauche », du latin laevus, droit) a ainsi la propriété de faire dévier le plan de polarisation de la lumière polarisée, vers la gauche d'un observateur recevant la lumière. Cet observateur voit le plan de polarisation tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

En biochimie, on parle de séries D ou L. Les séries D ou L sont différenciées, suivant la représentation de Fisher, par l'ordre des groupements que porte le carbone C central asymétrique :

- groupement aldéhyde COH ou groupement carboxylique $COOH$, en haut,
- groupement hydroxyle OH ou groupement acide aminé NH_2, à droite ou à gauche suivant que la molécule soit dextrogyre ou lévogyre.

Les glucides sont de forme D. On a par exemple pour le Glycéraldéhyde, avec la forme rencontrée dans le vivant entourée en vert :

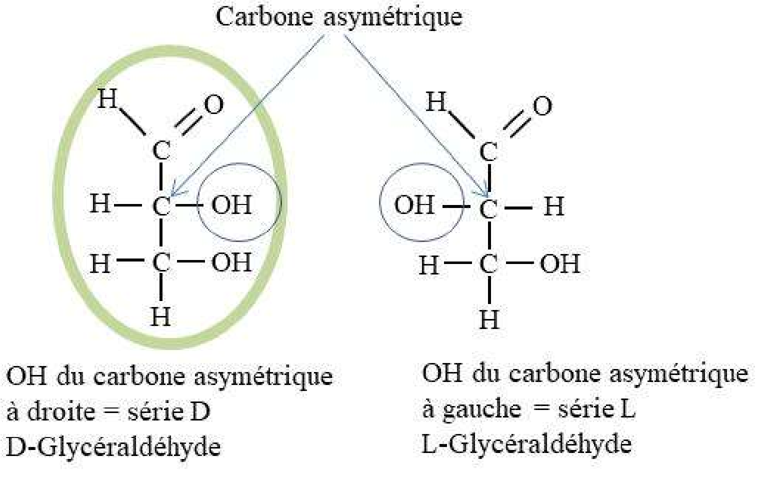


Figure 10 : formes chirales du Glycéraldéhyde

Les acides aminés, constituant des protéines, sont de forme L. On a par exemple pour l'Alanine, avec la forme rencontrée dans le vivant entourée en vert :

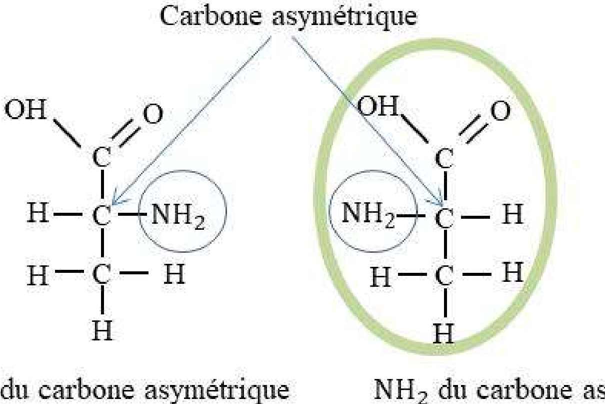


Figure 11 : formes chirales de l'Alanine

Néanmoins, les séries D ou L ne correspondent pas toujours aux propriétés dextrogyre ou lévogyre de la molécule. Par exemple, l'acide aminé L-Sérine est bien lévogyre, mais l'acide aminé L-Alanine est quant à lui dextrogyre !
Retenons que le vivant sélectionne certaines séries : D pour les glucides et L pour les acides aminés, et que cela reste pour l'instant inexpliqué.

V.1.4 L'illusion de l'écoulement du Temps ? Est-ce le Temps qui passe ou nous qui passons ?

Dans la plupart des théories ou modèles physiques (exceptés la thermodynamique avec l'entropie ou le Big-bang), il n'y a pas nécessité d'introduire un écoulement du Temps. Pour cette raison, certains physiciens et philosophes, comme récemment Carlo Rovelli ou Thibault Damour, ont parlé d'illusion de l'écoulement du Temps, rejoignant en partie l'idée de Platon d'un « réel intemporel ».

Dans les théories actuelles de la physique, on a déjà souligné que l'hypothèse d'un Temps semblable aux trois dimensions de l'Espace fonctionne étonnamment bien. Cette hypothèse permet d'obtenir de bien meilleurs résultats que l'hypothèse d'un Temps différencié de l'Espace. L'hypothèse d'un Temps semblable aux trois dimensions de l'Espace est d'ailleurs un argument fort en faveur de l'illusion de l'écoulement du Temps.

Pourtant, dans notre vie quotidienne, nous avons un fort ressenti de l'écoulement du Temps. C'est même selon Jean-Paul Sartre, notre existence (en quelque sorte notre plongée dans l'écoulement du Temps), qui précède notre essence et ainsi nous définit.
A noter également, que dans les sciences du vivant comme la biologie, il n'est peu ou pas fait référence à un Temps semblable aux trois dimensions de l'Espace. L'hypothèse d'un Temps qui s'écoule, différent de l'Espace, est usuellement nécessaire et implicitement postulée.

C'est cette contradiction, il faut bien l'avouer dérangeante, entre l'hypothèse faite par la physique contemporaine d'un Temps semblable aux trois dimensions de l'Espace et le constat de l'écoulement du Temps dans notre vie quotidienne (rejoignant l'hypothèse nécessaire d'un écoulement du Temps en biologie), que l'on tente ici d'éclairer.
On suggère que l'écoulement du Temps dans un sens, c'est-à-dire la flèche du Temps, est la première caractéristique de la Vie. Pour paraphraser l'auteur irlandais Ken Bruen (et bien d'autres avant lui). En réalité, le temps ne passe pas. C'est nous qui passons.

V.2 L'approche phénoménologique

V.2.1 Une connaissance ontologique

L'idée de rapprocher la flèche du Temps de la Vie, et par conséquent du sujet, s'inscrit dans un vaste courant d'idées, entre science et philosophie, qualifié de phénoménologie. Les initiateurs de ce courant d'idées ont été au début du 20ème siècle les philosophes Edmund Husserl, Martin Heidegger ou en France Maurice Merleau-Ponty. L'intérêt de la phénoménologie, c'est la richesse des applications offertes, à tous les domaines du possible.

L'idée de base de la phénoménologie est que le phénomène, à priori extérieur au sujet, contient en fait les principales informations sur lui.

L'exemple fréquemment cité est celui des notes de musiques. Pour un simple magnétophone, ces notes ne sont qu'une suite d'ondes sonores, mais pour un sujet humain, elles expriment une mélodie, des sensations, des souvenirs, des croyances, des espérances.
Les philosophes du courant phénoménologique ont coutume de dire que la connaissance d'un phénomène est ontologique (du grec ancien, onto, ce qui est). C'est-à-dire, le phénomène nous en apprend davantage sur le sujet, l'être qui observe et qui pense, que sur l'objet qui est observé.

Les idées phénoménologiques se développent à partir des années 1910. A l'origine, sans doute sont-elles influencées par les idées physiques de l'époque, en particulier par le principe de relativité, remis au goût du jour par H. Poincaré et A. Einstein.
Par exemple, suivant le principe de relativité, il n'existe pas de vitesse absolue, mais une différence de vitesse entre un objet et un sujet. La mesure de la vitesse, en apprend autant sur l'objet mesuré que sur le sujet mesurant.

Dans les années 1920-1930, les idées phénoménologiques influencent à leur tour la physique quantique de N. Bohr, de W. Pauli ou de W. Heisenberg, par exemple sur la dépendance du résultat de l'expérience en fonction du sujet.
A l'époque, grâce à l'équation de Schrödinger, on réussit à unifier la physique et la chimie. Cela provoque un optimisme contagieux parmi les scientifiques. Sur cet élan, W. Pauli pronostique une unification de l'étude du psyché et du physis (c'est-à-dire de la psychologie et de la physique) dans une nouvelle et prochaine science.

V.2.2 L'exemple du sens commun

Dans un petit essai, intitulé *Invitations aux sciences cognitives*, le biologiste Francisco Valera s'intéresse aux sciences cognitives, à l'intelligence artificielle et au fonctionnement de l'esprit humain. Il propose des réponses s'inscrivant dans l'approche phénoménologique, des réponses en définitive proches d'une explication subjective de la flèche du Temps.

Pour introduire les idées phénoménologiques dans les sciences cognitives, F. Varela souligne l'insuffisance des approches contenant un Univers prédéfini aux sujets et à leur esprit. Il prend comme exemple et argument le sens commun, qu'il définit comme un jugement identique, que nous autres êtres humains portons face à un événement (ou plus généralement un phénomène) vécu collectivement.

Une part d'acquis est décelable dans le sens commun : des êtres humains possédant une même culture, une même histoire, sont prédisposés à porter des jugements identiques face à un événement.
On trouve également une part d'innée dans le sens commun, une part d'innée à priori énigmatique, qui ne permet pas de comprendre pourquoi des êtres humains portent des jugements identiques face à un évènement.

Pour expliquer cette part d'innée dans le sens commun, F. Varela suggère que la réalité et la perception que l'on en a, est due autant, voire davantage, à notre nature d'être humain, qu'à la Nature extérieure.

Ainsi, puisque la réalité et la perception que l'on en a, se construisent principalement à travers notre nature d'être humain, et puisque nous-autres êtres humains partageons une nature identique, cela explique l'existence de jugements identiques portés par le sens commun des êtres humains.

V.2.3 L'activité de la Vie peut-elle créer la réalité ?

Dans son essai, F. Varela prolonge son raisonnement. Son idée n'est pas seulement que la réalité soit définie mentalement par le sujet lui-même, mais qu'elle soit également créée physiquement par le sujet.
Pour expliciter cela, F. Varela forge le concept d'énaction. Un concept qui suggère que l'activité de la Vie, lors de son Histoire, transforme et crée physiquement la réalité.

En effet, au quotidien, on constate que nos activités (artistiques, sportives, scientifiques ou autres) modifient la réalité qui nous entoure. Grâce à nos décisions et à nos actions, nous avons les moyens de transformer physiquement une part de notre réalité.

V.3 Une application, l'hypothèse Gaïa

V.3.1 La Vie construit un environnement favorable à son épanouissement

Dans les années 1970, le chimiste James Lovelock propose que la surface de la Terre et la couche atmosphérique qui l'entoure forme un hyper organisme qu'il baptise Gaïa. Il fait alors référence à une déesse de la Terre de la mythologie grecque.
Suivant une analogie avec chacun de nos organismes, qui sont constitués de multiples cellules et microorganismes interagissant entre eux, Gaïa serait constitué de tous les êtres vivants sur Terre (ainsi que de leur production), en interaction les uns avec les autres.

Dans son livre *La Terre est un être vivant, l'hypothèse Gaïa*, J. Lovelock rapporte que la source d'inspiration de l'hypothèse Gaïa, ce sont ses interrogations sur la façon de détecter la présence ou non de Vie sur les planètes sœurs de la Terre : Mars et Vénus.
Il répond à ses interrogations en suggérant d'analyser la composition atmosphérique de ces deux planètes. Mars contient 96,0 % de CO_2, et Vénus 96,5 % de CO_2, une composition à priori semblable à la Terre primitive d'il y a environ 4 milliards d'années. Au vu de ces compositions, J. Lovelock en déduit qu'aucune action de la Vie n'intervient dans la composition atmosphérique des deux planètes. Il en retient que la Vie n'est sûrement pas présente sur Mars et Vénus.

Nota
A l'instar de L. Pasteur, J. Lovelock cherche aussi à caractériser la Vie. Le premier le fait par des molécules d'un seul type chiral, le second le fait par l'action de la Vie sur la composition atmosphérique.

Par la suite, J. Lovelock développe l'idée que l'atmosphère de la Terre s'est peu à peu différenciée de celui de ses deux planètes sœurs par l'action de la Vie sur Terre. De ce fait, il réfute l'idée que les conditions de la Terre primitive aient été spécialement plus avantageuses que celles de Vénus ou Mars. Selon lui, pour expliquer la présence de Vie sur Terre, on ne peut simplement arguer que notre planète était bien positionnée, juste à la bonne distance du Soleil, afin de bénéficier de températures propices à la Vie.
Il soutient que la Vie s'est peu à peu construit sur Terre un environnement favorable à son propre épanouissement. Comme dans une boucle rétroactive globalement vertueuse, l'environnement terrestre a été transformé par l'action de la Vie. Cela a favorisé l'apparition de formes vivantes de plus en plus riches, de plus en plus diversifiées, de plus en plus complexes.

V.3.2 Etape majeure de transformation de l'environnement terrestre

Suivant J. Lovelock, on peut distinguer plusieurs grandes étapes de transformation de l'environnement terrestre.

Comme étape majeure, J. Lovelock cite l'apparition de la photosynthèse avec deux conséquences importantes pour Gaïa. D'une part, la photosynthèse a utilisé l'énergie solaire, du CO_2 et de l'eau pour produire de la matière organique. Par ce nouveau mécanisme, la matière organique s'est développée beaucoup plus rapidement qu'autrefois.
D'autre part, la photosynthèse a fortement augmenté le taux de dioxygène O_2 présent dans l'atmosphère.

Le dioxygène O_2 possède un grand pouvoir d'oxydation, il a provoqué la disparition de nombreux microorganismes qui ne pouvaient lui résister. Cependant, les microorganismes résistants ont su utiliser ce pouvoir pour produire leur propre énergie. Ça a été l'apparition de la respiration. En « brûlant » du glucose (et autres substances organiques) à partir de O_2, les cellules ont produit bien plus facilement de l'énergie et ont accru leurs capacités de mouvement.

Avec beaucoup de justesse, J. Lovelock compare l'apparition du O_2 dans l'atmosphère à des lignes électriques haute-tension. Ces lignes haute-tension sont nettement plus dangereuses que la basse-tension, mais elles permettent de transporter de plus grandes quantités d'énergie, beaucoup plus loin, sans grosse perte d'énergie par effet joule.

Nota 1
Les antioxydants sont souvent présentés comme des agents actifs contre le vieillissement de nos cellules. Et c'est sans doute vrai ! Le fait que nos cellules soient encore fortement sensibles à l'oxydation et que cela accélère leur vieillissement, est la marque que les ancêtres de nos cellules se sont autrefois développés dans une atmosphère qui ne contenait pas ou très peu de O_2.

Nota 2
Dans le modèle de la sélection naturelle darwinienne, les individus avantagés par les conditions de l'environnement présentent un avantage reproductif et ont donc plus de chance d'avoir une descendance importante.
J. Lovelock complexifie le modèle darwinien en ajoutant une boucle rétroactive qui confère aux individus la possibilité de modifier l'environnement. La modification de l'environnement peut prendre une direction qui soit défavorise, soit désavantage les individus.

V.3.3 De nombreuses définitions et caractérisations de la Vie

Il existe de nombreuses façons de définir et de caractériser la Vie et ses productions (par exemples les termitières, les barrières de corail, les mégalopolis comme Tokyo ou New-York, et si on accepte l'hypothèse Gaïa, Gaïa elle-même).

Pour les biologistes thermodynamiciens, la Vie se caractérise par sa capacité à générer de l'entropie négative, c'est-à-dire de l'ordre.
Pour les biologistes moléculaires qui étudient les ADN, ARN de nos cellules, la Vie est caractérisée par sa capacité à effectuer la réplication, la transcription et la traduction de façon autonome. Ainsi, selon eux, un virus n'est pas vivant, au sens qu'il a besoin de la machinerie d'une cellule hôte pour effectuer réplication, transcription ou traduction.
Pour L. Pasteur, la Vie se caractérise par des molécules d'un seul type chiral. Cette énigmatique caractérisation est certainement la plus fascinante.
De son côté, J. Lovelock cherche à caractériser la Vie par les dérivés atmosphériques qu'elle produit (comme O_2) et qui ne se retrouveraient pas dans les mêmes proportions dans un environnement sans Vie.

Dans ce chapitre, on propose de caractériser la Vie par un Temps orienté. Par exemple, lorsqu'on filme des êtres vivants ou leurs productions, et qu'on passe ce film à l'envers ou à l'endroit, le sens original du film est facilement repérable, notamment grâce à la succession chronologique des causes et des effets à respecter.

V.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a proposé de caractériser la Vie par sa capacité à orienter l'une des quatre dimensions spatiotemporelles, y avançant continument dans un seul sens et créant ce qu'on appelle le Temps « biologique ». Ce Temps biologique contiendrait le précieux principe de causalité et permettait la constitution d'une Histoire. Cela aurait été tout à l'avantage de la Vie.
On a ensuite effectué un parallèle entre cette caractérisation de la Vie, les idées phénoménologiques et l'hypothèse Gaïa. Selon cette hypothèse, la Vie sur Terre, aurait lors d'un cercle vertueux, modifié son environnement tout à son avantage, depuis des milliards d'années.

Dans le prochain chapitre, on revient sur le Big-bang, rare théorie physique à se postuler irréversible dans le Temps.

Chapitre VI L'origine de la Vie, le Big-bang un phénomène biologique ?

Objet du chapitre
On s'intéresse à l'origine de la Vie, on s'interroge si le Big-bang peut être interprété comme un pur phénomène biologique.

VI.1 Origine de la Vie selon les biologistes

VI.1.1 Phénomène biologique et phénomène à Temps orienté

Dans le chapitre précédent, on a proposé que tout phénomène à Temps orienté soit une caractéristique de la Vie, c'est-à-dire un phénomène biologique.
Précédemment, on a parlé de 3 flèches en physique : la flèche thermodynamique, la flèche microscopique et la flèche cosmologique.

Concernant la flèche thermodynamique, à l'instar du démon de Maxwell, la Vie est capable d'aller contre la croissance du désordre, de l'entropie et de l'information manquante. En agissant contre le second principe de la thermodynamique, la Vie peut inverser le cours du Temps thermodynamique, et suivre son propre Temps : le Temps biologique.
Concernant la flèche microscopique, on penche dans ce mémoire pour son absence au niveau des particules élémentaires. Le théorème CPT n'est à priori valable que pour l'interaction électromagnétique et pas pour l'interaction faible.
Reste maintenant à éclairer la flèche cosmologique, la théorie du Big-bang et l'entropie des trous noirs. C'est ce que nous allons étudier dans ce chapitre, préalablement à travers l'origine de la Vie.

VI.1.2 Protéines et ADN, métabolisme et information

La Vie est principalement constituée de la symbiose de deux entités radicalement différentes. D'une part, on trouve des chaînes d'acides aminés plus communément appelées les protéines. Leur principale fonction est de catalyser les réactions chimiques dans l'organisme, c'est-à-dire le métabolisme de cet organisme, et donc de lui assurer une certaine stabilité thermodynamique.
D'autre part, on trouve des chaînes de nucléotides dont l'ARN et l'ADN sont les plus célèbres représentants. Suivant nos connaissances actuelles, ce sont les uniques supports de l'information génétique.

Les modèles sur l'origine de la Vie peuvent être répartis en deux grandes catégories. D'une part, il y a les modèles qui postulent la primauté des chaînes de nucléotide, ARN ou ADN. On rapproche ces modèles des théories de l'information, puisque ARN et ADN sont des supports de l'information génétique.
D'autre part, il y a les modèles fondés sur le pouvoir d'autorégulation des entités vivantes, sur les réactions chimiques et donc davantage sur les protéines. On peut interpréter ce pouvoir d'autorégulation comme un rétablissement de l'ordre contre le désordre, c'est-à-dire une lutte contre le 2ème principe de la thermodynamique (la croissance irréversible de l'entropie). On rapproche ces modèles des théories thermodynamiques. Ils ont également un lien avec l'information si l'on associe croissance de l'entropie et croissance de l'information manquante.

Aujourd'hui, les modèles à ARN ont la faveur des biologistes. En effet, dans les années 1980, Tom Cech et Sidney Altman découvrent indépendamment que certains ARN, ensuite appelés ribozymes, ont un rôle de catalyseur comme les protéines. Suite à cela, se développe l'hypothèse du monde à ARN, avec l'ARN considéré comme l'entité primordiale de la Vie.

VI.1.3 Prérequis à l'apparition de la Vie

Dans son ouvrage *Les transitions Majeures en Évolution,* le biologiste et ancien ingénieur aéronautique John Maynard Smith définit par ordre chronologique les grandes étapes de la Vie :

1. Réplication (production de clones grâce à l'hypothèse du monde à ARN),
2. Catalyse (d'abord l'ARN à la fois gêne et enzymes, puis l'ADN en tant que gêne et les protéines en tant qu'enzymes),
3. Symbiose (par exemple, union symbiotique de cellules procaryotes sans noyau, et apparition des cellules eucaryotes avec noyau),
4. Sexualité, échange de gènes pour former de nouveaux individus,
5. Apparition des êtres vivants multicellulaires,
6. Apparition des sociétés d'individus,
7. Apparition des sociétés humaines dotées de culture et de langage.

A noter que J. M. Smith place la réplication avant la catalyse. Lui-aussi donne une primauté aux théories de l'information et à ARN, face aux théories thermodynamiques et à protéines. Il reprend également les idées de Lynn Margulis et accorde une place importance à la symbiose entre entités vivantes dans les transitions majeures de l'Evolution.

Nota sur le monde à ARN
Il subsiste de nombreuses interrogations sur le monde à ARN. Par exemple, comment la sélection naturelle a-t-elle joué pour créer l'ARN ? Y a-t-il eu plusieurs codes génétiques en concurrence ?

VI.1.4 Approche physique d'un problème de biologie

Les biologistes en sont à l'hypothèse du monde à ARN, mais l'ARN apparaît déjà d'une complexité redoutable pour les physiciens qui étudient le Modèle des quarks. Il semble qu'entre les quarks et l'ARN, il y ait de nombreuses étapes à franchir. Il faut d'autres prérequis à l'apparition de la Vie, beaucoup plus en amont. Sans prétention d'exhaustivité, on citera :

- le problème du Temps,
- la primauté de la matière, face à l'antimatière,
- la constitution de l'atome, des éléments chimiques et des molécules.

VI.1.5 L'Univers en évolution, vu comme une complexité croissante avec la Vie qui en émerge peu à peu

Une autre façon d'aborder le problème de l'origine de la Vie, est de ne pas poser de différence fondamentale entre la Vie et la non Vie. L'Univers apparait comme une entité en évolution, avec une augmentation au cours du Temps biologique de la complexité. Il n'y a pas de discontinuité entre un Univers qui était autrefois inerte et sans sujet, et un Univers doté de la Vie et donc de sujets.

En gros, la Vie diffère de la matière inerte par une complexité de plus en plus grande dans son organisation. On règle en quelque sorte le problème de l'origine, puisque l'origine de la Vie se confond avec l'origine de l'Univers comme le point instant initial du début de la complexification. La Vie ne se différencie pas alors radicalement de la matière inerte : elle est déjà présente lors du Big-bang, ou tout du moins sous-jacente.

On peut qualifier cette hypothèse d'animiste au sens que tout dans l'Univers est vivant, où ne s'en distingue pas radicalement. Si cette approche partage des ressemblances avec les idées présentées ici, elle présente néanmoins une contradiction avec ce qu'on a proposé précédemment. En effet, dans ce cas, la Vie ne se distinguerait pas radicalement de la matière par son orientation dans le Temps.

VI.2 Le Big-bang, l'origine de la Vie ?

« Certains croient que de la matière nait la Vie, mais dans 10 000 ans de ça, ne s'apercevront pas plutôt que de la Vie nait la matière ? »
Louis Pasteur

Dans ce paragraphe, s'inspirant de cette phrase de L. Pasteur, on va suggérer que ce n'est pas de la matière que nait la Vie, mais au contraire, que c'est de la Vie que nait la matière.

VI.2.1 Retrouver un sujet pour la théorie du Big-bang

On a déjà évoqué la découverte en 1965 par A. Penzias et R. Wilson d'un fond diffus cosmologique, qui confirme spectaculairement les prévisions du modèle de Big-bang de Gamow Alpher Herman.

Toutefois, suivant les idées phénoménologiques, la théorie du Big-bang et sa confirmation expérimentale posent problème. En effet, dans la première, le sujet est absent, seul l'objet existe, ou plutôt se met à exister, alors que dans la deuxième, sujet et objets existent, soulignant une incohérence entre prédiction théorique et confirmation expérimentale.

On peut même s'interroger si la découverte d'un fond diffus cosmologique, avec sujet, peut être la confirmation d'une théorie avec absence de sujet. L'inconvénient, c'est que dans certaines approches phénoménologiques, l'objet sans sujet n'a pas vraiment de sens. Il reste indéfinissable.

Cependant, puisque ce fond diffus cosmologique doit bien signifier quelque chose, et qu'il semble confirmer de manière étonnante la théorie du Big-bang, il est tentant de postuler pour l'époque du Big-bang l'existence d'un sujet. Cela rend alors sa cohérence entre prédiction théorique et vérification expérimentale, toutes deux incluant une relation sujet objet.

Ce sujet n'est évidemment pas un être humain, il pourrait même plutôt être le tout début de la Vie, ce phénomène se confondant alors avec le Big-bang.

VI.2.2 Un lien profond avec nos ancêtres qui nous permet de percevoir le fond diffus cosmologique

On se remémore alors les idées du biologiste Ernst Haeckel fervent admirateur de C. Darwin et des idées évolutionnistes.

A la fin du 19ème siècle, E. Haeckel propose une hypothèse fascinante : que l'ontogénèse résume la phylogenèse. C'est-à-dire que tout être vivant résume lors des premiers instants de sa vie, l'évolution des espèces, ou le long chemin qu'ont autrefois accompli ses ancêtres. Qu'on songe par exemple aux doigts palmés qui apparaissent chez le fœtus humain, puis qui disparaissent, chaque être vivant retracerait une évolution en raccourci de celle de ses ancêtres.
Même si l'hypothèse d'E. Haeckel a parfois été mise en difficulté, elle est aujourd'hui plutôt confirmée par les résultats de la biologie moléculaire.

Par exemple, la plupart des animaux peuvent être classés dans les triblastiques, 3 feuillets en grecs (on parle aussi de triploblastique ou de bilatériens). Pour les triblastiques, la totalité des organes dérivent de l'un de ces 3 feuillets, formés chacun d'une seule couche de cellules.
Ces 3 feuillets apparaissent précocement au cours de l'embryogenèse, lors de la gastrulation. Une boule creuse, appelée la blastula et formée d'un seul feuillet de cellules, se replie sur elle-même et donne la gastrula formée de 3 feuillets de cellules.
Ces états successifs, blastula, gastrula, neurula pour les vertébrés, sont franchis par tous les êtres vivants de type triblastique, et correspondent selon l'hypothèse de E. Haeckel, à des êtres ancestraux, c'est-à-dire aux étapes évolutives de l'espèce à laquelle appartient l'être vivant.

Suivant cette hypothèse, nous, êtres humains, porterions encore en nous une part des caractéristiques les plus primitives de la Vie. Caractéristiques qui nous rattacheraient aux tous premiers instants de la Vie, caractéristiques qui nous permettraient encore aujourd'hui de percevoir le fond diffus cosmologique ?

VI.2.3 Liens entre modèles cosmologistes (irréversible temporellement) et biologie ?

A l'instar du postulat d'une irréversibilité temporelle du Big-bang, qui introduit un lien entre modèles cosmologistes et biologie, les trous noirs et leurs entropies à irréversibilité temporelle, introduisent-ils également un lien entre modèles cosmologistes, entropie classique, information et biologie ?

Big-bang, trous noirs cosmologiques ou micros trous noirs quantiques, peuvent d'ailleurs être regroupés dans ce qu'on appelle des singularités gravitationnelles, c'est-à-dire qu'ils correspondent à des régions de l'Espace-Temps où selon l'équation d'Einstein :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

le champ gravitationnel diverge infiniment.

Reste néanmoins bien des éléments à préciser, pour comprendre les liens entre singularités gravitationnelles, origine de la Vie et celle de chaque être vivant. La question reste ouverte.

VI.2.4 La Vie construit un Univers favorable à son épanouissement

Même si ce n'est peut-être qu'elle belle fiction, racontons maintenant l'Histoire suivante qui aurait commencé il y a plus de 13 milliards d'années.

A partir d'un Univers très libre, à 4 dimensions identiques et sans histoires, la Vie se serait constituée en construisant les conditions nécessaires à son existence. Elle aurait eu le désir d'avancer continument dans un seul sens, dans l'une des 4 dimensions existantes. Elle aurait créé un Univers du vivant adapté à son développement. Le Temps orienté et la matière organisée serait apparus.

L'Univers du vivant, dit raisonnable, serait d'ailleurs très proche de celui imaginé par G. Lemaître, G. Gamow, et bien d'autres, contenant l'irréversibilité temporelle, le principe de causalité, et des singularités dans l'Espace-Temps, comme ces trous noirs ou ce Big-bang.
On serait passé de la physique avec un Temps à 2 sens, reposant sur le principe de moindre action, à l'Histoire avec un Temps orienté, reposant sur le principe de causalité.

Le bang en serait encore plus fascinant, il aurait explosé non pas pour l'apparition de l'Univers, mais pour celle de la Vie.

Les flèches du Temps, celle du vivant (souvent qualifiée de psychologique) et celle du Big-bang (souvent qualifiée de cosmologique) auraient une unique origine : le vivant. A ces deux flèches, on pourrait ajouter la flèche cognitive, c'est-à-dire la flèche de l'intelligence et de la connaissance, qui viendrait s'opposer à la flèche de l'entropie et de l'information manquante.
Pour générer cet Univers du vivant, les systèmes vivants, pour vivre ensemble, auraient avancé de la même façon dans le Temps, à chaque instant. Ils auraient peu à peu façonné l'Univers du vivant tel que nous le connaissons aujourd'hui.

Suivant cette hypothèse, Gaïa ne serait pas seulement la surface de la Terre et son atmosphère, mais l'Univers du vivant dans sa globalité.

Nota 1 sur des systèmes cycliques dans le Temps
Il existe de nombreux systèmes cycliques dans l'Espace. Citons par exemples les molécules aromatiques (benzène, etc.), les chaînes alimentaires ou les rings networks. Suivant une analogie entre l'Espace et le Temps, on peut imaginer des systèmes cycliques dans le Temps, avec une possible remonté dans le passé.
Ces systèmes cycliques dans le Temps ne concerneraient pas à priori les êtres vivants, sauf peut-être au tout début de la Vie.

Imaginons qu'au début de la Vie (en fait juste avant le Big-bang et le Temps orienté), les précurseurs des êtres vivants n'avançaient pas tout à fait dans un seul sens du Temps, que cela serait venu par la suite. Ces précurseurs pouvaient présenter des systèmes cycliques dans le Temps.
Ce genre d'idée pourrait résoudre le problème de l'œuf et de la poule, ou le problème de l'ARN et de la protéine. L'un n'a pas à générer l'autre, puisque ces deux entités pouvaient autrefois être associées dans un système cyclique dans le Temps.

Dans ce cas, la question, c'est savoir s'il subsiste des traces de ces systèmes cycliques dans le Temps, précurseurs des êtres vivants. Comment ces systèmes cycliques dans le Temps pourraient se manifester dans ce qu'on voit aujourd'hui de l'Univers ?

Nota 2 sur l'existence d'autres formes de vie
Depuis les années 1990, de nombreuses exo-planètes ont été découvertes à travers notre Galaxie. Certains scientifiques supposent l'existence de formes de vie sur ces exo-planètes. Dans ce cas, ces formes de vie partagent-t-elles avec la vie sur Terre une origine commune ou sont-elles totalement indépendantes ?

La question rappelle un peu les débats menés au 19ème sur la génération spontanée. D'un côté, on a Félix Archimède Pouchet comme figure de proue, qui croit en la possible apparition de multiples formes de vie. De l'autre, on a L. Pasteur, qui croit en l'unicité de l'origine de la Vie.

Dans ce mémoire, on propose de lier le Big-bang à notre lignée de vie. Cela implique une singularité de notre lignée et la quasi-impossibilité de découvrir d'autres lignées indépendantes.
Si nous détectons sur d'autres planètes d'autres entités vivantes, alors celles-ci partageront avec nous une origine commune, et elles présenteront des ressemblances.

Néanmoins, après tout, peut-être existe-t-il d'autres formes de vie ? Mais leur temps n'est pas le nôtre, leur Big-bang n'est pas le nôtre. Pour nous, ils vivent tout simplement dans d'autres Univers.

VI.3 Mon Big-bang

VI.3.1 Le ressenti du Temps biologique

Dans le très beau livre *Moi et les autres : initiation à la génétique*, le généticien et mathématicien Albert Jacquard parle de mon Big-bang, c'est-à-dire pour chacun, de son instant originel, à interpréter différemment suivant les cultures.
Pour certains l'instant où le spermatozoïde du père rencontre l'ovule de la mère, pour d'autres la naissance ou le baptême une semaine après la naissance (dans ce dernier cas, peut-être un reste de tradition dans ce qui permettait autrefois d'éliminer les cas pathologiques les plus graves ?).
De manière très juste, A. Jacquard met en parallèle le Big-bang de chacun, le début d'une vie individuelle, avec le fameux Big-bang des physiciens, vu comme l'instant originel de l'Univers, et interprété ici comme le début de la Vie.

Dans son ouvrage, A. Jacquard souligne que le ressenti du Temps biologique se mesure comme une échelle logarithmique. Sur la figure ci-dessous, on a par exemple l'échelle linéaire des durées mesurées (en années) sur l'axe des ordonnées, et l'échelle logarithmique correspondantes des durées ressenties sur l'axe des abscisses.

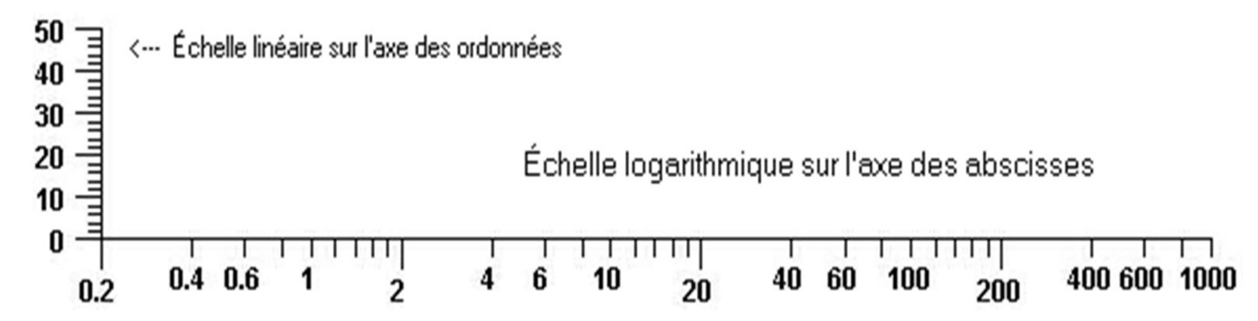


Figure 12 : échelle logarithmique (source Wikipedia)

En vieillissant, le Temps semble s'écouler de plus en plus vite, les années défilent. De même, la naissance semble dater d'une éternité, provenir d'un passé infiniment lointain. Nous n'en avons même plus le souvenir !

Pour l'instant 0 de chacun, on a suivant la fonction logarithmique : $log\, 0 = -\infty$. Le $-\infty$ de la naissance de chaque individu semble se confondre avec le $-\infty$ du Big-bang ou de l'apparition du vivant.

A nouveau, cela rappelle l'hypothèse d'E. Haeckel, la récapitulation par l'ontogénèse de la phylogenèse. En reproduisant les grandes étapes de l'évolution, l'être vivant retrace le long chemin de la Vie, en un Temps à priori accéléré suivant une échelle linéaire, mais en fait avec des durées de plus en plus longues lorsqu'on les fait tendre vers l'instant 0. Cela permet à l'être vivant de rejoindre le reste des vivants, dans un présent où tous, nous avançons concomitamment dans le même Temps.

Nota sur l'absence d'échelle logarithmique pour décrire le Temps en Physique, digression sur l'inflation cosmique
Observons que dans aucune théorie de la physique actuelle, il n'est utilisé d'échelle logarithmique pour décrire le Temps, même si le modèle de l'inflation cosmique développé notamment par Robert Brout, François Englert, Edgard Gunzig, Alexeï Starobinskia, Alan Guth, modèle s'insérant dans la théorie du Big-bang, peut tout de même y faire fortement penser.

VI.4 Conclusion du chapitre

Dans le précédant chapitre, on a proposé de caractériser la Vie par son Temps orienté. Ainsi, tout phénomène physique à Temps orienté serait en fait un phénomène biologique.
Dans ce chapitre, on a proposé d'interpréter le Big-bang comme un phénomène biologique[1]. Il correspondrait au début de la Vie, c'est-à-dire à l'instant où la Vie a eu le désir d'avancer continument dans une même direction et dans un seul sens. Chacun d'entre nous serait également issu d'un Big-bang individuel.

Dans le prochain chapitre, on va intéresser aux procédés mis en œuvre par les êtres vivants pour se caler sur le même Temps, et ainsi vivre ensemble.

[1] Certains pourront y voir une idée proche à celles développées par Lee Smolin dans son ouvrage Life of the Cosmos. L. Smolin y propose notamment d'appliquer la sélection naturelle à la naissance des univers.

Chapitre VII Comment vivre ensemble dans le même Temps ? L'hypothèse Temps lumière

Objectif du chapitre
Dans ce chapitre, on revient d'abord sur les idées développées par A. Einstein dans la théorie de la Relativité restreinte sur les déformations des distances et des durées. Partant de l'idée d'un Temps déformable, on s'intéresse ensuite aux procédés utilisés par les êtres vivants pour se caler sur les mêmes instants, c'est-à-dire vivre ensemble.

Idée 9. La vitesse de la lumière dans l'Espace, toujours mesurée constante quel que soit le mouvement de l'observateur, pourrait être une caractéristique de l'avancée dans le Temps, identique et partagée, des êtres humains vivant ensemble.

VII.1 L'incompatibilité apparente entre le principe de relativité énoncé par G. Galilée et la propagation de la lumière

VII.1.1 Préambule

En 1916, A. Einstein publie un petit ouvrage de vulgarisation intitulé *la Relativité* où il rappelle sa vision de la Relativité restreinte et générale. Pour la rédaction de cet ouvrage, il s'inspire d'un long article de synthèse publié aussi en 1916 *Les fondements de la théorie de la Relativité Générale*[2] reprenant nombres d'idées développées depuis ses premiers articles de 1905.

Dans le chapitre 7 de la *Relativité,* A. Einstein revient sur l'incompatibilité apparente entre le principe de relativité énoncé par G. Galilée et les expériences réalisées à la fin du 19ème siècle par A. Michelson et E. Morley, sur la propagation de la lumière et la recherche d'un éther luminifère. Suivant ces expériences, la vitesse de la lumière est toujours mesurée constante, quel que soit le mouvement de l'observateur, en contradiction donc avec le principe de relativité galiléenne.

Dans les chapitres 8 à 13, on ne peut qu'être conquis par la solution proposée par A. Einstein pour régler cette apparente incompatibilité. Il remet d'abord en cause la notion de simultanéité, puis propose les notions de déformations des durées et des distances (déformations de l'Espace-Temps), conciliant ainsi principe de Relativité et propagation de la lumière.

Nota
Cela se traduit mathématique par le remplacement de la transformée de Galilée par la transformée de Lorentz vu dans le 1er mémoire.

Dans les paragraphes qui suivent, on va proposer une approche alternative et intuitive des notions de déformations des durées et des distances, afin de retrouver les grands résultats de la Relativité restreinte. L'approche permettra aussi de mieux comprendre les notions de déformations des durées et des distances, tout du moins de les expliciter autrement.

Nota, envisager des voyages interstellaires d'un bout à l'autre de la Voie lactée ?
Liée à la question du « pourquoi une vitesse limite *c* de la lumière ? », on a la question du « quelle est la différence de nature profonde entre :
- les phénomènes comme la lumière ou les ondes électromagnétiques, qui ont une vitesse de propagation limitée par *c* dans l'Espace,
- et les phénomènes comme la force gravitationnelle, la force électromagnétique, et semble-t-il l'intrication quantique, qui ont un effet à priori instantané d'un point à un autre de l'Espace ? »

---
2 « *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* » Annalen der Physik, vol XLIX, 1916, p. 769-882

On ne se risquera pas ici à répondre à cette dernière question, même si elle semble comme contenir des choses fondamentales. Sa résolution permettrait quoi qu'il en soit d'envisager des voyages interstellaires, d'un bout à l'autre de la Voie lactée.

VII.1.2 Expérience, vitesses de signaux lumineux

Soient un miroir et un expérimentateur $E1$. Miroir et $E1$ sont fixes l'un par rapport à l'autre. L'expérimentateur $E1$ envoie un signal lumineux vers le miroir. $E1$ connait la distance le séparant du miroir et mesure la durée mise par le signal lumineux pour effectuer l'aller-retour. Il en déduit la vitesse du signal lumineux :

$$c = \frac{dx}{dt}$$

Soit un miroir fixe et un expérimentateur $E2$, qui selon $E1$ avance à une vitesse v le long de ce miroir. $E2$ envoie un signal lumineux vers le miroir. On cherche la vitesse de la lumière $\frac{dx}{dt}$ que mesure $E2$ selon $E1$?

Si on applique le principe de relativité galiléenne, on a le diagramme des vitesses :

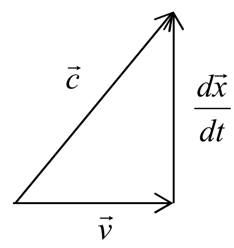


Figure 13 : diagramme des vitesses

Suivant le théorème de Pythagore, on a :

$$c^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + v^2$$

Selon $E1$, $E2$ mesure pour la lumière une vitesse inférieure à ce que lui a mesuré :

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - v^2}$$

Or expérimentalement, $E2$ mesure également une vitesse de la lumière :

$$c = \frac{dx}{dt}$$

VII.1.3 Déformation des durées

Pour résoudre l'incompatibilité apparente entre principe de relativité galiléenne et cette expérience rappelant celles d'A. Michelson et E. Morley, A. Einstein imagine que les durées propres de $E2$ (qui se considère immobile) : dt_0, sont différentes de celles de $E1$ (qui considère $E2$ avancer à une vitesse v) : dt.

Dans le temps de $E1$, $E2$ mesure : $\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - v^2}$. Et dans son propre temps, $E2$ mesure : $\frac{dx}{dt_0} = c$.
On obtient bien une vitesse *c* mesurée par $E2$ et un Temps qui devient déformable avec l'introduction de dt_0. Le Temps n'est plus un absolu. Son écoulement est lié à la vitesse de l'expérimentateur.

Pour trouver la relation entre les durées de $E1$ et celles de $E2$, on part de dx qui reste identique pour $E1$ et $E2$:

$$dx = \sqrt{c^2 - v^2}dt = dx = cdt_0$$

On obtient la relation entre les durées propres dt_0 de $E2$ et les durées dt de $E1$:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt_0$$

On pose généralement :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

Les durées d'un corps (ici $E2$) qui se considère immobile sont donc toujours plus petites que celles d'un corps (ici $E1$) qui le considère en mouvement v par rapport à lui.

On introduit les notations suivantes :

- les durées de $E2$ par rapport à $E1$ (durées de $E2$ dans le référentiel de $E1$) : $dt = [dt_{E2}]_{R^{E1}} = dt_{E2/E1}$,
- les durées de $E2$ par rapport à $E2$ (durées de $E2$ dans le référentiel de $E2$) : $dt_0 = [dt_{E2}]_{R^{E2}} = dt_{E2/E2}$.

On a la relation :

$$dt_{E2/E1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt_{E2/E2}$$

Nota :
On suppose que les durées propres sont les mêmes pour tout le monde. On a donc pour des expérimentateurs $E1$, $E2$ ou pour un corps A quelconque :

$$dt_0 = dt_{E2/E2} = dt_{E1/E1} = dt_{A/A}$$

On a donc également :

$$dt_{E2/E1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt_{E1/E1}$$

VII.1.4 Déformation des distances

Le même raisonnement peut s'appliquer pour les distances. Pour résoudre l'incompatibilité apparente entre principe de relativité galiléenne et expérience, on imagine que les distances propres de $E2$ dx_0, sont différentes de celles de $E1$ dx.

Dans l'espace de $E1$, $E2$ mesure : $\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - v^2}$, et dans son propre espace, $E2$ mesure : $\frac{dx_0}{dt} = c$.
On obtient bien une même vitesse *c* mesurée par $E2$ et un Espace qui devient déformable avec l'introduction de dx_0.

Pour trouver la relation entre les distances de $E1$ et celles de $E2$, on part de dt qui reste ici identique pour $E1$ et $E2$:

$$\frac{dx}{\sqrt{c^2 - v^2}} = dt = \frac{dx_0}{c} = dt$$
$$\frac{dx}{dx_0} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c}$$

On obtient :

$$dx = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx_0$$

$$\text{avec } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$$

Les distances d'un corps (ici $E2$) qui se considère immobile sont donc toujours plus grandes que celle d'un corps (ici $E1$) qui le considère en mouvement v par rapport à lui.

On introduit les notations suivantes :

- les distances de $E2$ par rapport à $E1$ (distances de $E2$ dans le référentiel de $E1$) : $dx = [dx_{E2}]_{R^{E1}} = dx_{E2/E1}$,

- les distances de $E2$ par rapport à $E2$ (distances de $E2$ dans le référentiel de $E2$) : $dx_0 = [dx_{E2}]_{R^{E2}} = dx_{E2/E2}$.

On a la relation :

$$dx_{E2/E1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx_{E2/E2}$$

Nota
On suppose que les distances propres sont les mêmes pour tout le monde. On a donc pour des expérimentateurs $E1$, $E2$ ou pour un corps A quelconque :

$$dx_0 = dx_{E2/E2} = dx_{E1/E1} = dx_{A/A}$$

$$dx_{E2/E1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx_{E1/E1}$$

VII.1.5 Déformation des distances et des durées

On peut imaginer avoir à la fois des déformations des distances et des durées.

Les durées propres et distances propres doivent alors vérifier la relation :

$$\frac{dt_0}{dt} \times \frac{dx}{dx_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{dt_{E2/E2}}{dt_{E2/E1}} \times \frac{dx_{E2/E1}}{dx_{E2/E2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

VII.2 Notion de déformation des distances ou d'avancée dans l'Espace

VII.2.1 Définition

On a la relation suivante entre deux expérimentateurs $E1$ et $E2$:

$$dx_{E2/E1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx_{E1/E1}$$

On a une relation semblable pour un expérimentateur E qui étudie un corps A :

$$dx_{A/E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx_{E/E}$$

On définit la déformation des distances, qui peut s'interpréter comme une avancée dans l'Espace :

$$\alpha^x_{A/E} = \frac{dx_{A/E}}{dx_{E/E}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

avec $\alpha^x_{A/E} < 1$

VII.2.2 Etude de la vitesse d'un corps A

Soit $v_{A/E}$ la vitesse du corps A lorsque E s'estime avancer à la vitesse de la lumière.
Soit $v_{E/E} = c$ la vitesse du corps E lorsque E s'estime avancer à la vitesse de la lumière.
Soit $v_{A/E \div E} = v$ la vitesse du corps A lorsque E s'estime immobile.

On se place dans le cas où seules les distances se déforment. Par définition de la vitesse, on a :

$$v_{A/E} = \frac{dx_{A/E}}{dt_{E/E}}$$

On obtient :

$$v_{A/E} = \frac{dx_{A/E}}{dt_{E/E}} = \frac{dx_{A/E}}{dx_{E/E}} \times \frac{dx_{E/E}}{dt_{E/E}} = \alpha^x_{A/E} v_{E/E}$$

On a la relation entre la déformation des distances et la vitesse :

$$v_{A/E} = \alpha^x_{A/E} v_{E/E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c = \sqrt{1 - \frac{{v_{A/E \div E}}^2}{{v_{E/E}}^2}} v_{E/E}$$

avec $\alpha^x_{A/E} < 1$

E observe pour tous les corps A une vitesse inférieure à la sienne $v_{E/E}$.

VII.2.3 Multiplications des déformations des distances, relation de composition

Soit un corps A avançant à la vitesse initiale $v^0_{A/E} = \alpha^{x0}_{A/E} \times v_{E/E}$, mesurée par l'expérimentateur E, avec une déformation initiale des distances égale à $\alpha^{x0}_{A/E}$.

Le corps A pénètre dans un corps B où les distances sont contractées de $\alpha^x_{B/E}$.

On interprète la pénétration du corps A dans le corps B, de la manière suivante : la déformation des distances du corps A, mesurée initialement par rapport à l'expérimentateur E, est maintenant mesurée par rapport au corps B, avec une déformation des distances du corps A conservant la même valeur.
La traduction en équation est :

$$\alpha^{x1}_{A/B} = \alpha^{x0}_{A/E}$$

On souhaite maintenant calculer la nouvelle contraction des distances du corps A par rapport à l'expérimentateur E. On a :

$$\alpha_{A/E}^{x1} = \alpha_{A/B}^{x1} \times \alpha_{B/E}^{x1} = \alpha_{A/E}^{x0} \times \alpha_{B/E}^{x0}$$

On pose :

$$\alpha_{A/E}^{x1} = \alpha_{A\times B/E}^{x}$$

On obtient la relation de composition pour les déformations des distances :

$$\alpha_{A\times B/E}^{x} = \alpha_{A/E}^{x} \times \alpha_{B/E}^{x}$$

La vitesse du corps A dans le corps B, mesurée suivant les distances de l'expérimentateur E est égale à :

$$v_{A\times B/E} = \alpha_{A/E}^{x1} v_{E/E}$$

On obtient :

$$v_{A\times B/E} = \alpha_{A/E}^{x} \times \alpha_{B/E}^{x} v_{E/E}$$

VII.3 Notion de déformation des durées ou d'avancée dans le Temps

VII.3.1 Définition

On a la relation suivante entre deux expérimentateurs $E1$ et $E2$:

$$dt_{E2/E1} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dt_{E1/E1}$$

On a une relation semblable pour un expérimentateur E qui étudie un corps A :

$$dt_{A/E} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dt_{E/E}$$

On définit la déformation des durées, qui peut s'interpréter comme une avancée dans le Temps :

$$\alpha_{\frac{A}{E}}^{t} = \frac{dt_{\frac{A}{E}}}{dt_{\frac{E}{E}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

avec $\alpha_{A/E}^{t} > 1$

VII.3.2 Etude de la vitesse d'un corps A

On se place dans le cas où seules les durées se déforment. Par définition de la vitesse, on a :

$$v_{A/E} = \frac{dx_{A/E}}{dt_{E/E}}$$

On obtient :

$$v_{A/E} = \frac{dx_{E/E}}{dt_{A/E}} = \frac{dt_{E/E}}{dt_{A/E}} \times \frac{dx_{E/E}}{dt_{E/E}} = \frac{1}{\alpha_{A/E}^{t}} v_{E/E}$$

On a la relation entre la déformation des durées et la vitesse :

$$v_{A/E} = \frac{1}{\alpha^t_{A/E}} v_{E/E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, c = \sqrt{1 - \frac{{v_{A/E \div E}}^2}{{v_{E/E}}^2}}\, v_{E/E}$$

avec $\alpha^t_{A/E} > 1$

E observe donc pour tous les corps A une vitesse inférieure à la sienne $v_{E/E}$.

VII.3.3 Relation de composition

On a la même relation de composition pour les déformations des durées que pour les déformations des distances :

$$\alpha^t_{A \times B/E} = \alpha^t_{A/E} \times \alpha^t_{B/E}$$

On obtient :

$$v_{A \times B/E} = \frac{1}{\alpha^t_{A/E} \times \alpha^t_{B/E}} v_{E/E}$$

VII.4 Déformations concomitantes des durées et des distances

Par définition de la vitesse, on a :

$$v_{A/E} = \frac{dx_{A/E}}{dt_{A/E}}$$

Se plaçant dans le cas où distances et durées se déforment, on a :

$$v_{A/E} = \frac{dx_{A/E}}{dx_{E/E}} \times \frac{dt_{E/E}}{dt_{A/E}} \times \frac{\mathrm{dx_{E/E}}}{\mathrm{dt_{E/E}}}$$

$$v_{A/E} = \frac{\alpha^x_{A/E}}{\alpha^t_{A/E}} v_{E/E}$$

$$\text{avec } v_{E/E} = c \text{ et } \frac{\alpha^x_{A/E}}{\alpha^t_{A/E}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{{v_{A/E \div E}}^2}{{v_{E/E}}^2}} < 1$$

On obtient :

$$v_{A/E} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En Relativité restreinte, on utilise la notation :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On a donc :

$$\gamma_{A/E} = \frac{\alpha^t_{A/E}}{\alpha^x_{A/E}}$$

Ou en notation plus compacte :

$$\gamma = \frac{\alpha^t}{\alpha^x}$$

Nota 1, sur la vitesse résultat d'une moyenne géométrique
On a :

$$v_{A/E} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{c^2-v^2} = \sqrt{(c-v)(c+v)}$$

$$v_{A/E}{}^2 = (c-v)(c+v)$$

Observons que $c-v$ et $c+v$ correspondent aux deux vitesses d'un corps A, obtenues suivant les 2 transformées de Galilée, c'est-à-dire aux 2 changements de référentiels : d'un référentiel où l'expérimentateur se considère immobile à un référentiel où l'expérimentateur se considère avancer à la vitesse *c*, avec prise en compte des 2 sens possibles de *v* par rapport à E.
A voir pourquoi, pour obtenir la vitesse $v_{A/E}$, il faille justement calculer la moyenne géométrique des 2 vitesses de A : $c-v$ et $c+v$ obtenues par ces 2 transformées de Galilée ?

Nota 2, interrogation sur la signification de la constante *c* dans $\boldsymbol{E^t = m^t c^2}$?
Pourquoi dans l'énergie de masse $E^t = m^t c^2$, mesurée pour les corps au repos dans l'Espace par rapport à un expérimentateur, on introduit une vitesse égale à *c* ?
Dans la Relativité restreinte, la vitesse de référence d'un expérimentateur, selon lui au repos, ne serait-elle pas implicitement *c*, et celle de la lumière nulle ?

VII.5 Réflexion sur des conventions pour la description du mouvement et sur leurs intervalles d'étude

VII.5.1 Choix de conventions pour la description du mouvement

Pour étudier la vitesse de la lumière, un expérimentateur E peut se considérer :
- soit comme immobile et la lumière avançant à une vitesse *c*,
- soit comme avançant à la vitesse *c* et la lumière immobile.

Le tableau suivant récapitule ces deux conventions, avec les notations utilisées dans ce mémoire :

	Vitesse de la lumière	Vitesse de E	Vitesse de A	Intervalle d'étude
Première convention : E immobile et la lumière L avançant à la vitesse *c*	$v_{L/E\div E} = c$	$v_{E/E\div E} = 0$	$v_{A/E\div E} = v$	$[0, c]$
Deuxième convention : E avançant à la vitesse *c* et la lumière L immobile	$v_{L/E} = 0$	$v_{E/E} = c$	$v_{A/E} = \sqrt{c^2-v^2}$ $v_{A/E} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ Si $v = c$ alors $v_{L/E} = 0$ Si $v = 0$ alors $v_{E/E} = c$	$[0, c]$

VII.5.2 Comment intégrer dans la deuxième convention les vitesses allant dans le sens opposé de l'Espace ?

Dans la deuxième convention, on a un expérimentateur E se considérant avancer à la vitesse *c,* des corps observés qui ont une vitesse inférieure à la sienne, et un minimum pour la lumière L qui a une vitesse nulle.

Pour intégrer dans cette deuxième convention, les vitesses allant dans le sens opposé de l'Espace, une première option est d'avoir pour ces vitesses, des vitesses négatives et un expérimentateur, dans ce cas, se considérant avancer à la vitesse *–c*.

	Vitesse de la lumière	**Vitesse de E**	**Vitesse de A**	**Intervalle complet d'étude**
Première convention : E immobile et la lumière L avançant à la vitesse $\pm c$	$v_{L/E \div E} = \pm c$	$v_{E/E \div E} = 0$	$v_{A/E \div E} = v$	$[-c, 0]U[0, +c]$
Deuxième convention : E avançant à la vitesse $\pm c$ et la lumière L immobile	$v_{L/E} = 0$	$v_{E/E} = \pm c$	$v_{A/E} = \pm\sqrt{c^2 - v^2}$ $v_{A/E} = \pm c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Si $v = c$ alors $v_{L/E} = 0$ Si $v = 0$ alors $v_{E/E} = \pm c$	$[-c, 0]U[0, +c]$

C'est une option possible, mais pas très satisfaisante pour l'esprit. En effet, l'expérimentateur E de référence à deux vitesses possibles $\pm c$ suivant les corps étudiés.

Cherchons une autre convention où l'expérimentateur E conserverait, selon lui, toujours une même vitesse *c* de référence.

Dans la deuxième convention, dans le cas où un corps A va deux fois moins vite dans l'Espace qu'un expérimentateur E, celui-ci mesure une vitesse $v_{A/E} = \frac{1}{2}c$. L'expérimentateur E avance avec la vitesse *c* dans un sens de l'Espace, et le corps A avance avec la vitesse $v_{A/E} = \frac{1}{2}c$ dans le même sens de l'Espace. Le corps A avance à priori moins vite que l'expérimentateur E et il apparait entre E et A, un écart de distance qui ne cesse de s'agrandir.

Selon une troisième convention (en fait, un élargissement de la deuxième convention aux corps allant dans le sens opposé de l'Espace), si l'écart de distance ne cesse de s'agrandir entre E et A, c'est que A va deux fois plus vite que E, avec $v_{A/E} = 2c$, dans le sens opposé de l'Espace.

Dans cette troisième convention, E avance à la vitesse *c* dans l'Espace. Les corps étudiés ont tous le même sens de vitesse dans l'Espace (le même que E). Pour E, les corps dont la vitesse appartient à l'intervalle $[0, c]$, avancent dans l'Espace moins vite que lui. Les corps dont la vitesse appartient à l'intervalle $[c, +\infty[$, avancent dans l'Espace plus vite que lui. L'intervalle complet d'étude est $[0, c]U[c, +\infty[$.

Le tableau ci-dessus résume les valeurs obtenues, avec la première et la troisième convention, toujours avec les notations utilisées dans ce mémoire :

	Vitesse de la lumière	**Vitesse de E**	**Vitesse de A**	**Intervalle d'étude**	**Intervalle complet d'étude**
Première convention : E immobile et la lumière L	$v_{L/E \div E} = \pm c$	$v_{E/E \div E} = 0$	$v_{A/E \div E} = v$	$[-c, 0]U$ $[0, +c]$	$[-c, 0]U$ $[0, +c]$

avançant à la vitesse $\pm c$					
Troisième convention : E avançant à la vitesse *c* et la lumière L immobile ou avançant à la vitesse $+\infty$	$v_{L/E} = 0$	$v_{E/E} = c$	$v_{A/E} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Si $v = c$ alors $v_{L/E} = 0$ Si $v = 0$ alors $v_{E/E} = c$	$[0, +c]$	$[0, c]U$ $[c, +\infty[$
	$v_{L/E} = +\infty$	$v_{E/E} = c$	$v_{A/E} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Si $v = c$ alors $v_{L/E} = +\infty$ Si $v = 0$ alors $v_{E/E} = c$	$[c, +\infty[$	

Retenons de ces différentes conventions ou points de vue, qu'il n'existe pas réellement de vitesse *c* de la lumière indépassable, mais plutôt une borne *c* présente dans tous les intervalles d'étude.

VII.6 La masse, une vitesse dans le Temps ?

VII.6.1 La masse relativiste γm^t

Dans les paragraphes précédents, on a repris l'idée d'A. Einstein d'un Espace et d'un Temps déformables. On a proposé une approche alternative et intuitive des notions de déformations des distances et des durées.
Dans le mémoire 2, on a également suggéré que la masse m^t puisse s'interpréter comme « une vitesse » dans le Temps.

Dans la Relativité restreinte, on introduit la notion de masse relativiste γm^t , avec :
- m^t la masse au repos d'un corps,
- γm^t sa masse lorsque ce corps possède une vitesse *v*.

Suivant ce qui précède, on a :
$\gamma m^t = \frac{\alpha^t}{\alpha^x} m^t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m^t$ dans le cas général,
$\gamma m^t = \alpha^t \, m^t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m^t$ si absence de déformations des distances.

On peut interpréter :
- la masse m^t comme « une vitesse » dans le Temps pour un corps au repos dans l'Espace, par rapport à un observateur,
- la masse relativiste $\gamma m^t = \alpha^t \, m^t$ comme « une vitesse » dans le Temps pour un corps mobile à la vitesse *v* dans l'Espace, par rapport à un observateur.

VII.6.2 Le cas de la lumière et des photons

Rappelons que selon la Relativité restreinte, une particule d'impulsion *p*, de vitesse *v* et de masse m^t possède une énergie totale :

$$E^t = \gamma m^t \, c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m^t \, c^2$$

Dans le cas d'un photon, on a une vitesse :

$$v \to c$$

On a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to +\infty$$

On a pour sa masse au repos :

$$m^t \to 0$$

On obtient une forme indéterminée pour l'énergie totale :

$$E^t = \gamma m^t c^2 = 0 \times \infty$$

si elle est calculée à partir de sa masse m^t et de γ.

On a également pour sa masse relativiste une forme indéterminée :

$$\gamma m^t = 0 \times \infty$$

Selon la Relativité restreinte, une particule d'impulsion *p* et de masse m^t possède une énergie totale :

$$(E^t)^2 = p^2c^2 + (m^t)^2c^4$$

Dans le cas d'un photon, on a :

$$(E^t)^2 = p^2c^2 + 0$$

On obtient son énergie totale à partir de son impulsion *p* où de sa fréquence *f* :

$$E^t = pc = hf$$

On a donc pour un photon :

- s'il est au repos dans l'Espace par rapport à nous, une masse nulle $m^t = 0$,
- une vitesse *c* dans l'Espace,
- une énergie totale qui est indéterminée, si elle est calculée à partir de sa masse m^t et de γ,
- une énergie totale : $E^t = pc = hf$

En conclusion, on dit fréquemment que la lumière et les photons possèdent une masse nulle. Ce n'est pas totalement exact. Un photon possède une masse nulle, s'il était au repos par rapport à l'observateur. Lorsqu'il est à la vitesse *c*, on n'en sait rien. Mais on peut présumer que sa masse ne soit pas nulle par rapport à l'observateur. Cela explique notamment sa sensibilité à la gravitation ou sa participation à la diffusion Compton.

VII.6.3 Pourquoi n'observe-t-on aucun « choc » lorsqu'on superpose 2 faisceaux de lumière ?

La lumière est présentée parfois comme ondulatoire, parfois comme corpusculaire. Dans le deuxième cas, on peut s'attendre à observer des « chocs » entre deux photons lorsqu'on superpose 2 faisceaux de Lumière. Ce n'est expérimentalement pas le cas.

On peut l'intuiter en se disant que deux photons ont l'un pour l'autre une vitesse nulle, et donc l'un pour l'autre une masse nulle. Il n'y a donc pas de « choc ».
On peut objecter que deux photons se croisant en sens contraire, mesurent l'un pour l'autre une vitesse *2c*. Reprenons alors les résultats des expériences d'A. Michelson et E. Morley : quel que soit le référentiel, un expérimentateur mesure pour la lumière une vitesse *c*. Transposons ce résultat au photon : quel que soit le référentiel, un photon mesure pour un autre photon une vitesse nulle.

En revanche, on observe bien expérimentalement une collision entre un photon et un électron, par exemple lors de la diffusion Compton. Le photon a donc, en quelque sorte, une masse pour l'électron.

Nota

Pour être complet, une théorie proposée par W. Heisenberg dans les années 1930 prévoit une interaction possible entre deux photons *via* l'échange d'un électron. Des expériences poussées sont menées sur le sujet et pourraient corroborer l'hypothèse de W. Heisenberg.

VII.6.4 Pourquoi mesure-t-on toujours une vitesse *c* pour la Lumière ?

Pourquoi pour tout phénomène L possédant :

- une « vitesse » dans le Temps nulle : $m^t = 0$, si ce phénomène était au repos dans l'Espace par rapport à un observateur,
- une vitesse dans l'Espace non égale à celle de l'observateur, celui-ci se considérant immobile dans l'Espace,

l'observateur mesure **nécessairement** une vitesse dans l'Espace égale à c ?

Selon la Relativité restreinte, on a l'énergie totale d'une particule :

$$E^t = \gamma m^t \, c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m^t \, c^2$$

On note que pour tout phénomène L possédant une masse au repos de limite nulle $m^t \to 0$, il est possible d'avoir une énergie E^t non nulle, à la condition **nécessaire** que la vitesse du phénomène L ait pour limite $v \to c$ et $\gamma \to \infty$.

On a en effet :

- $v \to c$ si l'observateur se considère immobile dans l'Espace,
- $v_{L/Obs} = \gamma c \to \infty$ si l'observateur se considère avancer à la vitesse c dans l'Espace.

VII.7 L'hypothèse Temps Lumière

VII.7.1 Partageons-nous un même Temps avec ces phénomènes ou corps dont nous mesurons une masse nulle et une vitesse *c* ?

Comme on l'évoqué dans le précédant paragraphe, on mesure pour certains phénomènes ou corps, comme la lumière ou les photons :

- s'ils étaient au repos dans l'Espace par rapport à nous, une masse nulle $m^t = 0$,
- une vitesse c dans l'Espace.

Suivant une approche relativiste des mouvements, ces phénomènes ou corps, s'ils étaient au repos dans l'Espace par rapport à nous, auraient-ils « une vitesse » nulle dans le Temps par rapport à nous, c'est-à-dire une « vitesse » dans le Temps identique à la nôtre, et donc partageraient-ils un même Temps que nous, êtres humains ?

On baptise poétiquement cette question, *l'hypothèse Temps Lumière*, un Temps Lumière qui serait celui de lumière (si celle-ci était au repos dans l'Espace par rapport à nous), et aussi le nôtre.

VII.7.2 Comment font les êtres vivants pour se « caler » sur les mêmes instants ?

Dans l'hypothèse d'un Temps déformable, où tous les corps n'ont pas la même « vitesse » m^t dans le Temps, la question c'est de savoir comment font les êtres vivants pour se « caler » sur les mêmes instants ? Autrement dit, comment font les êtres vivants pour vivre ensemble ?

VII.7.3 Quel est l'intérêt d'une vitesse *c* toujours constante de la lumière ?

Optons dans ce paragraphe pour une approche fonctionnaliste. C'est-à-dire, interprétons l'Univers comme une grosse machine où tous les éléments auraient une fonction (on peut même parler d'utilité). Suivant cette approche, interrogeons-nous sur la fonction d'une vitesse c constante de la lumière quel que soit le référentiel ? Quel est finalement son intérêt ?

Dans les paragraphes précédents, on a souligné que si la Lumière avait une vitesse nulle dans l'Espace par rapport à un observateur, sa masse γm^t serait nulle et sa « vitesse » dans le Temps également. La lumière aurait donc le même Temps que l'observateur.

Suivant une approche phénoménologique, cette constatation introduit implicitement un lien entre tous les observateurs mesurant une même vitesse c de la lumière.

Ainsi, cette constante c indiquerait-elle l'existence d'un lien identique et partagé par tous les observateurs vivant ensemble ? Ce lien, perte d'une liberté, permettrait-il en contrepartie aux observateurs de vivre ensemble, d'avancer concomitamment dans le Temps ?

On a commencé poétiquement cet essai en imaginant des rotations dans des plans spatiotemporels. On le finit tout aussi poétiquement en imaginant la constante c, comme une caractéristique identique et partagée par les êtres humains vivant ensemble, leur permettant de se positionner sur les mêmes instants. Cette constance c est grande, mais c'est vrai que la vie s'écoule si vite !

Notre souci initial, c'était l'inutilité à priori d'une vitesse c constante et indépassable de la lumière, avec l'agacement de ne pouvoir dépasser une certaine valeur (d'ailleurs difficilement compatible avec les idées d'infini et de continuité).
Notre argument, c'est l'utilité d'une quantité partagée et identique à tous les êtres humains, afin que nous puissions vivre ensemble.

Nota 1 sur les souvenirs et le fonctionnement de la mémoire
On a ici suggéré que les êtres humains doivent avancer identiquement dans le Temps pour vivre ensemble. Néanmoins, notre être ne forme pas obligatoirement un tout. On peut imaginer certaines parties de notre être qui avancent dans le Temps identiquement à ceux qui nous font face, et d'autres parties qui remontent le Temps ou qui restent figées à une certaine époque (c'est d'ailleurs ce que suggère la mesure d'une masse m^t non nulle pour notre corps et notamment notre cerveau). Ces parties revivent des instants, leur conférant une sorte d'éternité. Elles peuvent également en rapporter des souvenirs oubliés.

Ainsi, lorsque nous nous remémorons notre vie passée, sommes-nous entièrement à l'instant présent, ou certaines parties de nous-mêmes sont-elles à l'instant dont nous nous souvenons ? Notre mémoire stocke-t-elle toutes les informations ou pointe-t-elle seulement sur des instants, sur lesquels il faut revenir, pour retrouver l'information ?

Nota 2 sur un agent biologique faisant avancer identiquement dans le Temps les êtres vivant ensemble
Un agent biologique peut se définir par l'utilité et les fonctions qu'il exerce au sein d'un organisme. Par exemple, l'ADN est un agent qui permet de stocker et de transmettre l'information génétique. De même, quel pourrait être l'agent biologique (on peut parler d'horloge biologique) qui permettrait aux êtres vivant ensemble d'avancer identiquement dans le Temps ?
Peut-être que cet agent biologique n'est pas localisé spatialement comme l'ADN et qu'il a lien avec la découverte de L. Pasteur pour la caractérisation de la Vie : les molécules d'un seul type chiral ?

Nota 3 sur la Vie et la mort
Si la Vie est caractérisée par la mesure d'une constante c et une « vitesse » identique dans le Temps, la mort pourrait être caractérisée par la fin de cette « vitesse » identique dans le Temps.

Suivant cette hypothèse, et dans la quête d'un agent biologique faisant avancer identiquement dans le Temps les êtres vivants, une piste serait d'étudier les fonctions qui disparaissent lors du passage de la vie à la mort. L'agent biologique pourrait-il être relié à l'une de ces fonctions ?

Nota 4, matérialisme ou dualisme ?

Dans le débat traditionnel qui oppose les philosophes matérialistes ou monistes (matière et esprit indissociables) aux philosophes dualistes (matière et esprit dissociés), retenons que les hypothèses proposées ici ne permettent pas départager.

On peut concilier à la fois matérialisme et dualisme, avec une matière interprétée comme une « vitesse » dans le Temps, une hypothèse Temps Lumière et une flèche du Temps première caractéristique de la Vie.
Une forme de vie au-delà ne serait pas foncièrement impossible, sauf qu'elle n'aurait plus le Temps Lumière.

VII.8 Conclusion de l'essai, la question du Temps

On a commencé cet essai en s'interrogeant sur les ressemblances entre l'électromagnétisme et la gravitation. Dans le 3ème mémoire, on a proposé d'unifier la gravitation newtonienne avec la physique quantique (dans un sens restreint néanmoins, c'est-à-dire selon les équations $E = h\nu$ et $p = \frac{h}{\lambda}$), comme l'avait fait au 19ème siècle J. C. Maxwell avec l'unification de l'électrostatique et du magnétisme.

Dans le 5ème mémoire, on s'est intéressé d'abord à rapprocher les interactions électromagnétique, hyper et nucléaires entre elles, ensuite à étudier comment pouvait s'intégrer la gravitation avec ces interactions. On a simplement proposé des pistes. C'est-à-dire, la question initiale des ressemblances entre l'électromagnétisme et la gravitation, ainsi que celle de l'unification de toutes ces interactions, sont restées en suspens. Reste donc à comprendre le principal, notamment le lien entre charge électrique et masse. Toutes les charges électriques ont à priori également une masse, mais pourquoi, par exemple, proton et électron ont des charges électriques identiques en valeur absolue, et des masses si différentes ?

Pour le dernier grand projet d'unification de la physique actuelle, celui de la Relativité générale avec la physique quantique, il n'a été esquissé dans le 6ème mémoire que quelques remarques. Plutôt, il a été souligné que la Relativité générale, et surtout 2 de ses développements cosmologiques : Big-bang et trous noirs, présentaient des ressemblances avec la biologie. L'idée, ce n'est pas que Relativité générale et physique quantique ne soient pas un jour fusionnables. L'univers n'est qu'un et donc toutes les théories devraient pouvoir se rejoindre comme les branches d'un immense arbre. L'idée, c'est que Relativité générale et physique quantique devront préalablement se fondre avec d'autres modèles ou théories avant qu'elles ne se rejoignent.

Pour conclure, s'il fallait proposer un thème central à cet essai, ce serait sans doute la question du Temps. On a surtout abordé la question du Temps d'un point de vue physique : tenter de comprendre comment il intervient dans les équations de la gravitation, de l'électromagnétisme et des interactions nucléaires ? On s'est néanmoins étonné que le Temps de la physique soit aussi semblable à une dimension de l'Espace et ne nécessite pas, dans ses équations, la notion d'écoulement.

Car ce qui tous nous intéresse particulièrement, davantage que le Temps de la physique, c'est le Temps ressenti, notre Temps qui nous emporte dans une course folle. Une course semblable à un torrent turbulent fait de courants, de rapides et de tourbillons. Une course dont intérieurement, nous pouvons remonter le cours, afin de revivre une nouvelle fois quelques merveilleux instants. Une course qui extérieurement, est sans retour possible, avec arrêt terminus aux bouches.

Pour mieux comprendre une chose, il est parfois pertinent de pas l'appréhender directement, mais d'en étudier des choses ressemblantes. Comme le soulignent les systémiques, on ne comprend pas une chose en propre, on la comprend via sa relation avec les autres, ses différences, ses failles, ses incohérences.
A travers ce long voyage consacré à l'étude de l'Espace et du Temps en physique, notre objectif était également de mieux cerner notre Temps ressenti. Qu'est-ce qui pouvait le caractériser et en faire sa singularité vis-à-vis du Temps de la physique ?

Bibliographie du mémoire 6

Sur le Temps à 2 sens dans les théories physiques

[1] R. Feynman, The principle of least action in Quantum Mechanics, thèse, Princeton University, 1942

[2] R. Feynman, Conférence Nobel, 1965

[3] R. Feynman, The Character of Physical Law, 1965

Sur la flèche du Temps

[4] Etienne Klein, Michel Spiro, Le Temps et sa Flèche. Colloques de la Société Française de Physique : Physique et Interrogations fondamentales. Première Rencontre sur « le Temps et sa Flèche », Editions frontières, Paris, 1994

[5] Wikipedia, Flèche du temps

Sur la flèche du Temps thermodynamique

[6] Roger Balian, Le Temps macroscopique. Colloques de la Société Française de Physique : Physique et Interrogations fondamentales. Première Rencontre sur « le Temps et sa Flèche », Editions frontières, Paris, 1994

[7] Wikipedia, Démon de Maxwell

Sur la flèche du Temps microscopique

[8] L. Bay, Introduction à la physique des particules. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, EPFL

[9] J. Collot, Symétries discrètes P C T Règles de sélection. UJF Grenoble, années 2007-2008

[10] Maurice Jacob, Le temps des processus élémentaires II. Colloques de la Société Française de Physique : Physique et Interrogations fondamentales. Première Rencontre sur « le Temps et sa Flèche », Editions frontières, Paris, 1994

[11] L. Marleau, Particules élémentaires. Université Laval, Québec, 2007

Sur la flèche du Temps cosmologique

[12] L. Smolin, Life of the Cosmos, New York, Oxford University Press, 1997

[13] L. Smolin, Time Reborn, Houghton Mifflin Harcourt, 2013

[14] Wikipédia, Big-bang

[15] Wikipédia, Métrique de Schwarzschild

[16] Wikipédia, Thermodynamique des trous noirs

Sur la flèche du Temps biologique

[17] L. Robert, Le Temps en biologie. Colloques de la Société Française de Physique : Physique et Interrogations fondamentales. Première Rencontre sur « le Temps et sa Flèche », Editions frontières, Paris, 1994

Sur la Vie, l'étude de l'esprit humain et de la connaissance

[18] R. Dawkins, Il était une fois nos ancêtres, une histoire de l'évolution. Editions Robert Laffont, Paris, 2007, New-York, 2004 pour l'édition originale en anglais

[19] J. Lovelock, La Terre est un être vivant, L'hypothèse Gaïa. Editions du Rocher, 1986 pour la traduction française, Oxford University Press, Oxford, 1979 pour l'édition originale en anglais

[20] L. Margulis, D. Sagan. L'Univers bactériel, Albin Michel, Paris, 1989 pour la traduction française, New-York, 1986 pour l'édition originale en anglais

[21] J. M. Smith, The Major Transitions in Evolution, Oxford University Press, Oxford, 1995

[22] L. Pasteur, Ecrits scientifiques et médicaux, Flammarion, Paris, 2010

[23] F. Varela, Invitation aux sciences cognitives. Editions du Seuil, Paris, 1996, pour la traduction et l'édition françaises.
[24] Wikipédia, Origine de la vie

Sur la théorie de la Relativité

[25] A. Einstein, La relativité. Gauthier-Villars, Paris, 1956 pour l'édition en langue française, 1916 pour la 1ère édition en langue allemande
[26] A. Einstein, Physique, philosophie, politique, textes choisis et commentés par Françoise Balibar. Seuil, Paris, 2002 pour l'édition en livre de poche

Table des matières